Autor: Gil da Costa Marques

1: Grandezas vetoriais e grandezas escalares

A Física lida com um amplo conjunto de grandezas. Dentro dessa gama enorme de grandezas existem algumas, cuja caracterização completa requer tão somente um número seguido de uma unidade de medida. Tais grandezas são chamadas grandezas escalares. Exemplos dessas grandezas são a **massa** e a **temperatura**.

Uma vez especificado que a massa é 1kg ou a temperatura é 32ºC, não precisamos de mais nada para caracterizá-las.

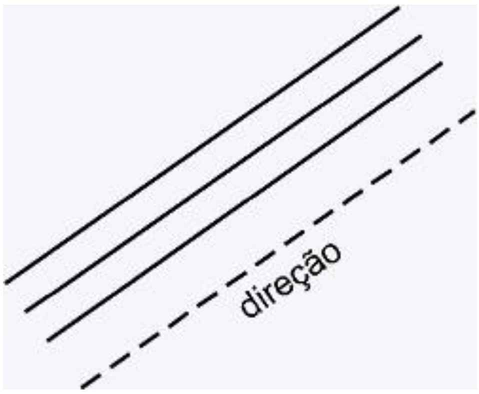
Outras grandezas há que requerem três atributos para a sua completa especificação como, por exemplo, a posição de um objeto. Não basta dizer que o objeto está a 200 metros. Se você disser que está a 200 metros existem muitas possíveis localizações desse objeto (para cima, para baixo, para os lados, por exemplo). Dizer que um objeto está a 200 metros é necessário, porém não é suficiente. A distância (200 metros) é o que denominamos, em Física, **módulo** da grandeza. Para localizar o objeto, é preciso especificar também a **direção** e o **sentido** em que ele se encontra. Isto é, para encontrar alguém a 200 metros, precisamos abrir os dois braços indicando a direção e depois fechar um deles especificando **Gil Marques** o sentido. Na vida cotidiana, fazemos os dois passos ao mesmo tempo, economizando abrir os dois braços.

Autor: Gil da Costa Marques

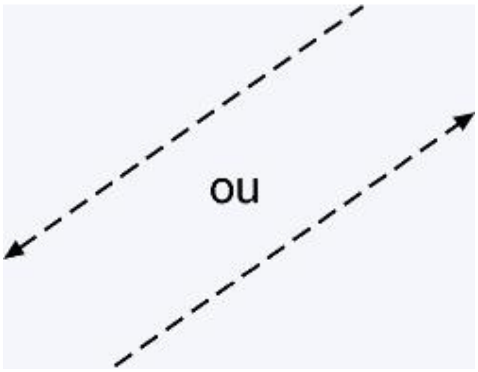
Resumindo:

Uma grandeza vetorial é tal que sua caracterização completa requer um conjunto de três atributos: **o módulo**, **a direção** e **o sentido**.

Direção: é aquilo que existe de comum num feixe de retas paralelas.



Sentido: podemos percorrer uma direção em dois sentidos.



Portanto, para cada direção existem dois sentidos.

Além da posição, a velocidade, a aceleração e a força são, por exemplo, grandezas vetoriais relevantes na Mecânica.

2: Vetores

Lidar com grandezas escalares é muito fácil. Fazer adição de duas grandezas escalares é simples. Por exemplo, 3kg acrescidos de 2kg dá 5kg.

Trabalhar com grandezas vetoriais já não é tão simples. Considere o caso da adição de duas grandezas vetoriais. Como é possível adicionar grandezas que, além dos respectivos módulos, têm direções e sentidos diferentes? Ou ainda efetuar subtrações e multiplicações de grandezas vetoriais?

Somar grandezas vetoriais, bem como realizar as demais operações, é fundamental em Física. Se aplicarmos duas forças a um corpo, qual será o resultado da adição dessas duas forças? Certamente, não podemos simplesmente somar os módulos.

A melhor forma de se lidar com grandezas vetoriais é introduzir um ente conhecido como **vetor**. O vetor representa, para efeito de se determinar o módulo, a direção e o sentido, da grandeza física.

Utilizando-se a representação através de vetores poderemos definir a soma, a subtração e as multiplicações de grandezas vetoriais.

Ao longo do texto vamos estabelecer a distinção entre grandezas vetoriais e escalares, colocando uma flechinha sobre as primeiras:

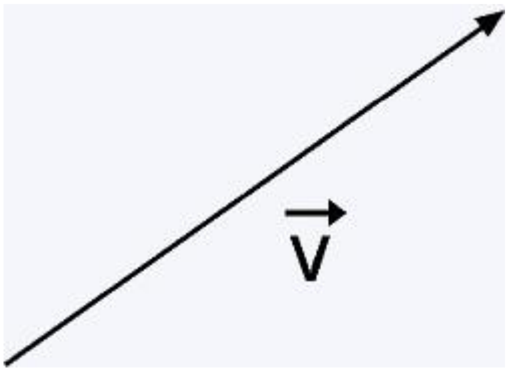
$\vec{a} =$ vetor aceleração,

$\vec{v} =$ vetor velocidade,

$\vec{r} =$ vetor posição,

$\vec{F} =$ vetor força.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE VETORES



Um vetor $\vec{v}$ é representado graficamente através de um segmento orientado (uma flecha). A vantagem dessa representação é que ela permite especificar a **direção** (e esta é dada pela reta que contém a flecha) e o **sentido** (especificado pela farpa da flecha). Além disso, o seu módulo (indicado com v ou $|\vec{v}|$) será especificado pelo "tamanho" da flecha, a partir de alguma convenção para a escala.

3: Operação com vetores

A representação gráfica apresentada acima permite-nos executar uma série de operações com vetores (soma, subtração etc.). Podemos agora dizer, por exemplo, quando dois vetores são iguais. Eles são chamados de idênticos se tiverem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

A seguir, vão as definições das operações.

Multiplicação por um escalar (por um número) Podemos multiplicar um vetor $\vec{v}$ por um número α. Dessa operação resulta um novo vetor:

$$\vec{R} = \alpha \vec{v} \ ,$$

com as seguintes características:

a) O módulo do novo vetor é o que resulta da multiplicação do valor absoluto de α pelo módulo de $\vec{v}$.
b) A direção do novo vetor é a mesma de $\vec{v}$.
c) O sentido de R é o mesmo de $\vec{v}$ se α for positivo e oposto ao de $\vec{v}$ se $\alpha < 0$.

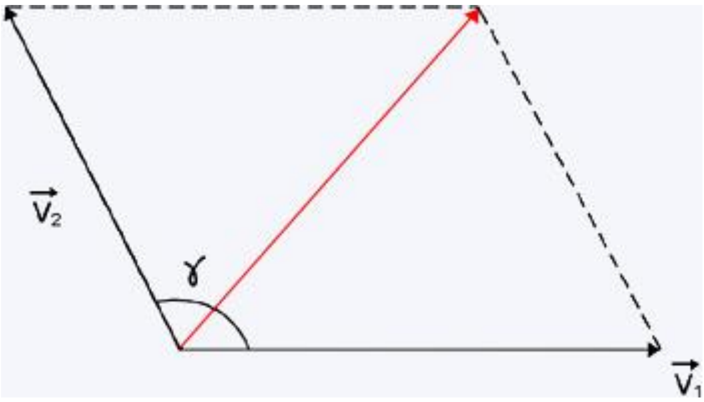
Soma de vetores

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dois vetores. A soma desses vetores é um terceiro vetor, o **vetor resultante**:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ .$$

Para determinarmos o módulo, a direção e o sentido desse vetor resultante, utilizamos a regra do paralelogramo.

Primeiramente, desenhamos o paralelogramo definido a partir dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.



a) **Módulo** do vetor resultante:

É dado pelo comprimento da diagonal indicada na figura. Portanto,

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos\gamma \ ,$$

onde γ é o ângulo entre os dois vetores.

b) **Direção**:

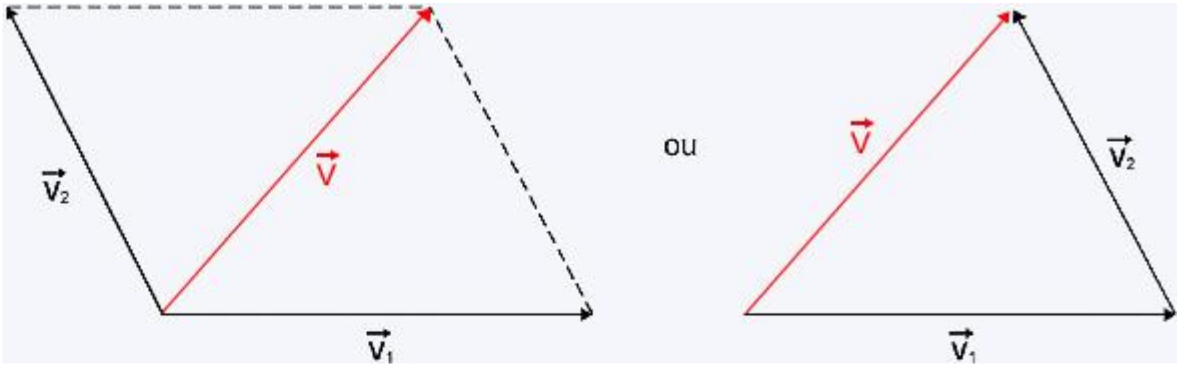
Aquela da reta que contém a diagonal.

c) **Sentido**:

A partir do vértice formado pelos dois vetores.

Autor: Gil da Costa Marques

Portanto o vetor resultante é obtido desenhando-se uma das figuras abaixo:



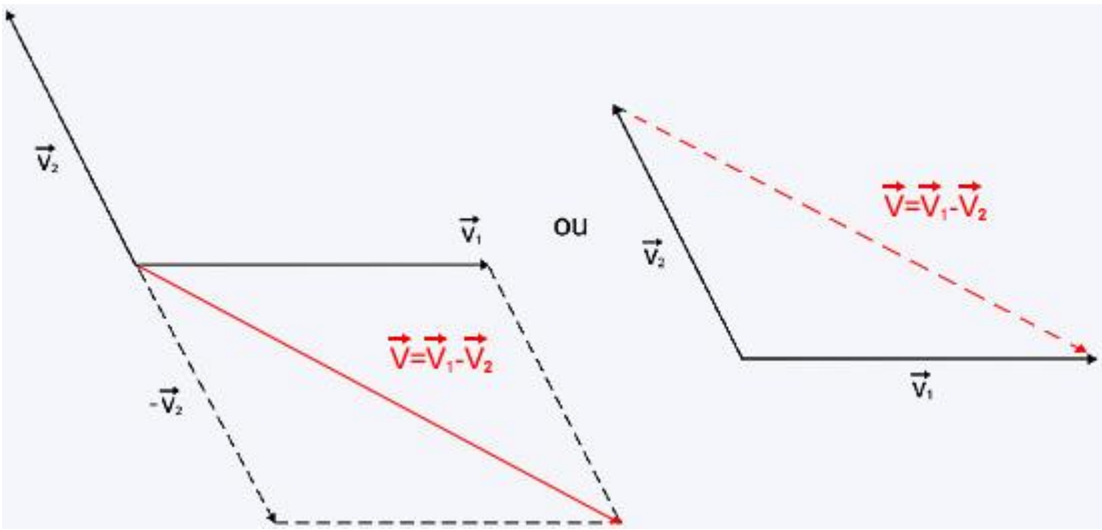
Subtração de vetores

Consideremos os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. A subtração de vetores

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \ ,$$

resulta em um terceiro vetor (chamado resultante), cujas propriedades são inferidas a partir da soma dos vetores $\vec{v}_1$ e $\left(-\vec{v}_2\right)$.

O vetor tem módulo e direção iguais ao do vetor $\vec{v}_2$ mas tem o sentido oposto. Reduzimos o problema da subtração de dois vetores ao problema da soma de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.



4- Representação analítica de um vetor

Além da representação geométrica (ou gráfica) utilizada anteriormente, podemos fazer uso de uma outra representação, conhecida como representação analítica do vetor.

Autor: Gil da Costa Marques

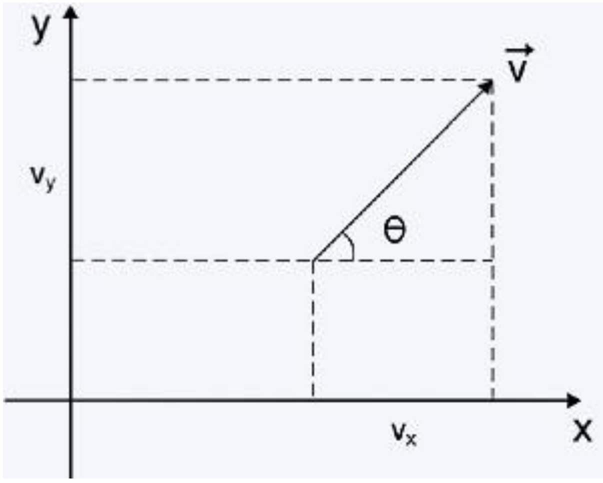
Na representação analítica também utilizamos um conjunto de três atributos de um vetor (esses atributos são conhecidos como componentes do vetor). Para a definição de componentes, a melhor alternativa - e a mais fácil - é usar um sistema de eixos cartesianos.

Componentes de um vetor

Dado um sistema de eixos cartesianos (composto de um conjunto de três eixos ortogonais), podemos definir as componentes de um vetor nesse sistema de eixos tomando-se as projeções do vetor nesses eixos.

Vamos tomar, por uma questão de simplicidade, um sistema com dois eixos ortogonais (x e y). Esses dois eixos estão contidos num plano.

Consideremos um vetor $\vec{v}$ nesse plano. A componente x do vetor $\vec{v}$ (designada por v_x) é dada pela projeção do vetor $\vec{v}$ no eixo x. Para determinarmos a projeção do vetor ao longo de qualquer eixo, consideramos as extremidades do vetor e por elas traçamos linhas perpendiculares ao eixo até encontrá-lo. Tomamos então a distância entre as interseções como a projeção se a flecha estiver na mesma direção do eixo (isto é, se o ângulo entre o vetor e o sentido positivo do eixo for um ângulo agudo). Caso contrário, a projeção será essa distância, mas com sinal negativo.



A projeção, portanto, tem que levar em conta a orientação do vetor em relação ao eixo. A projeção fica melhor definida, matematicamente, em termos do ângulo θ (entre o vetor $\vec{v}$ e o eixo x). Podemos escrever:

$$v_x = v\cos\theta \ ,$$

onde v é o módulo do vetor.

Analogamente, a componente y é a projeção do vetor $\vec{v}$ ao longo do eixo y. A expressão para v_y é, em termos de θ:

$$v_y = vsen\theta \ .$$

Operação com vetores usando componentes

O uso das componentes de um vetor facilita especialmente na adição e subtração de vetores. Por exemplo, na soma de vetores,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ ,$$

o vetor resultante $(\vec{v})$ é tal que suas componentes são dadas pela soma das componentes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Isto é,

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} \,,$$

$$v_y = v_{1y} + v_{2y} \,.$$

No caso da subtração,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \ ,$$

o vetor resultante $(\vec{v})$ tem suas componentes dadas pela subtração das componentes

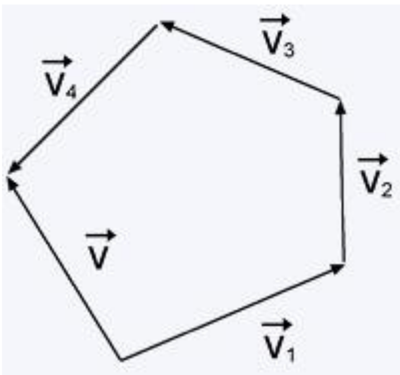
$$v_x = v_{1x} - v_{2x} \,,$$

$$v_y = v_{1y} - v_{2y} \,.$$

5- Extensão para muitos vetores

A extensão das regras de adição para muitos vetores é muito simples. Se tivermos, por exemplo, 4 vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, o vetor resultante:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 \ ,$$



será obtido utilizando-se a representação gráfica pelo lado do polígono que é necessário para fechá-lo, uma vez colocados os vetores $\vec{v}_1 ... \vec{v}_4$, um vetor depois do outro, começando sempre pela extremidade da flecha (Regra do Polígono).

Utilizando-se a representação em termos de componentes, escrevemos para as componentes do vetor resultante:

$$v_y = v_{1y} + \dots v_{4y}\,,$$

$$v_x = v_{1x} + \dots v_{4x}\,,$$

isto é, as componentes do vetor resultante são as somas das componentes respectivas dos vetores que estão sendo somados.

6- Produtos de vetores

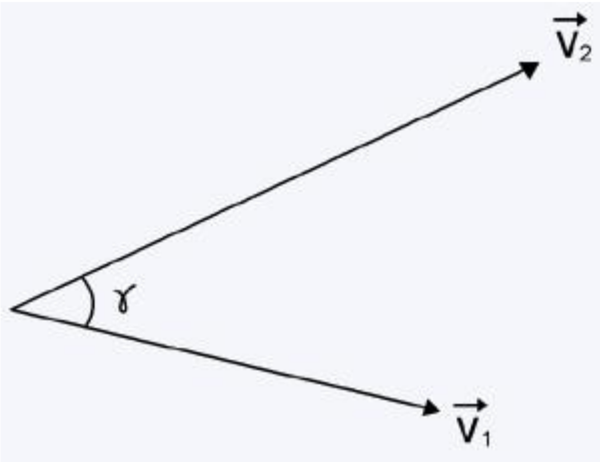
Podemos introduzir dois tipos de produtos entre vetores.

O primeiro produto é conhecido como **produto escalar** de dois vetores. Esse nome decorre do fato de o resultado desse produto ser uma grandeza escalar.

O segundo é o **produto vetorial**. Neste caso, o resultado do produto é um outro vetor.

Produto escalar de dois vetores

Sejam dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O produto escalar dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, que representamos por $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ é definido como sendo dado pelo produto dos módulos de cada um dos vetores multiplicado pelo coseno do ângulo γ formado pelos dois vetores:



$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = v_1.v_2 \cos\gamma \;\; .$$

Uma outra definição, inteiramente equivalente, é em termos das componentes dos vetores:

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = v_{1x}.v_{2x} + v_{1y}.v_{2y} + v_{1z}.v_{2z} \;\; .$$

Produtos vetorial de dois vetores

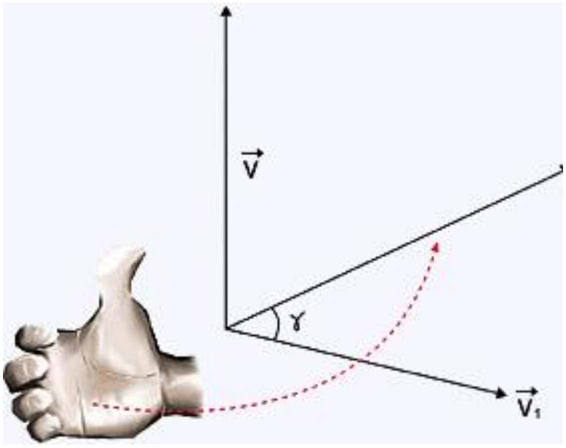
Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O produto vetorial de dois vetores, representado por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, é um vetor $\vec{v}$ indicado com

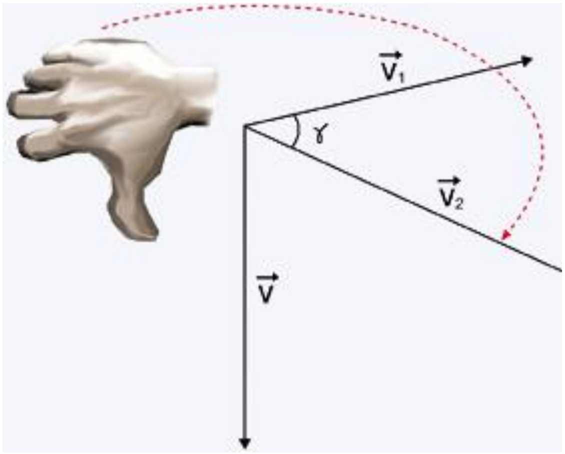
$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$,

cujas características são:

a) **Direção -** do eixo perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

b) **Sentido -** para determinar o sentido, use sua mão direita (essa regra é conhecida como regra da mão direita). Com os dedos da mão procure levar o vetor $\vec{v}_1$ para o vetor $\vec{v}_2$. O sentido será dado pelo polegar da mão direita.





c) **Módulo -** O módulo de v é dado pela expressão

$$v = v_1 . v_2 sen\gamma \ ,$$

ou seja, o módulo de $\vec{v}$ é dado pelo produto dos módulos vezes o seno do ângulo entre os dois vetores.

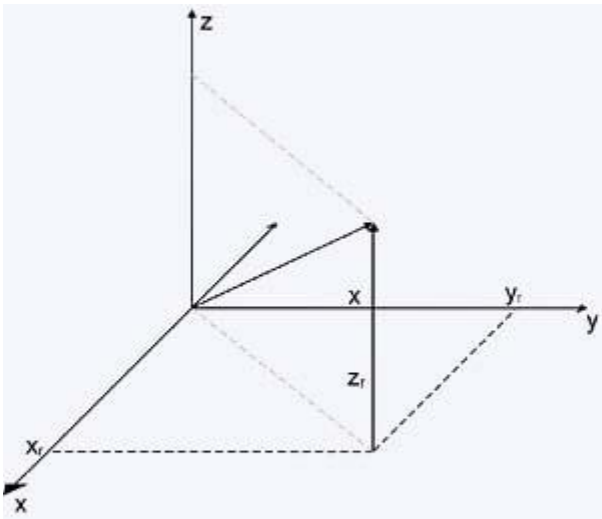
7- Módulo de um vetor

O módulo de um vetor pode também ser definido como a raiz quadrada do produto escalar do vetor consigo mesmo, isto é,

$$v = \sqrt{\vec{v} . \vec{v}} \ .$$

Essa expressão permite escrever o módulo do vetor em termos das suas componentes. Obtemos,

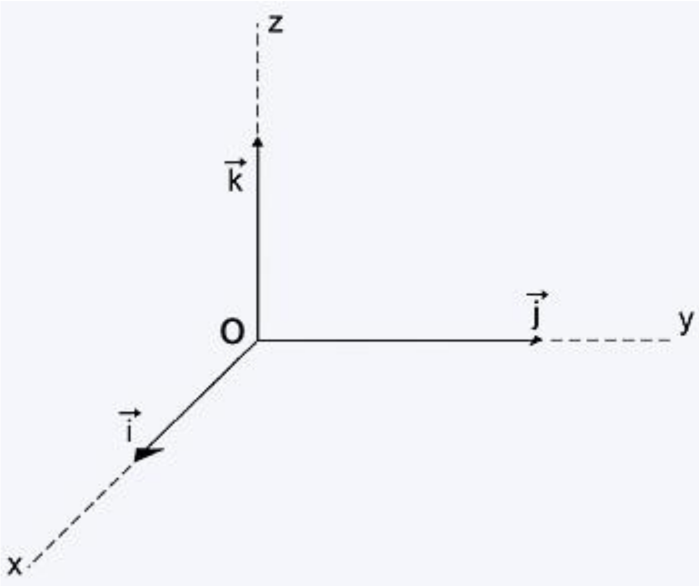
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ .$$



Autor: Gil da Costa Marques

8-O vetor posição

Para representarmos adequadamente as grandezas vetoriais utilizando o sistema de eixos cartesianos, fazemos uso de um conjunto de vetores de "tamanho" igual a 1 (módulo igual a 1). Esses versores, assim chamados por terem módulo unitário, são representados na figura.



Esses versores básicos são definidos assim:

$\vec{i}$ = vetor de módulo unitário na direção do eixo x e sentido a partir da origem
,

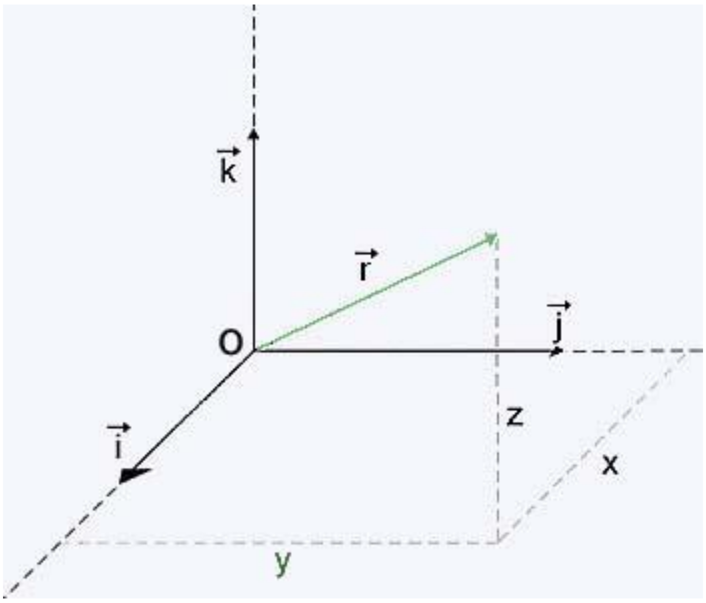
$\vec{j}$ = vetor de módulo unitário na direção do eixo y e sentido a partir da origem
,

$\vec{k}$ = vetor de módulo unitário na direção do eixo z e sentido a partir da origem
.

O vetor de posição $\vec{r}$ pode então ser representado a partir das suas componentes e dos versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ como

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad .$$

Autor: Gil da Costa Marques



9- Reescrevendo vetores em coordenadas cartesianas

Como fizemos para o vetor posição podemos agora representar qualquer vetor em coordenadas cartesianas a partir das suas componentes x, y e z. Um vetor genérico qualquer $\vec{v}$ será escrito como

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \ .$$

Tendo em vista as propriedades de ortogonalidade dos versores $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ vemos que as componentes de qualquer vetor são dadas pelos produtos escalares

$$v_x = \vec{v}\vec{i}$$
$$v_y = \vec{v}\vec{j}$$
$$v_z = \vec{v}\vec{k}$$

Ainda utilizando os versores $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$, podemos definir o **produto vetorial** de dois vetores, formalmente, como o determinante da matriz constituída pelos versores e pelas componentes dos vetores. Isto é,

$$A\times B=\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{bmatrix}= \quad .$$

$$=\vec{i}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)+\vec{j}\left(A_zB_x-A_xB_z\right)+\vec{k}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)$$

Portanto, as componentes do vetor $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ são:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_x=A_yB_z-A_zB_y$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_y=A_zB_x-A_xB_z$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_z=A_xB_y-A_yB_x$$

10-Propriedades gerais

A partir das definições anteriores, podemos verificar as propriedades gerais que se seguem. Se $\vec{A},\vec{B}$ e $\vec{C}$ são vetores, valem as propriedades de comutatividade e associatividade,

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \ ,$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right) \ .$$

Valem também as seguintes propriedades distributivas no caso da multiplicação por escalares c e d:

$$c\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=c\vec{A}+c\vec{B} \ ,$$

$$\left(c+d\right)\vec{A}=c\vec{A}+d\vec{A} \ .$$

Para o produto escalar de dois vetores valem as propriedades:

$$\left(c\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{A}\left(c\vec{B}\right)=c\left(\vec{A}.\vec{B}\right) \ ,$$

$$\vec{A}\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C} \ ,$$

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A} \ .$$

Para o produto vetorial valem

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \ ,$$

$$\left(c\vec{A}\right)\vec{B} = \vec{A}\left(c\vec{B}\right) = c\left(\vec{A}.\vec{B}\right) \text{ ,}$$

$$\vec{A}\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \text{ ,}$$

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0 \text{ .}$$

Para os versores $\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}$ valem as regras

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

As seguintes identidades são muito úteis

$$\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\vec{C} \text{ ,}$$

$$\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\times\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \text{ .}$$

Finalmente, lembramos que se definirmos o símbolo totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, $\varepsilon_{\mathrm{Im}n}$, como sendo dado por

$\varepsilon_{\mathrm{Im}n}$ =
0, se quaisquer dois dos índices são iguais,
+1, se (lmn) é uma permutação par de (123),
-1, se (lmn) é uma permutação ímpar (123),

então, as componentes do produto vetorial

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

podem ser escritas na forma

$$v_I = \varepsilon_{\mathrm{Im}n} v_{1m} v_{2n}$$

onde está implícita a soma sobre os índices repetidos.

11-Diferenciação de vetores

Se as componentes de um vetor são funções de um parâmetro t,

$$A_x = A_y\left(t\right).A_y = A_y\left(t\right) \text{ e } A_z = A_z\left(t\right),$$

a derivada do vetor $\vec{A}$ com respeito a t é definida por

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}\ .$$

Para a diferenciação valem as seguintes propriedades:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\vec{A}\right)=\frac{df}{dt}\vec{A}+f\frac{d\vec{A}}{dt}\ .$$

onde f é uma função escalar.
Para os produtos escalar e vetorial valem as propriedades

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)\vec{B}+\vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt}\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right).$$