17 – Dinâmica do Corpo Rígido

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 17.1

Considere o caso de um cilindro uniforme de massa M e raio R que oscila quando por ele se faz passar um eixo em torno do qual ele é posto a oscilar (vide figura 17.5). Determine o período de pequenas oscilações executadas por esse pêndulo composto quando esse eixo passa pela superfície do cilindro e é paralelo ao eixo de simetria do cilindro.

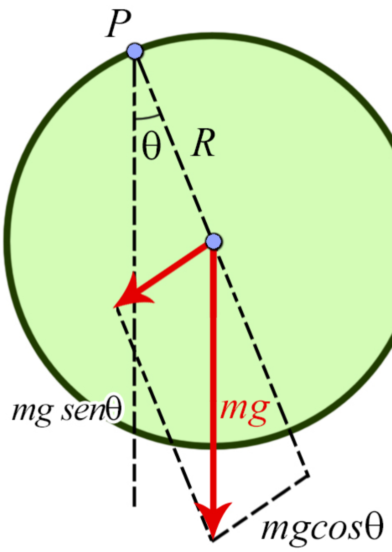

Figura 17.7. Cilindro oscilando em torno de um eixo cuja distância até o seu centro de massa é igual ao raio do cilindro.

Resolução

De acordo com a expressão (17.30) o período do pêndulo é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}$$

Portanto, ele depende, essencialmente, de dois parâmetros. O primeiro deles é a distância do centro de massa até o eixo (a menor distância entre um ponto e uma reta). Nesse caso, ela é igual ao raio do cilindro. De acordo com a figura (17.7), escrevemos;

$$a = R$$

O segundo parâmetro é o momento de Inércia calculado quando adotamos o eixo z coincidindo com o eixo no qual se dá a rotação. Primeiramente, lembramos que a componente do momento de inércia I_z quando adotamos um eixo que passa pelo centro de massa, e quando esse eixo é o eixo de simetria do cilindro, é dado por:

$$I_{zz} \equiv I_{cm} = \frac{M}{2}R^2.$$

O momento de inércia em torno de um eixo passando pelo ponto P da figura (17.7), contido no eixo paralelo ao eixo de simetria do cilindro e que passa pelo centro de massa, é determinado a partir do teorema dos eixos paralelos. De acordo com esse teorema:

$$I'_{zz} \equiv I = I_{cm} + MR^3 = \frac{3}{2}MR^2$$

Seu período, utilizando-se (17.29), é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Exercício Resolvido 17.2

Uma roda de bicicleta de massa M e raio R_1 (massa dos raios da roda desprezível) pode girar livremente em torno de um eixo horizontal. Um fio de massa desprezível é enrolado em torno de seu diâmetro, e ligado a um bloco de massa $m_1 = \dfrac{M}{5}$, passando por uma polia que é um disco de massa $m_2 = \dfrac{4M}{5}$ e raio R_2, como visto na figura 17.12.

a) Faça um diagrama mostrando as forças aplicadas pelo fio em cada um dos três corpos e determine os torques relevantes.

b) Determine a aceleração comum a todos os corpos

c) Determine todas as forças de tração.

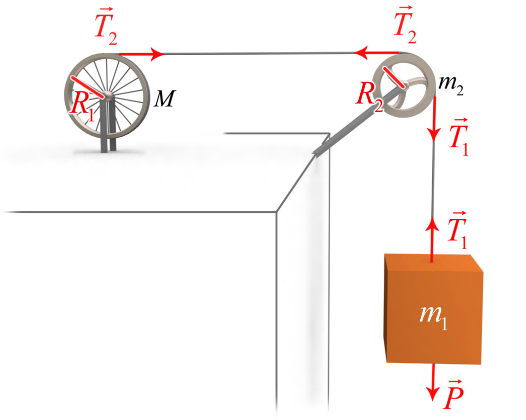

Fig.17.12 - Roda de bicicleta que se move sob o efeito de um corpo que, preso a ela, se movimenta na vertical.

Resolução

a) As equações dos dois movimentos de rotação pura (sem translação): a saber, o movimento da roda de bicicleta e da polia, são respectivamente:

$$\begin{cases} \tau_1 = I_1\alpha_1 = R_1T_2 \\ \tau_2 = I_2\alpha_2 = R_2(T_1 - T_2) \end{cases}$$

O movimento de translação pura, que é o movimento do bloco, é regido pela equação:

$$m_1a = m_1g - T_1$$

Tendo em vista que a aceleração escalar é a mesma para os três corpos, as equações acima são escritas como:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{a}{R_1^2} = T_2 \\ I_2 \dfrac{a}{R_2^2} = (T_1 - T_2) \\ m_1 a = m_1 g - T_1 \end{cases}$$

Somando as três equações acima, obtemos a seguinte expressão:

$$m_1 a + \frac{I_1}{R_1^2} a + \frac{I_2 a}{R_2^2} = m_1 g$$

Ou seja

$$a\left[m_1 + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right] = m_1 g$$

b) Levando-se em conta que o aro da bicicleta pode ser tratado aproximadamente como um anel, temos, dentro de boa aproximação:

$$I_1 = MR_1^2$$

Enquanto que o disco será tratado como um disco fino, ou um pequeno cilindro. Em qualquer caso, escrevemos:

$$I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}$$

Assim, a aceleração escalar pode ser escrita em termos das 3 massas de acordo com a expressão:

$$a = \frac{m_1 g}{\left[m_1 + M + \dfrac{M_2}{2}\right]}$$

Para as relações estipuladas no problema, obtemos.

$$a = \frac{(1/5)Mg}{M\left[\dfrac{1}{5} + 1 + \dfrac{2}{5}\right]} = \frac{g}{8}$$

c) As forças de tração

A força de tração T_2 é a mais fácil de ser determinada, pois ela é dada pela expressão,

$$T_2 = \frac{I_1 a}{R_1^2} = Ma = (M)\left(\frac{g}{8}\right) = \frac{Mg}{8}$$

Portanto:

$$T_2 = \frac{Mg}{8}$$

Para T_1, temos a seguinte relação:

$$T_1 = T_2 + \frac{I_2 a}{R_2^2}$$

Donde inferimos que,

$$T_1 = \frac{Mg}{8} + \frac{m_2 a}{2}$$

Logo,

$$T_1 = \frac{Mg}{8} + \frac{2}{5}M\left(\frac{g}{8}\right) = \frac{Mg}{8}\left[1+\frac{2}{5}\right] = \frac{7}{40}Mg$$

Exercício Resolvido 17.3

Uma esfera de massa m e raio R é solta (a partir do repouso) do topo de um plano inclinado que faz um ângulo α com a horizontal (vide figura 17.13).

a) Determine o torque de cada uma das forças em relação ao centro de massa.

b) Sabendo-se que a esfera desce o plano inclinado rolando sem deslizar, encontre sua aceleração. Ou seja, a aceleração do centro de massa da esfera.

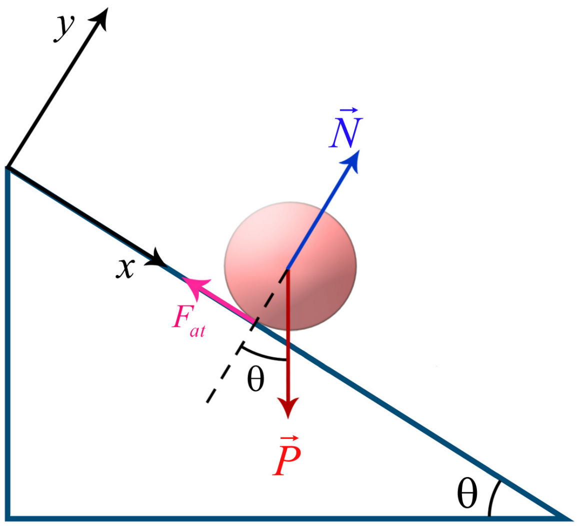

Figura 17.13 DCL de uma esfera descendo um plano inclinado.

Resolução

Podemos resolver esse problema utilizando a conservação da energia, como foi feito no exemplo 17.3. No entanto, agora faremos a decomposição das forças e dos torques.

a) Considerando-se um referencial no centro de massa, os torques da força normal e a força peso são iguais a zero. Assim o movimento de rotação é descrito pela equação:

$$RF_a = I\alpha = I\frac{\ddot{x}}{R}$$

O fato de não haver deslizamento, implica a seguinte relação entre as acelerações angular:

$$\alpha = \frac{\ddot{x}}{R}$$

E, portanto,

$$RF_a = I\alpha = I\frac{\ddot{x}}{R}$$

Onde T é o momento de inércia associado a rotações quando elas se dão ao longo de um eixo passando pelo centro de massa (no caso, qualquer eixo de simetria da esfera).

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

b) Para o movimento de translação escrevemos:

$$mgsen\theta - F_{at} = m\ddot{x}$$

Levando-se em conta a expressão para a força de atrito, a equação acima se escreve:

$$m\ddot{x}\left(1+\frac{I}{mR^2}\right) = mgsen\theta$$

Donde concluímos que:

$$a = gsen\theta\left(1+\frac{2}{5}\frac{mR^2}{mR^2}\right)^{-1}$$

Logo,

$$a = \frac{5}{7}gsen\theta$$