# 10 – Trabalho e Variação da Energia Elétrica

## Exercícios Resolvidos

### Exercício Resolvido 10.1

Aplica-se uma força constante, $\vec{F}$, tal que sua representação vetorial é:

$$\vec{F} = 10\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \quad (Newtons)$$

Onde as componentes são expressas em Newtons. Ela é utilizada para deslocar um objeto que estava num ponto A até ele atingir um ponto B. Esses pontos têm coordenadas (determinadas em metros) dadas por:

$$A(1,0,0) \;\; e \;\; B(0,1,-2) \quad (metros)$$

Determine o trabalho realizado por essa força nas duas representações.

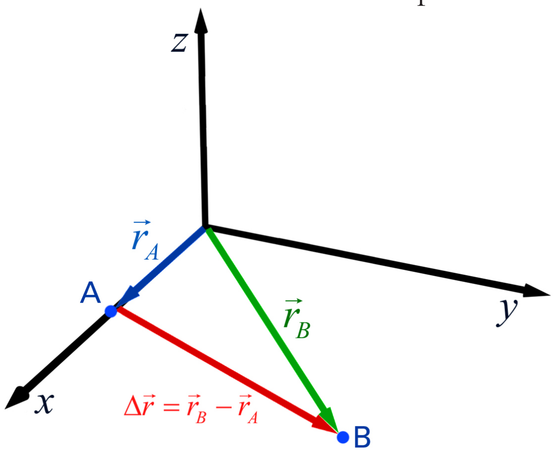


Figura 10.5 - Trabalho entre dois pontos indicados por meio de vetores.

### Resolução

a) Trabalho calculado na representação analítica de vetores.
Nesta representação,

$$W_A^B = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - r_A) = F_x(x_B - x_A) + F_y(y_B - y_A) + F_z(z_B - z_A)$$

Nesse caso, o vetor deslocamento entre os dois pontos é

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = -\vec{i} + \vec{j} - 2k$$

Portanto:

$$W_A^B = (10)(-1) + 5(1) + 2(-2) = -9Nm = -9J$$

b) Na representação geométrica, temos, por definição:

$$W_A^B = |\vec{F}||\vec{\Delta r}|\cos\theta$$

Os módulos do vetor força e do vetor deslocamento são:

$$|\vec{F}| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{129}N$$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}m$$

O ângulo entre os vetores é dado pelo produto escalar:

$$\cos\theta = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \cdot \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|}$$

Que, nesse caso, nos leva ao resultado

$$\cos\theta = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \cdot \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|} = \frac{-9}{\sqrt{129}\ \sqrt{6}}$$

Portanto:

$$W_A^B = -9J$$

## Exercício Resolvido 10.2

Considere o problema de calcular a integral de linha de uma força não constante ao longo de uma linha reta passando pela origem (vide Figura 10.11).

a) Escreva a equação para métrica dessa reta em termos do parâmetro λ.

b) Escreve uma expressão para o trabalho realizado por uma força $\vec{F}$.

c) Determine o trabalho realizado pela força

$$\vec{F} = 5xy\vec{i} + 2z^2\vec{j} + y\vec{k},$$

quando a partícula se move entre os pontos:

$$A(1,2,5) \text{ e } B(2,4,10)$$

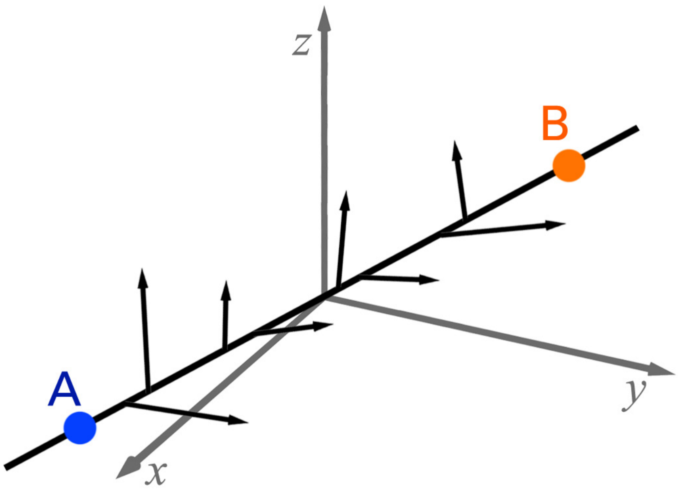


Figura 10.11 Determinando o trabalho quando a partícula se move ao longo de uma linha reta.

### Resolução

a) A equação de uma reta passando pela origem é:

$$\begin{aligned} x &= a\lambda & \Rightarrow \quad dx &= a d\lambda \\ y &= b\lambda & \Rightarrow \quad dy &= b d\lambda \\ z &= c\lambda & \Rightarrow \quad dz &= c d\lambda \end{aligned}$$

Assim, $\lambda_A$ e $\lambda_B$ são tais que

$$\begin{aligned} x_A &= a\lambda_A & x_B &= a\lambda_B \\ y_A &= b\lambda_A & y_B &= b\lambda_B \\ z_A &= c\lambda_A & z_B &= c\lambda_B \end{aligned}$$

Portanto,

$$d\vec{r} = d\lambda\left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right)$$

b) O trabalho, portanto, quando a partícula se desloca ao longo de uma reta é dado, de acordo com (10.24) pela integral envolvendo o parâmetro λ,

$$W = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B}\left(aF_x\left(\lambda\right) + bF_y\left(\lambda\right) + cF_z\left(\lambda\right)\right)dx$$

Nesse caso, temos:

$$F_x\left(\lambda\right) = 5xy = 5ab\lambda^2$$
$$F_y\left(\lambda\right) = 2z^2\left(\lambda\right) = 2c^2\lambda^2$$
$$F_z\left(\lambda\right) = y\left(\lambda\right) = b\lambda$$

c) Assim, o trabalho realizado por essa força quando se vai de um ponto A até um ponto B ao longo da reta é dado pela integral:

$$W = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda\left[a\left(5ab\lambda^2\right) + b2\left(c\lambda\right)^2 + c\left(b\lambda\right)\right]d\lambda$$

Cujo resultado é:

$$W = a\left(5ab\right)\frac{\lambda^3}{3}\Bigg|_{\lambda_A}^{\lambda_B} + b\left(c^2\right)\frac{\lambda^3}{3}\Bigg|_{\lambda_A}^{\lambda_B} + c\left(b\right)\frac{\lambda^2}{2}\Bigg|_{\lambda_A}^{\lambda_B}$$

Ou seja,

$$W = \frac{5a^2b + bc^2}{3}\left(\lambda_B{}^3 - \lambda_A{}^3\right) + \frac{cb}{2}\left(\lambda_B{}^2 - \lambda_A{}^2\right)\Bigg|$$

Por outro lado, podemos tomar $\lambda_A = 1$. O que pode ser feito fazendo:

$$a = 1 \quad b = 2 \quad \text{e} \quad c = 5$$

Isso nos leva a $\lambda_B = 2$.
Portanto, em Joules, o valor do trabalho é:

$$W = \frac{10 + 2\left(5^2\right)}{3}\left(2^3 - 1^3\right) + \frac{10}{2}\left(2^2 - 1^2\right) = 140 + 15 = 155\ J$$

## Exercício Resolvido 10.3

Calcule o trabalho realizado por uma força dita central, a qual nesse caso se escreve como:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = k\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{k}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Quando a partícula se desloca entre dois pontos A e B localizados a distâncias $r_A$ e $r_B$ da origem.

### Resolução

O cálculo do trabalho para forças centrais, ou seja, forças da forma geral:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = F\left(r\right)\frac{\vec{r}}{r}$$

É bastante simples. E isso é bem ilustrado por esse exemplo.

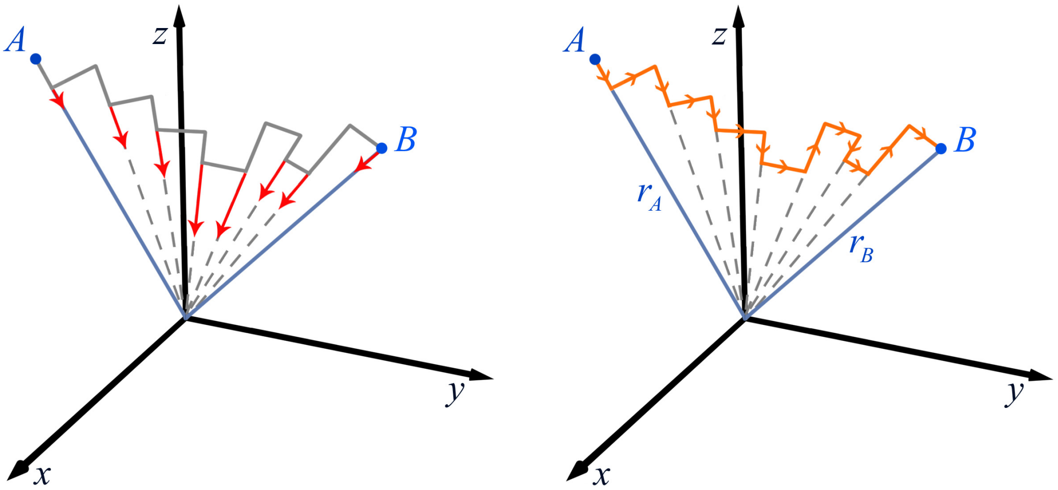


Figura 10.12 - Só deslocamento ao longo da direção radial contribuem para o trabalho realizado por forças centrais, pois a força aponta sempre para o centro ou no sentido oposto.

O trabalho realizado pela força é dado pela integral:

$$\tau_A^B = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = k\int_A^B \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\vec{dr}$$

Ao ir do ponto A até o ponto B, só os deslocamentos na direção radial, determinados pela condição:

$$\vec{dr} = dr\frac{\vec{r}}{r}$$

Irão contribuir para o trabalho realizado pela força central. Ou seja, todos os demais deslocamentos, por serem transversais darão uma contribuição nula vide figura. E esse fato não depende do tamanho dos deslocamentos.  Pequenos ou grandes deslocamentos transversais não contribuirão. Assim,

$$\vec{F}.\vec{dr} = k\frac{1}{r^2}dr$$

Portanto, o trabalho só envolve o cálculo de deslocamentos ao longo da direção radial. Assim, temos:

$$\tau_A^B = k\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{k}{r}\bigg|_A^B = \frac{k}{r_A} - \frac{k}{r_B}$$

Ou seja, o trabalho só depende das distâncias desses pontos, $r_A$ e $r_B$ até a origem. Ele não depende do caminho para irmos do ponto $A$ até o ponto $B$. De acordo com a Lei da gravitação universal, no caso da força gravitacional entre objetos esféricos de massas $M_1$ e $M_2$ a constante  depende dessas massas;

$$k = -GM_1M_2$$

No entanto, no caso de cargas elétricas   essa constante é dada, no SI, pela expressão

$$k = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o}$$

## Exercício Resolvido 10.4

Determine o trabalho realizado pela força elástica quando o móvel se movimenta entre os pontos denominados $x_1$ e $x_2$ os pontos da extremidade.

## Resolução

No caso da força elástica, $F(x) = -\,kx$, o gráfico da força $F(x)$ é aquele associado a uma reta. O trabalho realizado pela força elástica é dado, basicamente, pela área do triângulo tracejado na figura (10.14). Dependendo de realizar o trabalho numa ou noutra direção, ele será dado ou pela área ou pela área precedida pelo sinal menos.

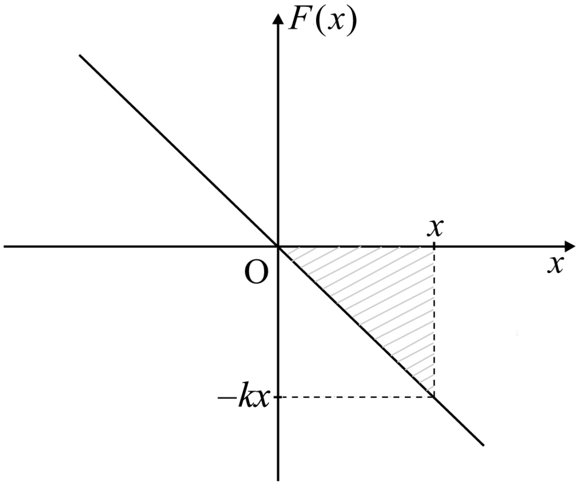


Figura 10.14 - Gráfico da força elástica.

De acordo com a definição, o trabalho realizado pela força quando do deslocamento da partícula entre os pontos denominados $x_1$ e $x_2$, é dado pela integral:

$$W_{x_1 \to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx.$$

A última integral pode ser realizada de duas formas equivalentes. Na primeira, integramos a função linear, cuja função primitiva é uma função quadrática. Obtemos, assim,

$$-k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} = -k\left[\frac{x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2}}{2}\right].$$

Na segunda forma, basta observar que a integral envolve áreas de triângulos. Deve-se tomar cuidado, no entanto, em relação aos sinais. Por isso, é sempre preferível efetuar a integração direta. Como resultado, obtemos que o trabalho realizado pelas forças elásticas é dado pela expressão:

$$W_{x_1 \to x_2} = -\frac{k}{2}\left(x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2}\right).$$

## Exercício Resolvido 10.5

Uma bala de massa $m = 8 \times 10^{-3}\,kg$ é ejetado de um fuzil com velocidade $v = 720\,m/s$.

a) Qual a energia cinética da bala?

b) Compare essa energia com outras necessárias para realizar atividades corriqueiras, como erguer um litro de água mineral ao longo de 1 metro.

c) Se um trabalhador utilizar 1 Kcal da sua energia durante uma hora, energia essa extraída dos alimentos, quantas vezes ele conseguiria elevar um galão de 10 litros do chão até a carroceria de um caminhão localizada a um metro de altura durante esse tempo?

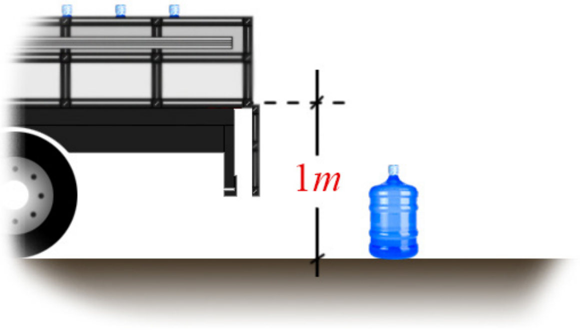


Figura 10.16 - Qual é a energia necessária para levantar um galão de 10 litros de água a uma distância de 1 $m$, na vertical?

## Resolução

a) Energia cinética da bala

Conforme a definição, a energia cinética da bala é:

$$E_c = (1/2)mv^2 = (1/2)(8\times10^{-3}kg)(720m/s)^2 = (1/2)(8\times10^{-3}kg)(720m/s)^2\left[kg\cdot m^2/s^2\right]$$

Portanto, a energia cinética da bala é

$$E_c = (1/2)(8\times10^{-3}kg)(720m/s)^2\left[kg\cdot m^2/s^2\right] = 2.074J$$

onde $J = kg(m^2/s^2)$, unidade de energia no Sistema Internacional (SI) de Unidade.

b) Comparação

Vamos comparar com um evento no cotidiano. Adotando-se $g = 10\,m/s^2$, a tarefa de erguer um litro de água mineral na direção vertical, e ao longo de uma distância de 1 $m$, exige uma quantidade de energia igual a $E = mgh = 10\,J$.

O que pode fazer uma energia igual a $2.074\,J$? Ela corresponde à tarefa de erguer a massa de 207 litros de água, de uma só vez, ao longo de 1 $m$ de altura!

c) A energia necessária para erguer um galão de 10 litros a uma distância de 1 metros é, em calorias (outra unidade de energia utilizada no cotidiano):

$$100J = \frac{100}{4{,}18}calorias \cong 25\ cal$$

Portanto, utilizando 1 Kcal (que é uma pequena fração da energia que o corpo humano gera ao longo do dia), ele poderia erguer o referido galão cerca de 40 vezes.

## Exercício Resolvido 10.6

Determine o trabalho realizado pela força gravitacional.

## Resolução

Como a força da gravidade nas proximidades da superfície terrestre é uma força constante, o trabalho realizado por ela será dado pela expressão:

$$W_{A\to B} = \int_\Gamma m\vec{g}\cdot d\vec{r}.$$

O trabalho realizado pela força gravitacional, admitida constante é dado, assim, pela expressão:

$$W_{A\to B} = m\vec{g}\Delta\vec{r} = m\vec{g}\cdot\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right).$$

Expressão essa que é válida, ademais, para qualquer força constante.

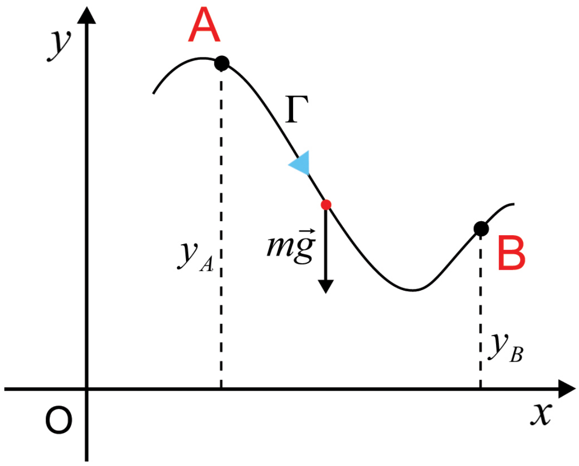


Figura 10.18 - O trabalho da força gravitacional depende só das coordenadas dos pontos A e B.

Escolhendo o eixo $y$ ao longo da aceleração de gravidade e orientando o eixo $y$ no sentido contrário ao da gravidade (veja figura 10.18), verifica-se que o trabalho pode ser determinado como função apenas das coordenadas $y$ dos pontos A e B. Ou seja:

$$W_{A \to B} = mg\left(y_A - y_B\right).$$

Observe que o trabalho depende apenas da variação da altura (dada pela coordenada $y$). Isso ocorre porque deslocamentos na direção horizontal dão contribuição nula para o trabalho, pois a força de gravidade é perpendicular a esses deslocamentos.