18: O átomo de Hidrogênio

O núcleo do átomo de hidrogênio é cerca de 2000 vezes mais pesado do que um elétron. Por isso se pode ignorar o movimento do núcleo e descrever o átomo simplesmente como um elétron movendo-se com energia potencial $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$. A Eq.(335) é então escrita

$$-\frac{\hbar^2}{2m\frac{d^2u}{dr^2}+\left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}-\frac{Ze^2}{r}\right]u(r)=Eu(r)} \qquad (336)$$

Note-se que esta equação descreve mais do que o átomo de hidrogênio: a interação de um elétron com um campo coulombiano possui também casos em que o elétron não permanece nas proximidades do núcleo, mas afasta-se indefinidamente dele: trata-se do espalhamento de um elétron por um campo coulombiano. Aqui vamos estudar apenas os estados ligados do elétron: aqueles em que ele está preso ao núcleo, formando um átomo. O que caracteriza esses estados, na Eq.(336), é que eles possuem energia negativa. Portanto, estudaremos as soluções do problema de autovalores dado pela Eq.(336), com $E < 0$, e, portanto, $E = -|E|$.

É conveniente introduzir variáveis adimensionais. Substituiremos r por

$$\rho = \frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}\, r \qquad (337)$$

e a energia , ou, antes, o seu inverso, por

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,\frac{Ze^2}{\hbar} \qquad (338)$$

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que, efetivamente, ρ e λ são quantidades adimensionais. Verifica-se facilmente que

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{8m|E|}{\hbar^2}\frac{d^2u}{d\rho^2}$$

e que a Eq.(336) pode ser reescrita como

$$-\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u - \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}u = -\frac{1}{4}u \tag{339}$$

ou, finalmente,

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}u + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right]u = 0 \tag{340}$$

Resolver este problema de autovalores consiste em determinar os pares (u, λ) submetidos à condição de que

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$$

que corresponde ao fato de que o átomo tem dimensões finitas.

Para resolver este problema utilizaremos uma técnica devida a Sommerfeld. Em primeiro lugar, estudaremos que tipos de comportamento assintótico, para ρ grande, as soluções de Eq.(340) podem ter. Note-se que a equação

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} - \frac{1}{4}u = 0 \tag{341}$$

coincide com a Eq.(340) para grandes valores de ρ. Podemos, portanto, afirmar que as soluções de Eq.(341) devem coincidir com o limite, para grandes ρ, das soluções da Eq.(340).

Determinando o comportamento assintótico

Considere a equação

$$\mathrm{d}^2u\frac{}{d\rho^2-\frac{1}{4}u=0} \tag{342}$$

e vamos multiplicar cada um de seus termos por $\frac{du}{d\rho}$, obtendo

$$\frac{du}{d\rho}\frac{d^2u}{d\rho^2}=\frac{1}{4}u\frac{du}{d\rho}$$

O leitor verificará facilmente que esta equação é a mesma que

$$\mathrm{d}\frac{}{d\rho\left(\frac{du}{d\rho}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}u^2} \tag{343}$$

ou

$$\mathrm{d}\frac{}{d\rho\left\{\left(\frac{du}{d\rho}\right)^2-\frac{u^2}{4}\right\}=0} \tag{344}$$

Portanto,

$$\left(\frac{du}{d\rho}\right)^2-\frac{u^2}{4}=K$$

onde K é uma constante. Mas tanto u quanto as suas derivadas tendem a zero no infinito. Logo, a constante K deve ser nula, pois, calculada no infinito é nula, e tem o mesmo valor em todos os pontos. Consequentemente,

$$\left(\frac{du}{d\rho}\right)^2=\frac{u^2}{4} \tag{345}$$

e

$$\mathrm{du}_{\overline{d\rho=\pm\frac{\kappa}{2}}} \tag{346}$$

As soluções dessas equações são

$$\mathrm{u}(\rho) = \exp \pm \tfrac{\rho}{2} \tag{347}$$

das quais a que satisfaz os requisitos físicos de se anular no infinito é

$$\mathrm{u}(\rho) = \exp -\tfrac{\rho}{2} \tag{348}$$

Este é, então, o comportamento assintótico que as soluções da Eq.(340) devem ter.

As soluções da equação radial

Vamos então procurar soluções da Eq.(340) da forma

$$\mathrm{u}(\rho) = F(\rho) \exp -\tfrac{\rho}{2} \quad , \tag{349}$$

$F(\rho)$ sendo um polinômio em ρ. A razão de ser um polinômio é que o comportamento assintótico de (349) deve ainda ser dado pelo termo exponencial, o que é garantido se $F(\rho)$ for um polinômio. Uma análise mais fina mostraria que, se se admitisse que $F(\rho)$ fosse uma série infinita, sua soma seria essencialmente uma exponencial em ρ, alterando o comportamento assintótico.[20]

Seja $F(\rho)$ uma expressão da forma

$$\mathrm{F}(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \rho^k \quad , \tag{350}$$

onde a potência mais baixa é a primeira para assegurar que

$$F(0) = 0 \ \ .$$

Derivando termo a termo, temos

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \rho^{k-1} \\ \frac{d^2F}{d\rho^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) A_k \rho^{k-2} \end{aligned}$$

Inserindo estas expressões na Eq.(350), temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ k(k-1)A_k\rho^{k-2} - kA_k\rho^{k-1} + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] A_k\rho^k \right\} = 0 \tag{351}$$

O coeficiente da potência k de ρ é dado por

$$(\mathrm{k}+2)(\mathrm{k}+1)\mathrm{A}_{k+2} - (k+1)A_{k+1} + \lambda A_{k+1} - l(l+1)A_{k+2} = 0 \tag{352}$$

para que a equação diferencial seja satisfeita termo a termo. Diminuindo o valorde k de uma unidade, temos uma relação mais conveniente:

$$\mathrm{A}_{k+1}\left[(k+1)k - l(l+1)\right] = (k-\lambda)A_k \tag{353}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{A}_{k+1} \frac{}{A_k = \frac{k-\lambda}{(k+1)k - l(l+1)} \ \ para \ \ k \geq 2} \tag{354}$$

Para os índices mais baixos temos as equações

$$\mathrm{A}_1 l(l+1) = 0 \tag{355}$$

$$\left[2 - l(l+1)\right] A_2 + (\lambda - 1)A_1 = 0 \tag{356}$$

A equação (354) é muito importante. Dela vemos que, para que a série se interrompa em algum ponto, tornando-se um polinômio, devemos ter que $\lambda = k$. Ora, os k são inteiros, logo, a condição para que a série se interrompa é que exista um inteiro n tal que

$$\lambda = n \tag{357}$$

Como

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,\frac{Ze^2}{\hbar} = n$$

temos

$$—\mathrm{E}—=\mathrm{Z}^2 e^4 m \frac{}{2\hbar^2\ \frac{1}{n^2}} \tag{358}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{E}_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2}\ \frac{1}{n^2}\quad , \tag{359}$$

que é a fórmula de Bohr! Voltando ao cálculo das autofunções, além da condição $\lambda = n$, devemos ter que $\lambda \neq l$, de outra forma, na equação (354), o denominador se anularia ao mesmotempo que o numerador, não garantindo o anulamento do coeficiente A_{k+1}. Portanto devemos ter $l \neq n$.

Vamos construir as primeiras soluções. Tomemos $\lambda = n = 1$ A este valor corresponde a energia

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2}$$

que é a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio (o de energia mais baixa). Para este valor de λ podemos ter $l = 0$, mas não $l = 1$. Então, das equações

$$\begin{aligned} A_1 l(l+1) &= 0 \\ [2 - l(l+1)]\, A_2 &= (\lambda - 1) A_1 \end{aligned}$$

temos Que A_1 é indeterminado, e $A_2 = 0$, assim como os coeficientes de índice mais alto. Temos então, para a solução,

$$\mathrm{F}(\rho) = A_1 \rho \tag{360}$$

e

$$\mathrm{R}(\rho) = A_1 \exp -\tfrac{\rho}{2} \tag{361}$$

Em termos de r, usando

$$\rho = \frac{\sqrt{8m|E|}}{\hbar}\, r$$

e introduzindo

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad ,$$

denominado *raio de Bohr*, obtemos, após cálculos simples,

$$\rho = \frac{2Zr}{na_0}$$

Para o estado fundamental, temos, então,

$$\mathrm{R}_1(r) = A_1 \exp -\tfrac{Zr}{a_0} \tag{362}$$

que é também a função completa, pois Y_{00} é constante.

Para $\lambda = n = 2$ temos as possibilidades $l = 0$ e $l = 1$. Para o primeiro caso, temos, novamente, A_1 indeterminado. Para A_2, usamos a equação (353), que dá

$$A_2 = \frac{1-2}{1.2} A_1$$

ou seja,

$$A_2 = -\frac{1}{2} A_1$$

A solução então é

$$\mathrm{F}(\rho) = A_1 \left(\rho - \frac{\rho^2}{2}\right) \tag{363}$$

e

$$\mathrm{R}(\rho) = A_1 \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \exp -\frac{\rho}{2} \tag{364}$$

Expressando em termos de r, obtemos

$$\psi_{200} = A_1 \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) \exp -\frac{Zr}{2a_0} \tag{365}$$

onde usamos a notação tradicional para os autoestados do átomo de hidrogênio: $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$. O leitor, neste ponto, deveria ser capaz de mostrar que

$$\psi_{20m} = A_2 \frac{Zr}{a_0} \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) Y_{0\,0}(\theta, \phi) \tag{366}$$

No segundo caso, $l = 1$,vemos, da Eq.(355), que

$$A_1 = 0$$

enquanto A_2 é indeterminado. $A_3 = 0$, assim como os índices mais altos. Logo,

$$F(\rho) = A_2\rho^2$$

A expressão em termos de r vem a ser

$$\mathrm{R}_{21}(r) = K\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{Zr}{a_0}\exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \tag{367}$$

Como vimos, a função radial fica definida quando se dão os valores de n e l. Por isso ela é denotada por $R_{nl}(r)$. Para o caso de $l = 1$ a dependência angular não é trivial, pois temos

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = KR_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{368}$$

que, nesse caso dá

$$\psi_{21m}(r,\theta,\phi) = K\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{Zr}{a_0}\exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right)Y_{1m}(\theta,\phi) \tag{369}$$

com m podendo tomar os valores 1, 0, e -1.

Note que a energia fica totalmente determinada por n. Então, exceto pelo estado fundamental, a cada nível de energia correspondem mais de um estado do sistema. O espectro é dito degenerado (no bom sentido!). Considere, por exemplo, o nível de energia com $n = 2$. Podemos ter $l = 0$, que dá um único estado, ou $l = 1$, que admite 3 valores de m. No total, então, há 4 estados neste nível de energia . Diz-se que o grau de degenerescência é 4. É fácil provar que o grau de degenerescência do nível n é n^2. O numero quântico n é denominado *número quântico principal*.

A seguir apresentamos uma lista das partes radiais de algumas funções de onda do átomo de hidrogênio.

$$R_{10}(r) = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2 \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right) \quad (370)$$

$$R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2\left(1-\frac{1}{2}\frac{Zr}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{Zr}{a_0}\right) \quad (371)$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{Zr}{a_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{Zr}{a_0}\right) \quad (372)$$

$$R_{30}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2\left[1-\frac{2}{3}\frac{Zr}{a_0}+\frac{2}{27}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{1}{3} \right. \quad (373)$$

$$R_{31}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{Zr}{a_0}\left(1-\frac{1}{6}\frac{Zr}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{3}\frac{Zr}{a_0}\right) \quad (374)$$

$$R_{32}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\exp\left(-\frac{1}{3}\frac{Zr}{a_0}\right) \quad (375)$$

Algumas propriedades do átomo de hidrogênio

Até agora escrevemos as funções de onda assim:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = KR_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Como determinar a constante K? Uma vez que os harmônicos esféricos são normalizados por conta própria, pois

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta |Y_{lm}(\theta,\phi)|^2 = 1$$

devemos ter

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)|^2 = |K|^2 \int_0^{\infty} r^2 dr |R_{nl}(r) \quad (376)$$

Exemplo: para o estado ψ_{100},

$$|K|^2 \int_0^\infty dr r^2 \exp -\frac{2Zr}{a_0} = 1$$

Usando

$$\int_0^\infty dr r^2 \exp -\frac{2Zr}{a_0} = \frac{a_0^3}{4Z^3}$$

obtemos

$$R_{10}(r) = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2 \exp -\frac{Zr}{a_0}$$

confirmando o valor da tabela.

De posse da expressão detalhada da função de onda, podemos fazer perguntas interessantes. Qual é a probabilidade de o elétron estar, no estado fundamental do átomo de hidrogênio, entre r e $r + dr$? Ela é dada por

$$\mathrm{P(r)dr} = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 4 \ \exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) r^2 dr \tag{377}$$

Para que valor de r a probabilidade é máxima (para idênticos dr)? No ponto de máximo, teremos

$$\frac{dP(r)}{dr} = 2r \exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) - r^2 \frac{2Z}{a_0} \exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) = 0$$

ou

$$1 - \frac{rZ}{a_0} = 0 \ .$$

Logo, para o átomo de hidrogênio ($Z=1$), temos que a probabilidade máxima é para $r=a_0$, o raio de Bohr![21]

Vamos calcular agora a velocidade média do elétron no estado fundamental.

$$\langle \frac{\hat{p}_x}{m} \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr \psi_{100}(r,\theta,\phi) \frac{\hat{p}_x}{m} \psi_{100}(r,\theta,\phi) \tag{378}$$

Usando $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, obtemos

$$\langle \frac{\hat{p}_x}{m} \rangle = \frac{8i\hbar}{4\pi m} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^4 \int_0^{\infty} dr r^2 \exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin^2\theta \tag{379}$$

onde usamos $x = r\sin\theta\cos\phi$. Como

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi = 0$$

temos que o valor médio da componente x da velocidade do elétron no estado fundamental é 0. Como o estado é esfericamente simétrico, o mesmo resultado deve valer para as outras componentes. Logo,

$$\langle \frac{\vec{\hat{p}}}{m} \rangle = 0$$

Isto posto, podemos dizer que e elétron está em repouso, no estado fundamental? Certamente não! Em qualquer modelo clássico com órbita circular (qualquer órbita fechada, de fato) o elétron está em movimento e sua velocidade média é zero. Para obter mais informações sobre o que o elétron faz no estado fundamental do átomo de hidrogênio, vamos calcular sua energia cinética média. Ela é dada por:

$$\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dq \psi_{100}(q) \vec{\nabla}^2 \psi_{100}(q) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty drr^2 R_{10}(r)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{00}(\theta,\phi)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \right.\right. \tag{380}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty drR_{10}(r)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{10}}{dr}\right)\\
&= \frac{\hbar^2}{2m}4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^4\int_0^\infty dr\exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)\left(2r\exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)-\frac{Z}{a_0}r^2\exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)\right)\\
&= \frac{\hbar^2}{2m}4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^4\left\{2\int_0^\infty drr\exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) - \frac{Z}{a_0}\int_0^\infty drr^2\exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Usando as integrais

$$\int_0^\infty drr^2\exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) = \frac{a_0^3}{4Z^3}$$

e

$$\int_0^\infty drr\exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) = \frac{a_0^2}{4Z^2}$$

obtemos o resultado, para $Z = 1$,

$$\langle\frac{p^2}{2m}\rangle = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \tag{381}$$

Logo, o elétron não está parado. E nem poderia: se tivesse momento perfeitamente definido (no caso, nulo), sua posição teria de ser totalmente indefinida, pelo princípio da incerteza. Como a incerteza na posição é da ordem de a_0 e, da Eq.(382), vemos que a incerteza no momento é da ordem de $\frac{\hbar}{a_0}$, vemos que o produto das incerteza é da ordem de $\hbar$. Ou seja, o elétron tem o mínimo movimento exigido pelo princípio de incerteza. Está tão parado quanto é possível!

Exercícios

Os estados estacionários do átomo de Hidrogênio são denotados por $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)$. A seguinte superposição:

$$\psi(r,\theta,\phi) = a_1\psi_{n_1 l_1 m_1}(r,\theta,\phi) + a_2\psi_{n_2 l_2, m_2}(r,\theta,\phi)$$

com $n_1 \neq n_2$, $l_1 \neq l_2$, $m_1 \neq m_2$, é um estado do Hidrogênio, que não é um estado estacionário, e não é autofunção nem de $\hat{\vec{l}}^2$ nem de $\hat{l}_z$. Dentro deste estilo, construa

(a) Um estado do Hidrogênio que seja autofunção simultanea de $\hat{H}$ e $\hat{\vec{l}}^2$, mas não de $\hat{l}_z$.

(b) Um estado do Hidrogênio que seja autofunção simultânea de $\hat{H}$ e $\hat{l}_z$, mas não de $\hat{\vec{l}}^2$.

2. Uma partícula livre executa movimento unidimensional ao longo do eixo x, e sua função de onda em $t=0$ é

$$\Psi(x,0) = Ae^{-ax^2}e^{ilx}$$

onde l é uma constante real. Determine $\Psi(x,t)$.

3.(a) Um sistema físico é descrito por um hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \hat{O}^2$$

onde $\hat{O}$ é hermiteano. Mostre que $\hat{\vec{p}}$ é hermiteano, e que se um operador é hermiteano, seu quadrado também é. Finalmente, mostre que os autovalores da energia do sistema são positivos ou nulos.

(b) É possível um operador ser ao mesmo tempo unitário e hermiteano? Exemplo!

(c) Demonstre que $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.

(d) Demonstre que, se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são hermiteanos, $\frac{1}{i}[\hat{A}, \hat{B}]$ também é.

(e) Sejam $\frac{d\hat{O}}{dt}$ e $\frac{d\hat{B}}{dt}$ nulos. Mostre que $\frac{d}{dt}[\hat{O}, \hat{B}] = \hat{0}$, onde $\hat{0}$, o operador "zero", é tal que, qualquer que seja a função de onda $\psi(\vec{r})$,

$$\hat{0}\psi = 0$$

Sugestão: identidade de Jacobi.

4. (a) Determine $\langle r \rangle$ e $\langle r^2 \rangle$ para o elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio. Expresse suas respostas em termos do raio de Bohr a_0. Determine também a_0, que é o raio da "órbita de Bohr" do estado de mais baixa energia, no modelo de Bohr.

(b) Determine $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ no estado fundamental sem calcular mais integrais, usando o resultado anterior e as simetrias do estado fundamental.

(c) Determine $\langle x^2 \rangle$ no estado $(n, l, m) = (2, 1, 1)$. Note que este estado *não* é simétrico em x, y, z.

5. Qual é a probabilidade P de que um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio seja encontrado *dentro do núcleo*?
(a) Primeiro calcule a resposta *exata*. Denote o raio do núcleo por b.
(b) Expanda o seu resultado como uma série de potências no número pequeno $\epsilon = \frac{2b}{a_0}$, e mostre que o termo de ordem mais baixa é cúbico:

$P \approx (4/3)(b/a_0)^3$. Este termo deveria já ser uma boa aproximação, pois $b \ll a_0$.

(c) Alternativamente, poderíamos pensar que a função de onda do elétron é essencialmente constante sobre o pequeno volume do núcleo, de modo que $P \approx (4/3)\pi b^3 |\psi(0)|^2$. Verifique que o resultado é efetivamente bom.

(d) Use $b \approx 10^{-13}$cm e $a_0 \approx 0.5 \times 10^{-8}$ cm para uma estimativa numérica de P. *Grosso modo*, isto representa a fração do tempo em que o elétron se encontra dentro do núcleo.

6. Estime, a partir do princípio de incerteza, quanto tempo um lápis pode ficar em equilíbrio vertical sobre a sua ponta.

7. Uma bola perfeitamente elástica, localizada entre duas paredes paralelas, move-se perpendicularmente a elas, sendo refletida de uma para outra. Perfeitamente elástica quer dizer que a energia cinética não se altera.. Usando a mecânica clássica, calcule a variação da energia da bola se as paredes passam a se aproximar, lenta e uniformemente, uma da outra. Mostre que esta variação de energia é exatamente o que se obtém na mecânica quântica se o número quântico principal n da bola permanece constante.