02 – Outras Coordenadas

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 2.1

A figura 2.6 ilustra uma célula unitária de um tipo de rede cristalina. Trata-se de uma estrutura cúbica de face centrada (CFC). Os átomos localizam-se nos vértices e no centro das faces da estrutura cúbica.

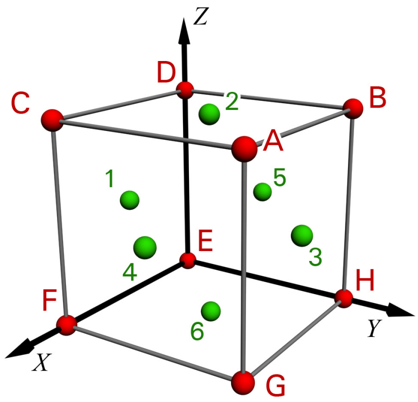

Figura 2.6 - Uma célula unitária cúbica de face centrada.

Considere o referencial cartesiano apresentado na Figura 2.7 , e que o lado do cubo tenha 10 unidades de medida.

Determine as coordenadas cartesianas dos pontos A, F, E, 1 e 2.

Resolução:

1. A superfície de um cubo é formada por seis superfícies planas paralelas duas a duas. São elas representadas por: ABDC e EFGH; CDEF e ABHG e ACGF e BDEH. A origem do referencial cartesiano é o ponto comum às superfícies CDEF, DBEH e GHEF. Os eixos cartesianos $0x$, $0y$ e $0z$ correspondem às intersecções dessas superfícies tomadas duas a duas.

2. A superfície ABDC cruza perpendicularmente o eixo ordenado 0z no ponto D distante da origem (E) 10 unidades de medida; portanto, a coordenada do ponto D é $z = 10$. Mais ainda, todos os pontos desse lado do cubo têm a mesma coordenada $z = 10$.

3. Por razões análogas, os pontos da superfície plana GHEF têm coordenada comum z = 0 e que pertence ao plano xy do sistema cartesiano tridimensional.

4. A superfície DBEH pertence ao plano cartesiano zy. Os seus pontos têm coordenadas $x = 0$ (ou abscissas $x = 0$). E a superfície CDEF pertence ao plano xz; logo, seus pontos têm coordenadas $y = 0$ (ou ordenada $y = 0$).

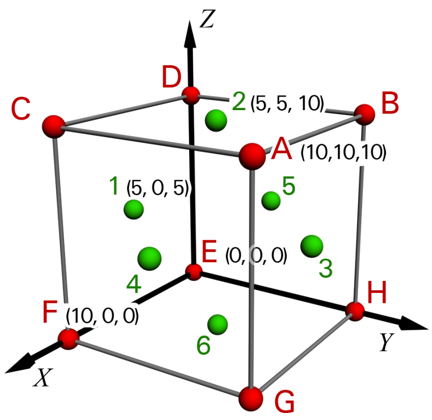

Figura 2.7 – Coordenadas dos pontos A, F, E, 1 e 2 .

A tabela a seguir apresenta os valores das coordenadas dos pontos aludidos.

Notação cartesiana de cada ponto	x	y	z
A (10, 10, 10)	10	10	10
F (10, 0, 0)	10	0	0
E (0, 0, 0)	0	0	0
1 (5, 0, 5)	5	0	5
2 (5, 5, 10)	5	5	10
O	0	0	O (0, 0)

Exercício Resolvido 2.2

O ponto P da Figura (2.10) ocupa o vértice de um cubo. Considere o referencial cartesiano com origem em um dos vértices e com o eixo z ao longo de uma das arestas.

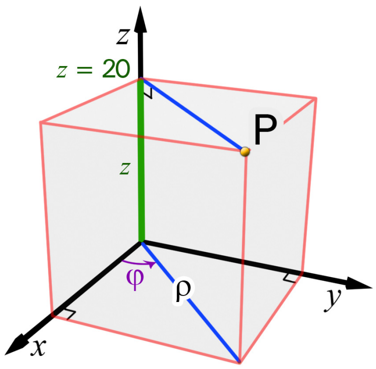

Figura 2.10 - A coordenada z do ponto P é   unidades de medida.

a) Determine as coordenadas cartesianas do ponto P.
b) Expresse a posição do ponto P em coordenadas cilíndricas.

Resolução:

a) Coordenadas cartesianas do ponto P:

O ponto P tem coordenada $z = 20$ unidades de medida; visto que os eixos do referencial cartesiano coincidem com três arestas do cubo, conclui-se que a aresta do cubo tem 20 unidades de medida. Portanto, a abscissa de P é $x = 20$ e a ordenada é $y = 20$. Logo, o ponto P é assim expresso: P(20, 20, 20).

b) Coordenadas cilíndricas do ponto P:

As coordenadas de um ponto P no espaço são definidas pela intersecção de três superfícies. No caso das coordenadas cilíndricas considere:

• Um plano π, como o destacado nas Figuras 2.1 (a) e (b), que passa pelo ponto P e é perpendicular ao eixo $0z$. Esse plano define a coordenada z do ponto.

• Uma superfície cilíndrica de raio r = ρ, concêntrica com o eixo $0z$ e que contém o ponto P.

• Um semiplano PP'$0z$ da Figura 2.11, que contém o eixo $0z$ e o ponto P, e que forma um ângulo φ com o plano xz.

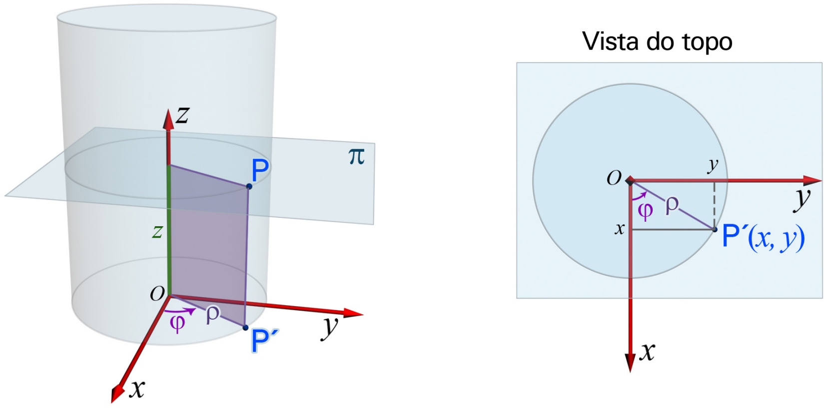

Figura 2.11

a) Plano, semiplano e cilindro das coordenadas do ponto P.

b) Vista de cima (do topo).

Assim, o ponto P é representado univocamente por ρ (raio da superfície cilíndrica), pelo ângulo φ (ângulo que o plano PP'$0z$, que contém P e o eixo $0z$, faz com o plano zx ou com o eixo $0x$), e pela coordenada z do ponto P. Logo, em coordenadas cilíndricas, a posição de um ponto é indicada por:

$$P(\rho,\varphi,z).$$

A coordenada z = 20 unidades de medida, como já foi identificado no quesito (a). Resta determinar os valores de ρ e de φ.

Observe que, no círculo (vista do topo) definido no plano xy, as coordenadas x e y do ponto P'(projeção de P no plano xy) são as mesmas de P. O que pode ser confirmado pela figura 2.1 (b).

Por meio de relações métricas do triângulo retângulo ressaltado, ρ (hipotenusa), x e y (catetos) e φ(ângulo oposto à ordenada y) podem ser relacionados. Assim, vale a relação:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Que nada mais é do que o Teorema de Pitágoras. São igualmente válidas as relações trigonométricas:

$$sen\varphi = y/\rho$$
$$\cos\varphi = x/\rho$$

Do quesito (a) sabemos que: unidades. Portanto:

$$\rho^2 = (20)^2 + (20)^2 \rightarrow \ \rho = 20\sqrt{2} \qquad \text{unidades de medida}$$

$$\tan\varphi = \frac{20}{20} = 1 \rightarrow \ \varphi = \arctan(1) = 45° \text{ ou } \frac{\pi}{4}\text{rad}$$

Portanto, em coordenadas cilíndricas, o ponto P é assim representado: $P\left(20\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 20\right)$.

Exercício Resolvido 2.3

Considere o ponto P pertencente ao plano cartesiano da figura 2.13. A sua posição pode ser expressa em função de coordenadas cartesianas e, também, em função de coordenadas polares. Em coordenadas cartesianas $x = 40\,m$ e $y = 70\,m$, portanto, em notação cartesiana, P(40, 70) m.

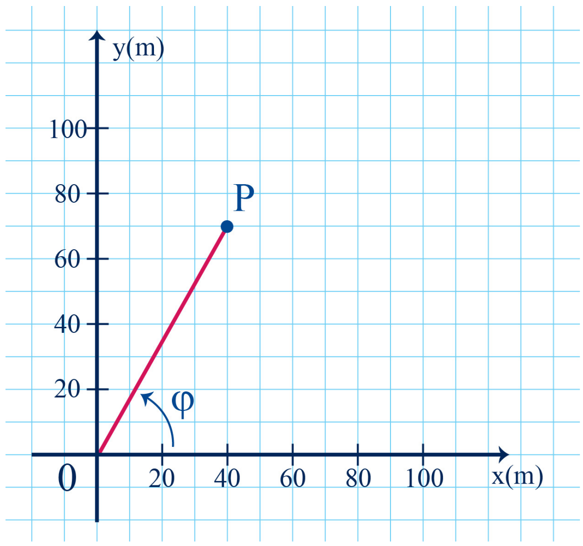

Figura 2.13 - Coordenadas polares de um ponto P são definidas pela distância OP e pelo ângulo φ.

Determine suas coordenadas polares.

Resolução:

Para representar a posição de P em coordenadas polares são necessários dois parâmetros:

I – A distância da origem até o ponto P, OP = ρ, que pode ser expressa a partir das coordenadas cartesianas de P, ou seja,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{40^2 + 70^2} = \sqrt{6500}m \cong 80,6m$$

II - O ângulo que o eixo polar OP faz com o eixo $0x$, ou seja,

$$\varphi = \arctan\left(70/40\right) = \arctan\left(1.75\right) = 60,26^{\circ}$$

Portanto, em coordenadas polares: P(80,6 m; 60,26°).

Exercício resolvido 2.4

Adotando-se um sistema de eixos, cuja origem coincida com o centro da Terra e de tal forma que o plano xz coincida com um plano que forma um ângulo de 30° com o plano associado ao meridiano de Greenwich (veja Figura 2.18), determine nesse referencial a posição da cidade de Greenwich, em coordenadas polares e cartesianas, lembrando que sua latitude (ângulo acima do equador) é de aproximadamente 50°.

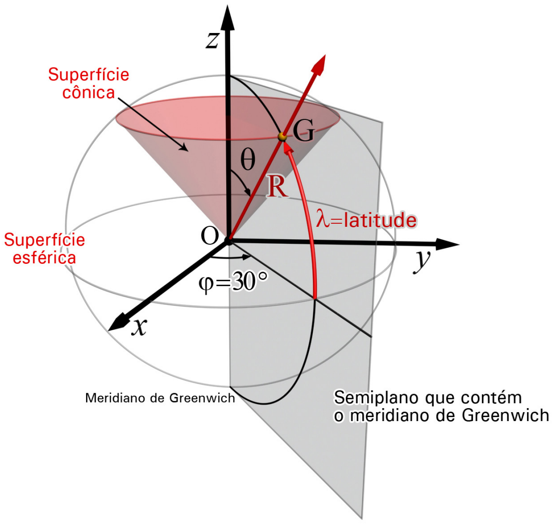

Figura 2.18 - Coordenadas esféricas e as coordenadas latitude e longitude.

Resolução:

O ponto G representa a cidade de Greenwich. Esse ponto é comum a três superfícies:

1. a superfície esférica de raio R (R é a distância de G até a origem);

2. o semiplano que contém o eixo $0z$, ou seja, o meridiano que passa por G (φ é ângulo entre este plano e o plano cartesiano xz);

3. a superfície cônica de eixo concêntrico com o eixo $0z$ e com vértice na origem 0 (θ é a abertura do cone com relação ao eixo central).

Os valores de R, φ e θ representam as coordenadas esféricas do ponto G (no caso, a cidade de Greenwich). Considerando-se a Terra com raio R de aproximadamente 6.400 km, e lembrando que a latitude da cidade de Greenwich é $\lambda = 50°$, a abertura θ da superfície cônica será $\theta = 90° - 50° = 40°$. E o ângulo $\varphi = 30°$, é informação fornecida no enunciado da questão .Portanto, a posição de Greenwich, em coordenadas esféricas, nesse referencial adotado será P(6.400 km; 40°; 30°).

Para converter as coordenadas esféricas em cartesianas, considere o esquema ilustrado na Figura 2.17.

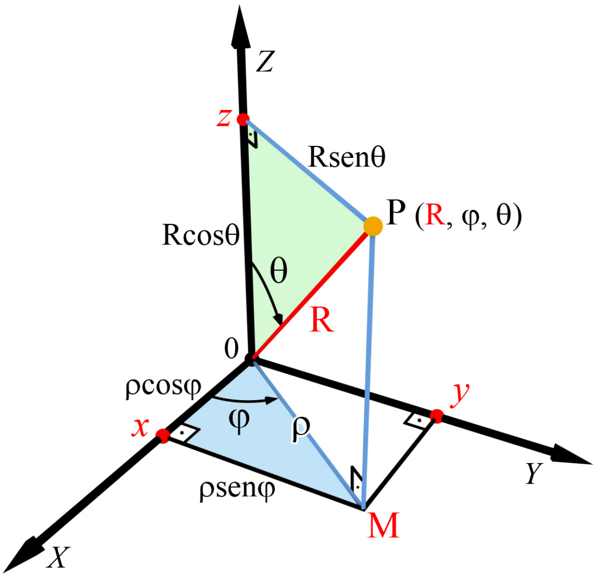

Figura 2.17 - Triângulos que permitem visualizar a conversão de coordenadas esféricas em cartesianas.

Primeiramente, vamos considerar o triângulo retângulo 0ZP, onde R é a hipotenusa e OZ = z e ZP = ρ são os catetos. Podemos verificar, utilizando esse triângulo, que valem as seguintes relações:

I. $z = R\cos\theta$
II. $ZP = \rho = R.\text{sen}\,\theta$

No triângulo retângulo 0xM, pode-se escrever:
III. $Mx = y = \rho\,\text{sen}\,\theta$
IV. $0x = x = \rho\cos\theta$

Substituindo II em III e em IV resulta, juntamente, com I:
$x = R.\text{sen}\,\theta\cos\varphi$
$y = R.\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$
$z = R.\cos\theta$

Substituindo-se os valores, em coordenadas cartesianas esse ponto se escreve como:

$$x_G = 6400 sen 40 \cos 30 = 3.591 km$$
$$y_G = 6400 sen 40 sen 30 = 2.057 km$$
$$z_G = 6400 \cos 40 = 4.903 km$$

Portanto, G (3.562 km, 2.057 km, 4.903 km).