5: O princípio de superposição

Seja q o conjunto das coordenadas de um sistema quântico [3], e dq o produto das diferenciais dessas coordenadas [4]. Por exemplo, se $q=\{x,y,z\}$, $dq=dx,dy,dz$.

O estado de um sistema é descrito por uma função complexa $\psi(q)$ das coordenadas. O quadrado do módulo dessa função determina a distribuição de probabilidades dos valores das coordenadas:

$$\left|\psi(x,y,z)\right|^2 dxdydz$$

é a probabilidade de que uma medida realizada sobre o sistema encontre os valores das coordenadas entre x e $x + dx$, y e $y + dy$, z e $z + dz$. A função ψ é denominada *função de onda* do sistema.

O conhecimento da função de onda permite, em princípio, calcular a probabilidade dos vários resultados de qualquer medida (não necessariamente das coordenadas). Essas probabilidades são expressões bilineares em ψ e ψ^* (* representando a operação de tomar o complexo conjugado), do tipo

$$\int dq\psi(q)^*\phi(q)\psi(q)$$

ou

$$\int dq\psi(q)^*\frac{\partial}{\partial q}\psi(q)$$

por exemplo.

O estado de um sistema varia, em geral, com o tempo. Em consequência, a função de onda é uma função também do tempo, $\psi(q,t)$. Se a função de onda é conhecida em um instante inicial, segue, do conceito da descrição completa, que ela está, em princípio, determinada em cada instante sucessivo. A dependência precisa da função de onda com o tempo é determinada por uma equação denominada equação de Schrödinger.

A probabilidade de que as coordenadas de um sistema tenham *qualquer* valor, é 1. Devemos, então, ter

$$\int |\psi(q)|^2 \, dq = 1$$

pois a integral acima é exatamente esta probabilidade.

Seja $\psi(q)$ a função de onda de um sistema. Considere a função

$$\psi(q) = \psi(q) e^{i\alpha}$$

onde α é um número real. Como as probabilidades dos vários resultados são expressões da forma

$$\int dq \psi^*(q) \phi(q) \psi(q)$$

e como

$$\int dq \psi^*(q) \phi(q) \psi(q) = \int dq \psi'^*(q) \phi(q) \psi'(q)$$

vemos que $\psi'(q)$ é uma descrição da função de onda do sistema tão boa quanto $\psi(q)$. Diz-se, por isso, que a função de onda de um sistema está definida a menos de uma fase, ou seja, que, se $\psi(q)$ é função de onda de um sistema, $\psi'(q)$ também é.[5]

Seja S um sistema físico que pode existir tanto num estado de função de onda $\psi_1(q)$ como no estado de função de onda $\psi_2(q)$. A medida de uma quantidade física f dá, por hipótese, o resultado f_1, com probabilidade 1, se o sistema estiver em ψ_1, e o resultado f_2, também com probabilidade 1, se o sistema estiver em ψ_2. Postula-se então que:

(1) Toda função da forma $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, onde c_1 e c_2 são números complexos, é também um estado do sistema.

(2) Neste estado, uma medida de f dará *ou* o resultado f_1 *ou* o resultado f_2.

Este postulado é denominado princípio de superposição. Segue dele que a equação de Schrödinger deve ser linear em ψ.

Considere um sistema composto de duas partes, e suponha que o estado do sistema seja dado de uma maneira tal que cada uma de suas partes possui uma descrição completa.[6] Então as probabilidades das coordenadas q_1, da parte 1, são independentes das probabilidades das coordenadas q_2, da parte 2. Seja $\psi_{12}(q_1,q_2)$ a função de onda do sistema todo, e $\psi_1(q_1)$e $\psi_2(q_2)$as funções de onda das partes 1 e 2, respectivamente. Então,

$$\psi_{12}(q_1,q_2) = \psi_1(q_1)\psi_2(q_2)$$

pois, então,

$$\left|\psi_{12}(q_1,q_2)\right|^2 = \left|\psi_1(q_1)\right|^2 \left|\psi_2(q_2)\right|^2$$

o que significa que as probabilidades são independentes.

Se, além disso, essas partes não interagirem, vale ainda a relação

$$\psi_{12}(q_1,q_2,t) = \psi_1(q_1,t)\psi_2(q_2,t)$$