06 – As Leis de Newton

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 6.1

Dois carrinhos A e B encontram-se em repouso num piso horizontal. O carrinho A, vazio, tem massa $m = 20\,kg$; o carrinho B, com mercadorias, tem massa total $80\,kg$. Considere o caso em que uma força horizontal constante e de módulo $|\vec{F}| = 100\,(\text{N})$ é aplicada em cada um dos carrinhos, empurrando-os para frente (direção tomada como a do eixo $0x$). Dado que essa força, conforme mostra a Figura 6.7, é aplicada com duração tal que o intervalo de tempo é $\Delta t = 0{,}1s$, determinar, admitindo nulos os atritos nas rodinhas:

a) a aceleração resultante em cada carrinho.

b) a velocidade de cada carrinho após a impulsão inicial.

Resolução:

Independentemente da força $\vec{F}$, duas outras forças agem sobre cada um dos carrinhos: a força peso $(\vec{p})$ e a força de reação normal $(\vec{N})$ resultante da ação do piso sobre as rodas do carrinho.

Os DCLs abaixo representam os carrinhos miniaturizados e as forças aplicadas.

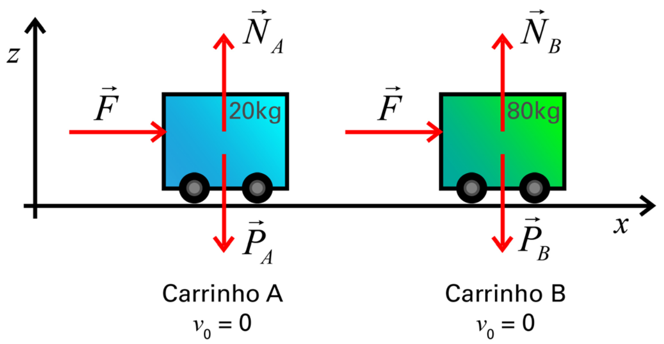

Figura 6.7: DCLs dos carrinhos.

Aplicando a 2ª Lei de Newton para qualquer um dos carrinhos, escrevemos:

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Em termos de componentes:

$$\sum F_x = P_x + N_x + F_x = m \cdot a_x \quad (\text{I})$$
$$\sum F_y = P_y + N_y + F_y = m \cdot a_y \quad (\text{II})$$
$$\sum F_z = P_z + N_z + F_z = m \cdot a_z \quad (\text{II})$$

Podemos sempre escolher um referencial cartesiano de tal forma que o eixo $0x$ esteja na mesma direção e mesmo sentido da força $\vec{F}$ (veja o DCL). Para essa escolha de referencial, temos $F_z = F_y = 0$ e $F_x = F$ (onde F é a intensidade de $\vec{F}$). As forças $\vec{N}$ e $\vec{p}$ só têm componentes não nulas ao longo do eixo z. Portanto, $P_z = P_y = 0$ e $N_x = N_y = 0$, ao passo que $P_z = -P_y$ e $N_z = N$.

Substituindo esses valores nas equações (I), (II) e (III), encontramos:

$$\sum F_x = 0 + 0 + F = m \cdot a_x \rightarrow +F = m \cdot a_x \qquad (IV)$$
$$\sum F_y = 0 + 0 + 0 = m \cdot a_y \rightarrow 0 = m \cdot a_y \qquad (V)$$
$$\sum F_z = -P + N + 0 = m \cdot a_z \rightarrow -P + N = m \cdot a_z \qquad (VI)$$

Não ocorre movimento na direção do eixo 0z (os carrinhos estão em equilíbrio na direção vertical); logo, nessa direção, a aceleração é nula, ou seja, $A_z = 0$. Nessas condições inferimos da equação (VI), que:

$$-P + N = 0 \Rightarrow N = P$$

a) A aceleração de cada carrinho, em virtude da ação da força $\vec{F}$, é obtida da equação (IV):
Para o carrinho B, mais pesado, obtemos para sua aceleração:

$$100\ Newtons = (80kg)a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = (100N)/(80kg) = 1,25m/s^2$$

Enquanto, para o carrinho A, temos:

$$100\ Newtons = (20kg)a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = (100N)/(2kg) = 5m/s^2$$

b) Enquanto perdurar a ação da força $\vec{F}$, as acelerações dos carrinhos são constantes; portanto, a equação da velocidade de cada carrinho, é da forma :

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{onde, no caso, } v_{0x} = 0$$

Equação horária da velocidade de cada carrinho	
Carrinho A	Carrinho B
$v_{Ax}(t) = 5t$ $para\ (0 < t \le 0,1s)$	$v_{Bx}(t) = 1,25t$ $para\ (0 < t \le 0,1s)$

Ao cabo de 0,1 s (tempo que dura a ação de $\vec{F}$), a velocidade de cada carrinho é dada por:

- Carro B:

$$v_{Bx}(t = 0,1) = 0 + 1,25(0,1) = 0,125m/s$$

- Carro A:

$$v_{Ax}(t = 0,1) = 0 + 5(0,1) = 0,5m/s$$

Conclusão: Forças de mesma intensidade aplicadas em diferentes corpos produzirão, se exercidas isoladamente, acelerações inversamente proporcionais às respectivas massas. Quanto maior for a massa do corpo, tanto menor será sua aceleração.

Exercício resolvido 6.2:

Considere um carrinho com massa total $m = 30\,kg$ em repouso no piso horizontal de um supermercado. Ele recebe a ação de uma força impulsiva constante F = 1.100 newtons, cuja duração é $\Delta t = 0,2\,s$; a sua linha de ação faz com a horizontal um ângulo $\theta = 37°$ abaixo da horizontal, conforme ilustra a Figura 6.9.

A força de atrito que se opõe ao movimento é constante e tem intensidade fat = 160 newtons. Adotando-se $g = 10\,m/s^2$; cos37° = 0,8 e sen37° = 0,6, determine:

a) a aceleração nos primeiros 0,2 segundos do movimento.

b) a velocidade e a distância percorrida pelo carrinho nos primeiros 0,2s.

Figura 6.9: Movimento do carrinho de compra.

Resolução:

Primeiramente, vamos desenhar o DCL do carrinho para os primeiros 0,2 segundos, intervalo no qual atua a força $\vec{F}$. Onde DCL é o diagrama de forças externas que agem sobre o corpo em destaque na figura (6.9).

a) Determinação da aceleração do carrinho nos primeiros $0{,}2\,s$.

Admitiremos, ao esboçar o DCL, que:

I. as linhas de ação das forças pertencem a um mesmo plano vertical;

II. o carrinho será considerado como um ponto material de massa m.

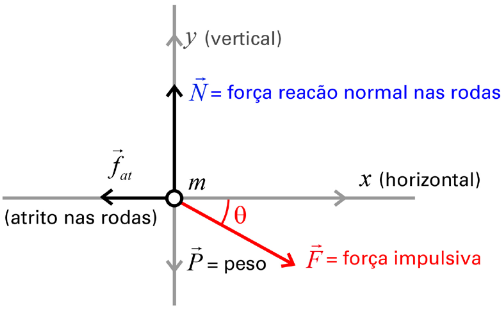

Figura 6.10: DCL - Diagrama esquematizando as forças sobre o carrinho durante os dois primeiros $0{,}2\,s$.

De acordo com a 2ª Lei de Newton, aplicada às quatro forças agindo sobre o carrinho, obtemos as seguintes equações para as componentes dos eixos $0x$ e $0y$:

$$m \cdot a_x = \sum \text{Forças}_x = F_x + P_x + N_x + f_{at_x} = F\cos\theta + 0 + 0 - f_{at} \quad (\text{I})$$
$$m \cdot a_y = \sum \text{Forças}_y = F_y + P_y + N_y + f_{at_y} = -F\,\text{sen}\,\theta - mg + N + 0 \quad (\text{II})$$

Substituindo-se os valores dados no enunciado do problema na equação (I), obtemos:

$$(30\ kg)\,a_x = (1.100\ newtons)\cos 37^{\circ} - 160\ newtons = 720\ newtons$$

daí inferimos que

$$a_x = \frac{720 \text{ newtons}}{30 \text{ kg}} = 24\ \text{m/s}^2$$

Tendo em vista a ausência de movimento na vertical, concluímos que $a_y = 0$. Portanto, para $0 \le t \le 0{,}2\,s$, a aceleração do carrinho é $24\,m/s^2$ na direção horizontal e no sentido da força.

b) Determinação da velocidade e da distância percorrida ao cabo de $0{,}2\,s$.

Enquanto a força $\vec{F}$ atuar, a aceleração do carrinho terá apenas uma componente x dada por $a_x = 24\,m/s^2$. Tendo em vista que, inicialmente, o carrinho se encontrava em repouso ($v_{0x} = 0$), a componente x da velocidade depende do tempo da seguinte forma:

$$v_x = 24t$$

onde a velocidade é expressa em m/s e tempo em segundos. Portanto, ao cabo de $0{,}2\,s$, a velocidade do carrinho será: $v_x = 4{,}8\,m/s$.

Para calcular a distância percorrida, vamos nos valer da equação do espaço x para uma força (ou aceleração) constante:

$$x = x_0 + v_{0x}t + (1/2)at^2$$

As condições iniciais (para $t = 0$) são: $x_0 = 0$ e $v_{0x} = 0$; portanto, a equação da coordenada x se escreve:

$$x(t) = 0 + 0 \cdot t + (1/2)24t^2 = 12t^2$$

ou seja, para x em metros e t em segundos, obtemos:

$$x(t) = 12t^2$$

Logo, para $t = 0{,}2\,s$, segue-se da equação acima que $x(0{,}2) = 12(0{,}2)^2 = 0{,}48\,m$ ($48\,cm$). Nessas condições, a distância percorrida pelo carrinho será de $0{,}48\,m$.

Exercício resolvido 6.3:

Uma mola tem uma extremidade fixada num suporte rígido; a outra extremidade é puxada por um garoto (figura 6.15).

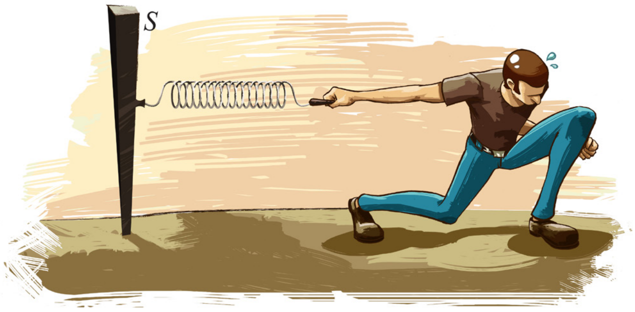

Figura 6.15: Força aplicada sobre a mola.

a) Desenhe as forças de ação e reação na interação "mão-mola".

b) As forças de ação e reação equilibram um corpo?

Resolução:

a) No esquema da Figura 6.16, estão ilustradas as forças de ação (força da mão puxando a mola) e de reação (força da mola puxando a mão em sentido contrário). Elas são representadas pelos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, respectivamente.

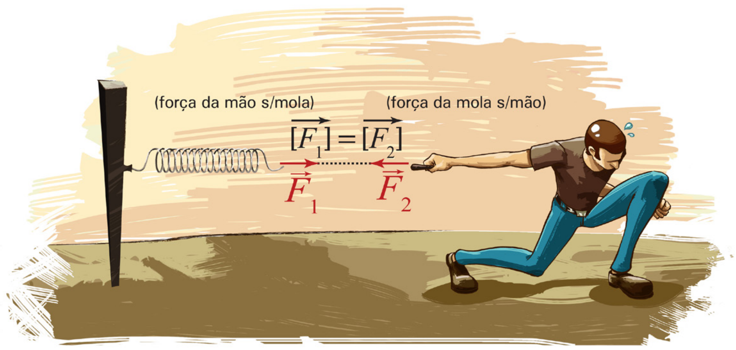

Figura 6.16: Força aplicada sobre a mola e a força de reação aplicada à mão.

b) Essas forças, apesar de possuírem a mesma direção e mesma intensidade têm sentidos opostos, não podem ser utilizadas para equilibrar um corpo, pois elas atuam em corpos diferentes.

Exercício resolvido 6.4

a) Determinar a aceleração de uma partícula de massa m em Movimento Circular Uniforme – MCU – de raio R.

b) Qual a força resultante sobre a Lua (massa = M) supondo que ela executa um MCU de raio R e velocidade orbital v?

Resolução:

a) Aceleração no MCU.

No movimento circular uniforme – MCU –, uma partícula movimenta-se ao longo de uma trajetória circular de raio R com velocidade $\vec{v}$ de tal sorte que o seu módulo ($|\vec{v}| = v$) é constante. O vetor velocidade, por ser sempre tangencial à trajetória, é um vetor perpendicular à direção radial que, com origem no centro, passa pela posição na qual se encontra a partícula.

A Lua, por exemplo, executa um movimento aproximadamente circular e uniforme, cuja órbita circular tem centro coincidente com o da Terra.

O esquema da Figura 6.17 representa uma partícula em movimento circular uniforme, cuja órbita (trajetória fechada) de raio R está contida no plano β.

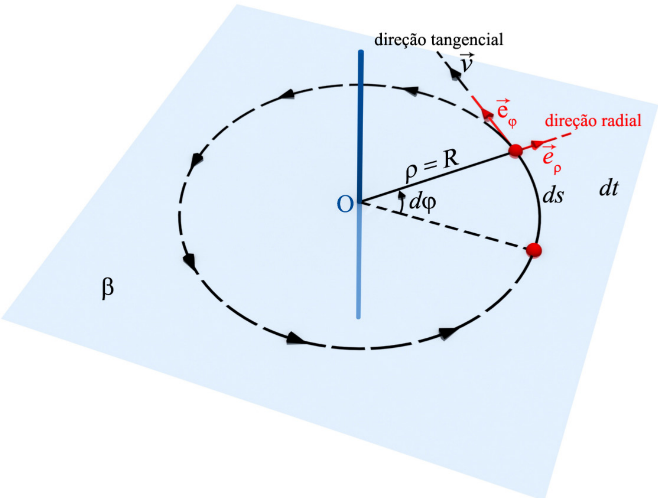

Figura 6.17: $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$ são os versores na direção radial e tangencial à circunferência.

- Velocidade tangencial

Se no intervalo de tempo infinitesimal dt a partícula percorrer o arco dS (visto ampliado na Figura 6.17), a sua velocidade escalar será $v = \dfrac{dS}{dt}$; o vetor velocidade $\vec{v}$ será tangencial à circunferência.

- Velocidade angular

O vetor com origem no centro e extremidade na partícula (o vetor posição) realiza, durante o mesmo intervalo de tempo, um deslocamento angular $d\varphi$. Define-se $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, como a velocidade angular da partícula que corresponde à taxa de variação instantânea da variável angular φ.

- Relação entre v e φ.

A razão entre o arco de circunferência (dS) e o raio (R) define o ângulo $d\varphi$ em "radianos" – símbolo rad – uma unidade de medida derivada do Sistema Internacional de Unidades. Assim, $dS/R = d\varphi$, donde $dS = d\varphi R$.

Dividindo-se ambos os membros por dt, tem-se o seguinte: $\frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R$. Ou seja,

$$v = \omega R$$

Vamos desenvolver agora os passos para a determinação da aceleração de uma partícula em MCU. Vamos usar um sistema de coordenadas polares caracterizadas pelos versores $\vec{e}_\rho$ (na direção radial) e $\vec{e}_\varphi$ (na direção tangencial ou perpendicular à direção radial).

1) O vetor posição que localiza a partícula é $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho$. No caso do movimento circular $\rho = R$ e, portanto, o vetor posição pode ser expresso como: $\vec{r} = R\vec{e}_\rho$. Apesar de R ser constante, o vetor $\vec{r}$ varia com o tempo em virtude de o versor $\vec{e}_\rho$ mudar de direção à medida que o tempo passa.

2) A velocidade da partícula é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R \cdot \vec{e}_\rho\right) = \frac{d\left(R\right)}{dt}\vec{e}_\rho + R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = 0 + R \cdot \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Levando-se em conta que $d = d\varphi/dt$ a velocidade vetorial da partícula é dada pela expressão:

$$\vec{v} = \left(\omega R\right)\vec{e}_\varphi$$

Lembramos que o versor $\vec{e}_\varphi$ na expressão acima é sempre perpendicular à direção radial, assegurando assim que a direção de $\vec{v}$ será tangencial à circunferência. Essa velocidade é também denominada "velocidade orbital".

3) Apesar de o módulo da velocidade orbital da partícula ser constante, ela muda continuamente de direção. Isso significa que o vetor velocidade $\vec{v}$ no MCU é variável. Portanto, uma partícula em MCU tem aceleração. Vamos calculá-la. Para isso derivamos o vetor velocidade com respeito ao tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega R\vec{e}_\varphi\right) = \left(\omega R\right)\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_\varphi\right) = \left(\omega R\right)\left[-\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho\right] = -\left(\omega R\right)\omega\left[\vec{e}_\rho\right]$$

Donde inferimos que a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{e}_\rho = -\left[v/R\right]^2 R\vec{e}_\rho = -\left[v^2/R\right]\vec{e}_\rho$$

Das expressões acima concluímos que:

1. O módulo da aceleração é $a = \omega^2 R = v^2/R$.
2. A direção da aceleração é radial (direção do versor $\vec{e}_\rho$), ou seja, da reta que passa pelo centro da circunferência e pela partícula;
3. O sinal negativo indica que o vetor $\vec{a}$ é oposto ao versor $\vec{e}_\rho$. Portanto, a aceleração no MCU é um vetor dirigido para o centro da órbita circular. Por isso, essa aceleração é também conhecida como aceleração centrípeta (centrípeta – que busca o centro).

b) A força resultante sobre a Lua

A Lua praticamente executa MCU ao redor da Terra. Por possuir MCU, a Lua tem aceleração $\vec{a} = -\left[v^2 / R\right]\vec{e}_\rho$. Portanto,

$$\vec{F}_{\text{Lua}} = m \cdot \vec{a} = -\left[m \cdot v^2/R\right]\vec{e}_\rho$$

Como a Lua percorre uma circunferência de raio $R = 384.000\,km$ em $T = 27$ dias + 8 horas, aproximadamente, a sua velocidade orbital será $v = (2\pi R)/T = 1.020\,m/s$. Sendo $M = 7{,}35 \times 10^{22}\,kg$ a massa da Lua, tem-se:

$$\vec{F}_{\text{Lua}} = -\left[m \cdot v^2/R\right]\vec{e}_\rho = -\left[\left(7{,}35\times10^{22}\,\text{kg}\right)\cdot\left(1.020\ \text{m/s}\right)^2/\left(384\times10^6\,\text{m}\right)\right]\vec{e}_\rho$$
$$\vec{F}_{\text{Lua}} \cong -\left[20\times10^{19}\right]\vec{e}_\rho\ \ (\text{newtons})$$

A força resultante $\vec{F}_{\text{Lua}}$ é a força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua. Na sua ausência, a Lua seguiria em movimento retilíneo e de acordo com alei da inércia, e sem forças externas para influir no seu movimento, mantendo a sua velocidade constante e dada por $v = 1.020\,m/s$. Ademais, podemos prever que a força gravitacional exercida sobre a Lua é atrativa, uma vez que ela aponta para o centro da Terra (o sinal negativo significa isso).

Exercício resolvido 6.5:

Um disco (indicado na Figura 6.18 pela letra B) tem massa $m = 2\,kg$. Ele é posto em MCU de raio R = 0,5 m sobre uma plataforma horizontal sem atrito, com velocidade escalar constante $v = 1\,m/s$.

Ele é mantido em trajetória circular devido à força tensora do fio – leve e flexível – em cuja extremidade pende um objeto A, que permanece no mesmo nível acima do solo (nem sobe nem desce). Adotar $g = 10m/s^2$.

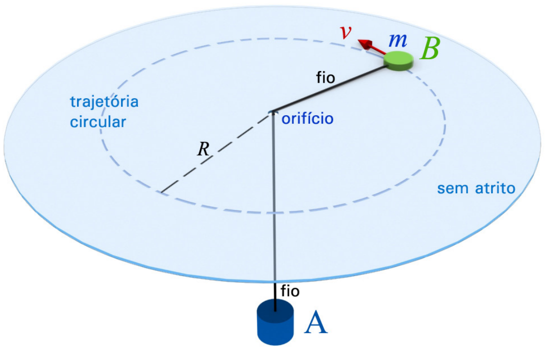

Figura 6.18: Disco B em MCU em cima de uma plataforma horizontal.

a) O que ocorre se o fio se romper?

b) Qual o peso do objeto A?

Resolução:

a) A Figura 6.19 ilustra o que ocorre ao movimento do disco com o rompimento do fio.

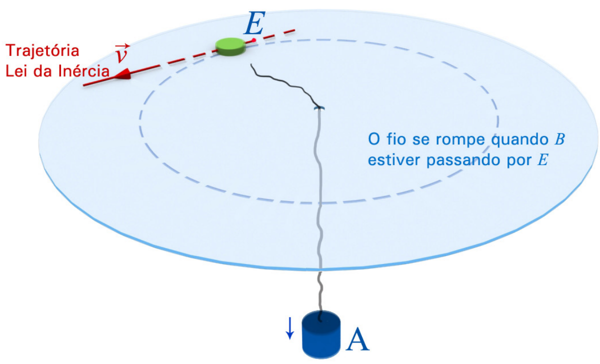

Figura 6.19: Se o fio se rompe, a força centrípeta deixa de existir; o bloco escapa com velocidade constante numa direção tangencial à sua órbita.

Na ausência de força resultante sobre o disco, o seu movimento, conforme a 1ª Lei de Newton, passa a ser MRU (movimento retilíneo uniforme).

b) Para determinar o peso do objeto pendurado na extremidade do fio que pende do centro do disco, devemos aplicar a 2ª Lei de Newton. Para isso, faz-se necessário conhecer as forças que atuam sobre o disco.

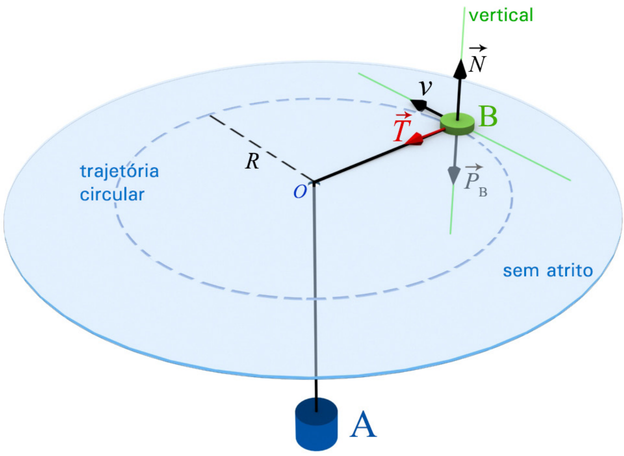

Figura 6.20: DCL do disco. A força normal e o peso se equilibram. A força resultante é a força tensora.

Como o disco B se movimenta sobre a plataforma horizontal, as forças na vertical se equilibram. Nota-se, assim, que a força normal é equilibrada pelo seu peso. Escrevemos $N = P_B$. A força tensora T, por sua vez, é a única força não equilibrada que atua sobre o disco. Escrevemos a força resultante sobre o disco como:

$$\sum \vec{F}_{\text{disco}} = \vec{T} + \vec{P}_{\text{B}} + \vec{N} = \vec{T}$$

onde, como sabemos $\vec{P}_B + \vec{N} = 0$. Assim, aplicando-se a 2ª Lei de Newton, e lembrando o resultado do Exemplo 04, escrevemos:

$$\sum \vec{F}_{\text{disco}} = m\vec{a} = -\left(mv^2/R\right)\vec{e}_\rho$$

Portanto, a aceleração do disco é a aceleração centrípeta. Sendo, ademais, $\sum \vec{F}_{\text{disco}} = \vec{T}$, podemos escrever:

$$\vec{T} = -\left(mv^2/R\right)\vec{e}_\rho$$

Portanto, a força tensora tem as seguintes características:

- Módulo $\left|\vec{T}\right| = \left|-mv^2/R\right|$, ou seja, $T = mv^2/R = (2\,kg)(1\,m/s)^2/(0{,}5\,m) = 4\,N$.
- Direção e sentido: direção radial (direção do fio) e sentido, para o centro da circunferência.

Para a determinação do peso do objeto A, lembramos que a força tensora T = 4 newtons, e ela é a força transmitida pelo fio. Ela equilibra a força peso exercida pelo objeto A pendurado na extremidade do fio e isso porque o objeto A não sobe nem desce; ele está, portanto, em equilíbrio. Concluímos, dessa condição de equilíbrio, que:

$$T = M_A g = P_A$$

Donde obtemos o peso de A = 4 newtons. Sendo $g = 10m/s^2$, sua massa é $0{,}40\,kg$.

Exercício resolvido 6.6: O canhão de Newton

Se uma pedra for lançada do topo da montanha mais alta do planeta com certa velocidade horizontal, ela desviará de sua trajetória retilínea pela ação da força gravitacional, descrevendo uma trajetória curvilínea.

Quanto maior a velocidade, mais distante ela irá.

Pergunta: Qual deve ser a velocidade mínima de lançamento para que a pedra realize uma volta completa ao redor da Terra sem que atinja o solo?

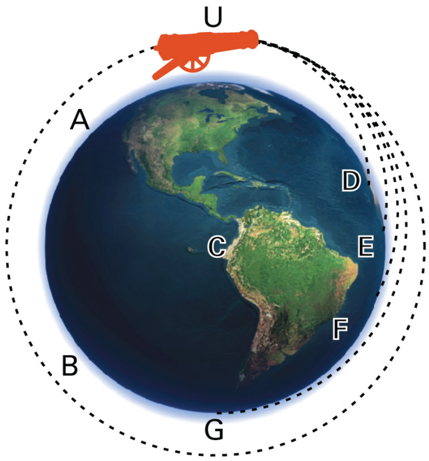

Figura 6.21: Lançamento da pedra do topo da montanha.

Resolução:

Desprezando-se a resistência do ar, a única força que atua na pedra é o seu peso $F_{Grav} = m \cdot g$. Vamos considerar que a pedra tenha sido lançada do topo de uma montanha, cuja altitude é de 9.000 metros (9 km) acima da superfície do mar.

Para a pedra "entrar em órbita", ela deve descrever uma trajetória circular concêntrica com a superfície da Terra, admitida esférica. Assim, o raio da trajetória circular da pedra deve ser $R \approx 6.371\,km + 9\,km = 6.380\,km$.

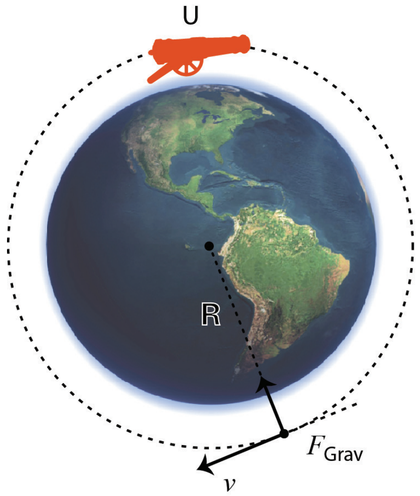

Figura 6.22: Movimento da pedra saindo do topo da montanha e perfazendo uma trajetória circular até retornar ao ponto de onde saíra.

Como a força resultante sobre a pedra é o seu próprio peso, cuja direção é normal à trajetória (e, portanto, perpendicular à velocidade orbital da pedra), o movimento executado pela pedra será do tipo MCU.

Logo, para a pedra continuar em órbita circular de raio $R = 6.380\,km$, é necessário que o peso $= mg$ seja dado pelo produto da massa pela aceleração centrípeta, ou seja,

$$mg = m \cdot V^2/R$$

Donde inferimos que $V^2 = Rg$, ou ainda,

$$V = \sqrt{Rg}$$

Substituindo-se os valores acima, obtemos

$$V = \sqrt{6.380.000 \times 10} \approx 8.787\,m/s \sim 31.633\ km/h$$