28: Partículas idênticas

- O princípio de Pauli
  - Adição de momento s angulares

O tipo de estatística satisfeita por uma partícula tem consequências bem definidas sobre seu movimento. Examinemos a função de onda de dois férmions idênticos, e imaginemos que eles ocupassem ambos a mesma posição, tendo o mesmo valor para a componente z do spin. Ou seja, $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ e $\vec{s}_1 = \vec{s}_2$. Então, se a função de onda do sistema for

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_2, \vec{s}_2) = -\psi(\vec{r}_2, \vec{s}_2; \vec{r}_1, \vec{s}_1) \tag{743}$$

Nas condições acima, teríamos

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_1, \vec{s}_1) = -\psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_1, \vec{s}_1) \tag{744}$$

ou

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{s}_1; \vec{r}_1, \vec{s}_1) = 0 \tag{745}$$

mostrando que a probabilidade de dois férmions ocuparem o mesmo estado (o estado, aqui, é completamente definido pela posição e pela componente z do spin) é zero. Isto é denominado princípio de exclusão, ou princípio de Pauli. Um exemplo importante é o seguinte: considere dois elétrons movendo-se em um campo de forças, como, por exemplo, no átomo de Hélio. Desprezando a interação entre os elétrons, e denotando por u_1 e u_2 dois estados estacionários de 1 elétron nesse campo, a função de onda de um estado estacionário admissível seria

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1(\vec{r}_1,\vec{s}_1)u_2(\vec{r}_2,\vec{s}_2) - u_1(\vec{r}_2,\vec{s}_2)u_2(\vec{r}_1,\vec{s}_1)\right] \tag{746}$$

A função de onda (747) satisfaz a propriedade

$$P_{12}\psi = -\psi \tag{747}$$

e se anula identicamente se $u_1 = u_2$. Em contraposição, o "estado" de função de onda

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1(\vec{r}_1,\vec{s}_1)u_2(\vec{r}_2,\vec{s}_2) + u_1(\vec{r}_2,\vec{s}_2)u_2(\vec{r}_1,\vec{s}_1)\right] \tag{748}$$

que tem a propriedade

$$P_{12}\psi' = \psi' \tag{749}$$

não existe na natureza, assim como nenhum outro que não esteja antissimetrizado. A expressão costumeira desta lei é que *duas partículas idênticas de spin semi-inteiro não podem estar em um estado em que se movem na mesma "órbita" e com os spins paralelos*. Dois elétrons podem estar na mesma "órbita", desde que seus spins sejam anti-paralelos[32].

No átomo de Hélio, se ignorarmos a interação entre os elétrons, tudo se passa como se cada elétron estivesse sob a ação de uma campo coulombiano, e as funções de onda individuais de cada elétron seriam as de um elétron do átomo de Hidrogênio (com a diferença que $Z=2$). Então, nessa aproximação, no estado fundamental, poderia haver dois elétrons no estado ψ_{100}, um com "spin para cima", o outro com "spin para baixo". O elemento de $Z=3$ é o Lítio. Na mesma aproximação (de desprezar a interação entre os elétrons), não seria possível adicionar mais um elétron no estado $n=1$. Este teria de ser acomodado em um estado com $n=2$. É claro que desprezar a interação entre os elétrons é tanto mais grave quanto mais numerosos eles são, de modo que vamos parar por aqui.

Adição de momento s angulares

O problema é este: dadas duas partículas em estados de momento angular bem definido, qual o valor, ou valores, do momento angular do sistema composto pelas duas? Como a solução é consideravelmente técnica, vamos nos limitar aqui a dar os resultados.

Seja ψ_{l_1,m_1} o estado de uma das partículas, e ψ_{l_2,m_2} o estado da outra. Isto quer dizer que, se $\hat{\vec{l}}_i^{\,2}$ e $\hat{l}_{iz}$ ($i=1,2$) forem os operadores de momento angular total e componente z do momento angular, teremos

$$\hat{\vec{l}}_1^{\,2}\,\psi_{l_1,m_1} = l_1(l_1+1)\psi_{l_1,m_1} \tag{750}$$

$$\hat{l}_{1z}\psi_{l_1,m_1} = m_1\psi_{l_1,m_1} \tag{751}$$

$$\hat{\vec{l}}_2^{\,2}\,\psi_{l_2,m_2} = l_2(l_2+1)\psi_{l_2,m_2} \tag{752}$$

$$\hat{l}_{2z}\psi_{l_2,m_2} = m_2\psi_{l_2,m_2} \tag{753}$$

Considerando agora o sistema composto, teremos que o momento angular total pode ter todos os valores entre l_1+l_2

e $|l_1 - l_2|$, variando de um em um. Para a componente z do momento angular total, a regra é mais simples: a componente z do momento angular total é a soma algébrica das componentes m_1 e m_2.

Exemplo: dois elétrons em estados de momento angular orbital 0, portanto tendo como momento angular apenas o spin, são considerados como um sistema: em que estado (l, m) se encontram? A resposta é: há duas possibilidades. O momento angular total pode ter qualquer dos valores $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$,..., até atingir $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|$, ou seja, os valores possíveis são 1 e 0. Assim, o estado de momento angular do sistema composto será, em geral, uma superposição de um estado de momento angular total 1 com um estado de momento angular total 0. Para saber mais, temos de olhar para as componentes z dos spins individuais. Se os dois elétrons tiverem spins paralelos, então $m_1 + m_2$ será 1 ou -1. Esses valores são incompatíveis com momento angular total 0, de maneira que, neste caso, pode-se afirmar que os elétrons formam um sistema composto de momento angular total $l = 1$. Se as componentes z tiverem sinais opostos, porém, o momento angular total pode ser tanto $l = 1$ quanto $l = 0$. Um estudo mais detalhado permite determinar as probabilidades, neste caso, de se achar, numa medida de momento angular total, cada um desses valores possíveis.

Para um tratamento completo desta questão, veja [3].