14 – Sistemas de Partículas

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 14.1

Considere a situação na qual temos duas partículas de massas m_1 e m_2 que interagem entre si por meio de uma força elástica aplicada a elas por uma mola que as interliga (vide figura 14.4). Admita que a constante elástica da mola (k) seja conhecida.

a) Discuta o movimento do centro de massa.

b) Descreva o movimento quando analisado em termos das coordenadas relativa, x e centro de massa R_x.

c) Escreva a solução geral do problema de duas partículas presas a uma mola.

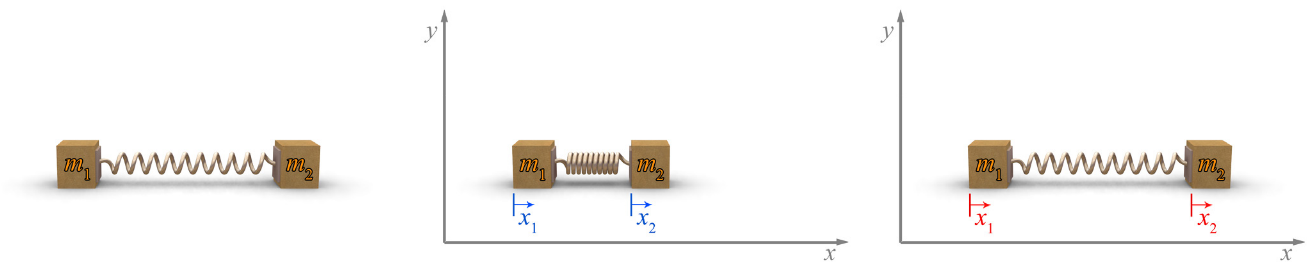

Figura 14.4: Um sistema de duas partículas interagindo entre si por meio de uma força elástica.

Resolução

As equações de movimento das partículas são:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k\left(x_1 - x_2\right)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k\left(x_2 - x_1\right)$$

Onde x_1 e x_2 são as coordenadas cartesianas associadas às partículas 1 e 2 respectivamente.

a) A posição do centro de massa é dada pela componente x do vetor centro de massa:

$$R_x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

As forças externas, Normal e Peso, agindo sobre as partículas de massa m_1 e m_2 se cancelam. Elas não têm componentes ao longo da direção do movimento (o eixo x). Assim, a equação de movimento do centro de massa, cuja posição é dada pela coordenada R_x é:

$$\frac{d^2 R_x}{dt^2} = 0$$

Da equação acima resulta que o centro de massa descreve um movimento retilíneo e uniforme, ou seja:

$$R_x = R_{x0} + V_{0x} t$$

Note-se que ele pode permanecer em repouso se sua velocidade inicial for nula ($V_{0x} = 0$).

b) A coordenada relativa e ($x = x_2 - x_1$) satisfaz a equação:

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Onde μ é a massa reduzida $\left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$. A solução para essa equação é do tipo Movimento Harmônico Simples, ou seja,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Onde A é a amplitude e φ_0 é a fase inicial. A frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Portanto, quando analisamos o movimento à luz da coordenada relativa percebemos que quando analisado à luz dessa coordenada o movimento é simples e descrito em termos de uma função harmônica.

c) A equação (14.10) se escreve, no caso unidimensional, assim:

$$x_1(t) = R_x(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x(t)$$

$$x_2(t) = R_x(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x(t)$$

Portanto a solução do problema de duas partículas interagindo entre si por meio de uma mola é:

$$x_1(t) = R_{0x} + V_{0x}(t) + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_2(t) = R_{0x} + V_{0x}(t) - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

A solução acima envolve quatro parâmetros (R_{0x}, V_{0x}, A e φ_0) os quais podem ser determinados a partir das condições iniciais ($x_1(0)$, $v_1(0)$, $x_2(0)$, $v_2(0)$). A relação entre esse conjunto de parâmetros é:

$$x_1(0) = R_{0x} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} A\cos\varphi_0$$

$$v_{1x}(0) = V_{0x} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \omega A sen\varphi_0$$

$$x_2(0) = R_{0x} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} A\cos\varphi_0$$

$$v_{2x}(0) = V_{0x} + \frac{m_1\omega}{m_1 + m_2} A sen\varphi_0$$

Exercício Resolvido 14.2

A figura 14.8 ilustra uma sequência de partículas de massas iguais alinhadas no plano xy.

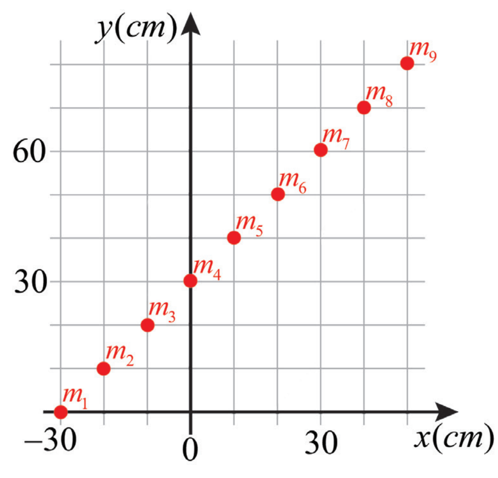

Figura 14.8 Uma distribuição discreta de partículas.

Adotando o referencial da figura, determinar a posição do centro de massa do sistema e mostre ainda que ele pertence ao segmento de reta na qual ocorre a distribuição de massas.

Resolução

Tendo em vista que todas elas estão no plano, devemos determinar a abcissa e ordenada do centro de massa. A abscissa do Centro de Massa é:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5 + m_6x_6 + m_7x_7 + m_8x_8 + m_9x_9}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9}$$

Sendo as massas iguais, pode-se escrever:

$$x_{CM} = \frac{m\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9\right)}{9m} = \frac{\left[-30 - 20 - 10 + 0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50\right]}{9}$$

$$= \frac{90}{9} = 10cm$$

Para a ordenada do Centro de Massa encontramos;

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{m\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right)}{9m}$$

$$y_{CM} = \frac{\left[0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80\right]}{9} = \frac{360}{9} = 40cm$$

Conclusão: O centro de massa do sistema coincide com a posição ocupada pela partícula $5m_5$, ou seja, $CM(10\,cm;\, 40\,cm)$.

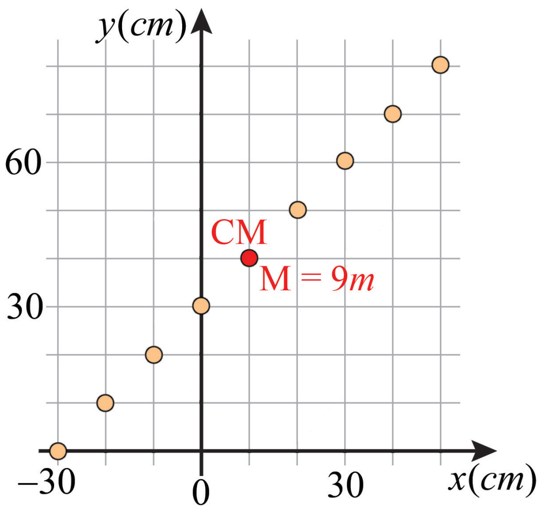

Figura 14.9 - O centro de massa de uma distribuição discreta de partículas.

A posição do *CM* destas 9 partículas de massas iguais estão alinhadas conforme ilustra a figura 14.9. É uma posição que coincide com a posição de uma delas, a partícula 5, e tem simetria linear pois antes do centro de massa existem 4 partículas e depois temos, igualmente, 4 partículas.

Problema Resolvido 14.3

Quatro partículas de duas massas m_1 e m_2 de $3\,kg$ e duas massas m_3 e m_4 de $2\,kg$ e se localizam no plano xy (plano $z = 0$). Inicialmente elas estão em pontos de um quadrado de lado cujo comprimento é $2m$. Três delas se encontram em repouso. A quarta partícula, de massa m_4 se move, a partir do instante $t = 0$, com velocidade $v(t)$ ao longo de eixo x. Admita que essa função seja conhecida. Ademais, adote o referencial indicado na figura 14.11.

a) Determine a posição do centro de massa em função do tempo. Obtenha a resposta no caso em que a velocidade seja constante.

b) Qual é a velocidade do centro de massa?

c) No caso de movimento uniforme com velocidade $v_0 = 4\,m/s$, qual é a posição do centro de massa no instante $t = 5s$?

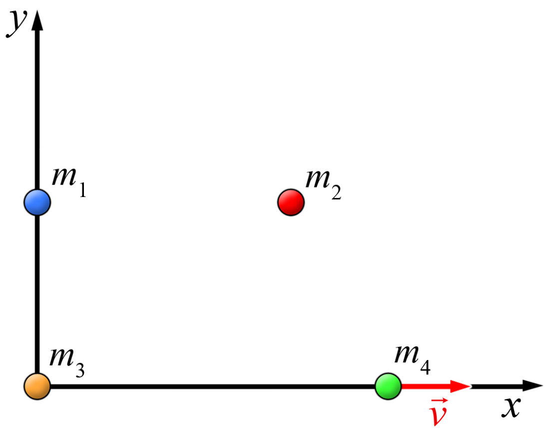

Figura 14.11 - Quatro partículas inicialmente localizadas nos vértices de um quadrado.

Resolução

a) No referencial adotado, as coordenadas das partículas são:

$$P_1(x_1, y_1) = P_1(0,2) \qquad P_2(x_2, y_2) = P_2(2,2)$$
$$P_3(x_3, y_3) = P_3(0,0) \qquad P_4(x_4, y_4) = P_4(x_4,0)$$

Assim, em função da coordenada x_4, as coordenadas do centro de massa são:

$$X_{CM} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4) = \frac{1}{M}(3\cdot 0 + 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 2\cdot x_4)$$
$$Y_{CM} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4) = \frac{1}{M}(3\cdot 2 + 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0)$$

Sendo, de acordo com os dados, $M = 3 + 3 + 2 + 2 = 10$.

Em função da coordenadas x_4 obtemos:

$$X_{CM} = \frac{1}{10}(6 + 2x_4) = \frac{1}{5}(3 + x_4)\,m$$
$$Y_{CM} = \frac{1}{10}(6 + 6) = \frac{6}{5}\,m$$

Tendo em vista que a partícula 4 se movimenta para a direita, a partir de $t = 0$, podemos escrever que, em metros, temos:

$$x_4(t) = 2 + \int_0^t v(t')dt'$$
$$X_{CM} = \frac{1}{5}\left(3 + 2 + \int_0^t v(t')dt'\right) = 1 + \frac{1}{5}\left(\int_0^t v(t')dt'\right)$$

b) A velocidade do centro de massa só tem a componente x. Assim,

$$V_x = \frac{dX_{CM}}{dt} = \frac{1}{5}\frac{dx_4}{dt}$$

Ou seja, a velocidade do centro de massa é de 1/5 da velocidade da partícula 4.

$$V_x = \frac{dX_{CM}}{dt} = \frac{1}{5}v(t)$$

c) nesse caso,

$$x_4(t) = 2 + V_x t = 2 + 4t$$

Portanto, a posição do centro de massa é tal que suas coordenadas dependem do tempo da seguinte forma:

$$X_{CM}(t) = \frac{1}{5}(3 + 2 + 4t) = 1 + \frac{4}{5}t$$

$$Y_{CM} = \frac{6}{5}m$$

A velocidade do centro de massa é constante e dada por:

$$V_x = \frac{dX_{cm}}{dt} = \frac{4}{5}\,{}^{m}\!/_{5}$$

A posição do centro de massa em instante $t = 5s$ é:

$$X_{CM}(5) = 1 + 4 = 5m$$

Exercício Resolvido 14.4

Um fio de massa M, é tal que o seu comprimento é igual a L. No entanto, ele é constituído de dois pedaços com densidades lineares distintas. O primeiro pedaço tem comprimento L_1, onde $L_1 = \alpha L$, e tem densidade λ_1. O segundo pedaço do fio tem comprimento L_2 e tem densidade λ_2.

Adotando o referencial da figura 14.13, determine a posição do centro de massa em função do comprimento L, das densidades lineares e da fração α.

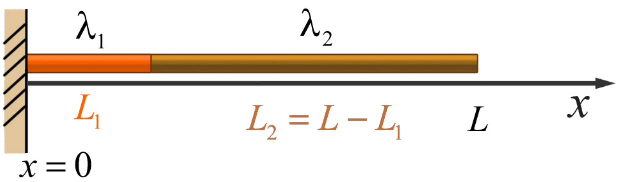

Figura 14.13 - Uma distribuição linear de massa não uniforme.

Resolução

Utilizamos a expressão para o centro de massa para uma distribuição linear e uniforme:

$$X_{CM} = \underbrace{\frac{\lambda_1}{M}\int_0^{L_1} dx\,x}_{primeiro\ fio} + \underbrace{\frac{\lambda_2}{M}\int_{L_1}^{L} dx\,x}_{segundo\ fio}$$

Lembrando que

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

Assim, após efetuar as integrais relevantes, obtemos

$$X_{CM} = \frac{\lambda_1 L_1^2}{2M} + \frac{\lambda_2}{2M}\left(L^2 - L_1^2\right)$$

Donde inferimos que a coordenada do centro de massa é dada pela soma;

$$X_{cm} = \frac{1}{2M}\left[\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)L_1^{\,2} + \lambda_2 L^2\right]$$

Como valem as seguintes relações,

$$L_2 = L - L_1 = (1-\alpha)L$$

$$M = \overbrace{\lambda_1 L_1}^{M_1} + \overbrace{\lambda_2 L_2}^{M_2} = L\left(\lambda_1\alpha + \lambda_2(1-\alpha)\right) = L\left(\lambda_2 + \alpha\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\right)$$

Podemos escrever o resultado acima como:

$$X_{cm} = \frac{L}{2}\frac{\left[\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\alpha^2 + \lambda_2\right]}{\left(\lambda_2 + \alpha\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\right)}$$

Exercício Resolvido 14.5

Determine o momento angular de um anel de raio R e massa M quando este executa um movimento de rotação com velocidade angular $\omega\left(\vec{\omega} = \vec{k}\omega\right)$ em torno do seu eixo.

Determine o momento de um elemento infinitesimal de massa localizado num ponto cujo vetor posição é:

$$\vec{r} = R\vec{e}_\rho$$

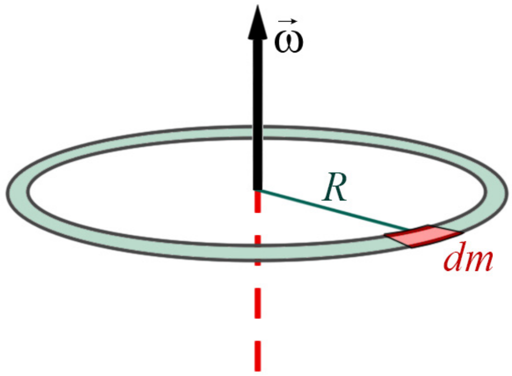

Figura 14.14 – Determinando o momento angular de um anel quando efetuamos uma rotação em torno do eixo z, o eixo de simetria do anel.

Resolução

A velocidade vetorial desse elemento infinitesimal de massa dm, é dada por:

$$\vec{v} = \omega R\vec{e}_\varphi$$

Portanto, o momento angular desse elemento infinitesimal é:

$$d\vec{L} = dm\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times dm\vec{v} = dm\omega R^2 \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi$$

Logo,

$$d\vec{L} = dmR^2\omega\vec{k}$$

Mas,

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{k}$$

Assim, o momento angular do anel é dado pela soma:

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = R^2 \omega k \int dm$$

No entanto, a soma das massas associadas aos elementos infinitesimais de massa resulta ser a massa total do anel;

$$\int dm = M$$

Onde M é a massa do anel. Obtemos, assim que o momento angular do anel girante em torno do eixo z é:

$$\vec{L} = \left(MR^2\right)\vec{\omega}$$

Exercício Resolvido 14.6

Determine a energia mecânica das duas partículas de massa m_1 e m_2 que interagem entre si por meio de uma mola cuja constante elástica é k. Essa situação é ilustrada na figura 14.1.

Resolução

A energia mecânica de duas partículas que se movem numa reta e cuja energia potencial de interação e dada por $U(x_1 - x_2)$ é:

$$E = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1 \dot{x}_2^2}{2} + U\left(x_1 - x_2\right)$$

Nesse caso:

$$U\left(x_1 - x_2\right) = \frac{k}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2$$

É fácil verificar que, se definirem as novas variáveis relativas e centro de massa:

$$x = x_1 - x_2$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

Ou seja,

$$x_1 = x_{cm} + \frac{m_2 x}{M}$$

$$x_2 = x_{cm} - \frac{m_1 x}{M}$$

Então, é fácil verificar que

$$\frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1 \dot{x}_2^2}{2} = \frac{M \dot{x}_{cm}^2}{2} + \frac{\mu \dot{x}^2}{2}$$

Portanto considerando as duas coordenadas relativa o centro a energia mecânica envolve dois termos:

$$E = \frac{M \dot{x}_{cm}^2}{2} + \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2}$$

O primeiro termo é a energia cinética do centro de massa. O segundo termo é associado à energia do oscilador harmônico discutido no exercício resolvido (14.1).