1- Mecânica dos Fluidos - Conceitos Básicos

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 1.1

a) Determine a pressão que exercemos sobre um prato de uma balança de área 1200 cm^2, quando sobre ele depositamos uma massa de 4 kg.
b) Compare com a pressão atmosférica local (P_{loc}), que é de 0.9 atmosferas.

Resolução:

Por definição:

$$P = \frac{F}{A}$$

No caso, F é a força gravitacional. Assim:

$$P = \frac{Mg}{A}$$

Transformando a área dada para as unidades do SI temos:

$$1200cm^2 = 1200\left(10^{-2}\right)^2 m^2 = 0,12m^2$$

Portanto a pressão é, adotando g=10,

$$P = \frac{Mg}{A} = \frac{4.10}{0,12} = \frac{10^3}{3} Pascal$$

b) Lembramos que

$$1atm \cong 10^5 Pascal$$

Assim:

$$0,9atm = 0,9.10^5 Pascal$$

Logo:

$$\frac{10}{3} Pascal = \frac{10^{-4}}{3} atm$$

Em termos da pressão local, escrevemos:

$$P = \frac{9.10^{-5}}{3} P_{loc} = 3.10^{-5} P_{loc}$$

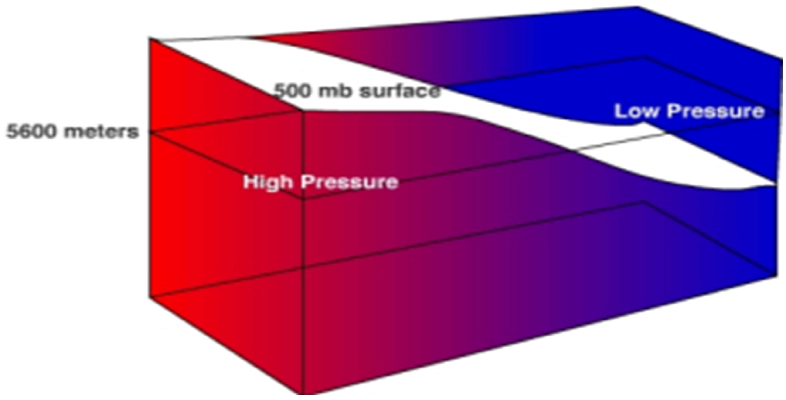
Ou seja, essa pressão é uma fração minúscula da pressão atmosférica local.

Exercício Resolvido 1.2

A pressão atmosférica numa determinada região é descrita, aproximadamente, pela equação:

$$P(x,y,z) = ax + by + cz + d$$

Este plano interliga duas regiões. Uma de alta pressão e outra de baixa pressão (vide figura abaixo).



a) Determine o gradiente de pressão.

Determine o ângulo formado pelas normais associadas às isobáricas e a normal do plano $z = z_0$. Por exemplo, z= 5.600 metros (vide figura).

Mostre que a intersecção da equipotencial $P = P_0$ com os planos:

$$z = z_1$$

$$z = z_2$$

São retas com inclinações iguais, mas, distando uma da outra. Comente sobre essa distância.

Resolução:

a) A equação:

$$P_o = ax + by + cz + d$$

Descreve um plano O gradiente da pressão é um vetor constante, dado por

$$\vec{\nabla} P = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

b) A normal a esse plano é:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}(ax + by + cz)}{\left[\vec{\nabla}(ax + by + cz)\right]} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

O ângulo é dado por:

$$\cos\theta = \vec{n} \cdot \vec{k} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

c) Para $z = z_1$ a pressão é função apenas de x e y.

$$P = ax + by + cz_1 + d$$

Para uma pressão constante, uma isobárica $P = P_0$, a equação resultante descreve uma reta, a qual pode ser escrita de duas formas distintas. A saber:

$$ax + by + cz_1 + d = P_o$$

Ou, analogamente,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z_1 + \frac{(P_o - d)}{b}$$

Para $z = z_2$

A reta agora é descrita pela equação:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z_2 + \frac{(P_o - d)}{b}$$

Portanto, as duas retas têm a mesma inclinação. No entanto, elas interceptam o eixo y em pontos diferentes. No primeiro caso esse ponto é:

$$y_1 = -\frac{c}{b}z_1 + \frac{(P_o - d)}{b}$$

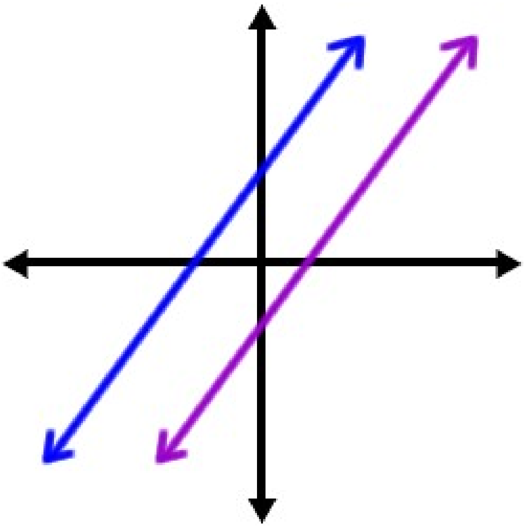
Enquanto que no segundo caso, esse ponto é

$$y_2 = -\frac{c}{b}z_2 + \frac{(P_o - d)}{b}$$

Portanto a diferença de coordenadas pose serem escrita como:

$$y_2 - y_1 = -\frac{c}{b}(z_2 - z_1)$$

Essa diferença pode ser interpretada como a distância entre as retas. No entanto, a distância difere dessa pelo cosseno de um ângulo.



Exercício Resolvido 1.3

Considere o campo de velocidades dado por:

$$V_x = -\alpha \frac{x+y}{x^2+y^2} \qquad V_y = +\alpha \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

a) Analise o módulo desse campo de velocidade como função da distância até a origem.

b) Qual é a direção e o sentido da velocidade em cada ponto?

Resolução:

$$\left|\vec{V}\right|^2 = V^2 = \frac{\alpha^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[\left(x-y\right)^2+\left(x+y\right)^2\right] = \frac{2\alpha^2}{\left(x^2+y^2\right)}$$

Ou seja, seu módulo depende com o inverso da distância até a origem:

$$V = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\rho}$$

Daí inferimos que

$$\lim_{\rho\to\infty} V = 0$$
$$\lim_{\rho\to 0} V \to \infty$$

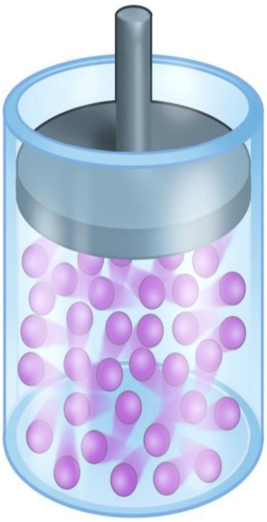
Em coordenadas polares o vetor $\vec{V}$ tem duas componentes:

$$V_\varphi = \frac{\alpha}{\rho}$$
$$V_\rho = -\frac{\alpha}{\rho}$$

Assim, em cada ponto o vetor velocidade forma um ângulo de 45^0 com a vertical, seu sentido indicando sempre para dentro (vide figura).

Exercício Resolvido 1.4

Um gás ideal é confinado num pistão de forma que uma das superfícies é móvel. Seja A a área dessa superfície. Constata-se que à temperatura T_1 o volume de gás é V. Qual o peso que devemos colocar sobre essa superfície de forma a manter o mesmo volume a uma temperatura $T_2\left(com\ T_2 > T_1\right)$?
Obs: a rigor devemos ir aumentando o peso gradativamente à medida que a temperatura aumenta.



Resolução:

Sendo um gás ideal, a equação de estado do mesmo é:

$$PV = nRT$$

Portanto, considerando-se diferentes temperaturas, mas mantendo o volume constante, temos:

$$P_1V = nRT_1$$
$$P_2V = nRT_2$$

Logo:

$$P_2 = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Com o acréscimo de massa sobre a superfície, temos a relação entre as pressões:

$$P_2 = P_1 + \frac{Mg}{A}$$

Portanto:

$$\frac{Mg}{A} = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - P_1 = P_1\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

Logo:

$$M = \frac{AP_1}{g}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

Exercício Resolvido 1.5

a) Mostre que a intersecção de uma superfície isobária com o plano

$$z = z_0$$

Define uma curva no espaço.

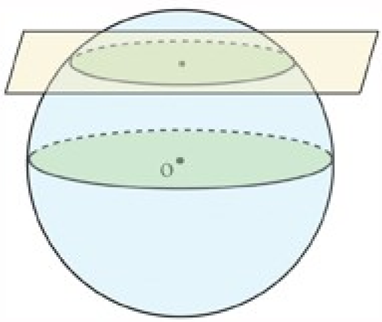
b) O que obteríamos se considerássemos diferentes planos? Exemplifique com:

$$z = z_1,\ z = z_2,\ z = z_3$$

Essas curvas são as curvas de nível.

c) Exemplifique com o caso de superfícies esféricas

Resolução:



Uma superfície é caracterizada pela condição

$$W(x, y, z) = c$$

Onde W é uma função de (x, y, z).

A condição:

$$z = z_0$$

Determina um plano.

Assim, a intersecção das duas superfícies nos leva à equação:

$$W\left(x,y,z_0\right)=c$$

Que é a equação de uma curva no plano $z = z_0$.
Para diferentes valores de z, temos:

$$W\left(x,y,z_1\right)=c$$
$$W\left(x,y,z_2\right)=c$$
$$W\left(x,y,z_3\right)=c$$

Obteremos diferentes curvas. Essas curvas são as linhas de nível.

c) Por exemplo:

$$W\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$$

Ou ainda,

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

É uma identidade que é satisfeita para todos os pontos localizados sobre uma superfície esférica de raio R. No entanto, equação:

$$W\left(x,y,z_1\right)=\sqrt{x^2+y^2+z_1^2}=R$$

Nos leva à equação

$$x^2+y^2=R^2-z_1^2$$

Que descreve uma circunferência de raio $\sqrt{R^2-z_1^2}$ e localizada no plano $z=z_1$

As demais, para z_2 e z_3 são, igualmente, circunferências de raios $R^2-z_2^2$ e $R^2-z_3^2$ para:

$$x^2+y^2=R^2-z_2^2$$
$$x^2+y^2=R^2-z_3^2$$

Devemos admitir que $z_1<R, z_2<R$ e $z_3<R$

Exercício Resolvido 1.6

1. Um volume de 5,0cm^3 de mercúrio apresenta massa de 68 gramas.
   a) Qual a massa específica do mercúrio em gramas por cm^3?
   b) Qual a massa específica do mercúrio em kg/m^3?

Resolução:

a) m = massa = 68g
V = volume = 5,0cm^3

A massa específica ρ é dada por:

$$\rho=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}=\frac{68\mathrm{g}}{5{,}0\mathrm{cm}^3}=13{,}6\mathrm{g/cm}^3$$

b) ρ = 13,6g/cm^3. Mas,
1g = 10^{-3}kg
1cm^3 = (10^{-2}m)^3 = 10^{-6}m^3

Assim, $\rho = 13{,}6.\dfrac{10^{-3}\,\text{kg}}{10^{-6}\,\text{m}^3} = 13{,}6.10^3\,\text{kg/m}^3$

Exercício Resolvido 1.7

Uma casa esférica feita de alumínio tem raio externo R = 4,0cm e raio interno r = 3,0cm. Sabendo que a massa específica do alumínio é ρ = 2,7g/cm^3, calcule:

a) a massa da casca esférica;
b) a densidade da casca esférica.

Resolução:

a) Uma esfera de raio x tem volume dado por $4/3\pi x^3$. Assim, o volume da casca esférica é:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) =$$

$$\cong \frac{4}{3}.(3{,}14)(4^3 - 3^3) \cong 155\text{cm}^3$$

A massa específica ρ é dada por

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Assim, $m = \rho.V \cong (2{,}7\text{g/cm}^3)(155\text{cm}^3) \cong 418$ gramas

$$\boxed{m \cong 418\text{g}}$$

b) A densidade de um corpo é dada por

$$d = \frac{m}{V}$$

onde V é o volume total do corpo, incluindo as partes internas ocas. Assim,

$$V = \frac{4}{3}pR^3\ \frac{4}{3}(3{,}14)(4^3) \cong 268\text{cm}^3$$

Portanto,

$$d = \frac{m}{V} \cong \frac{418\text{g}}{268\text{cm}^3} \cong 1{,}56\text{g/cm}^3$$

$$\boxed{d \cong 1{,}56\text{g/cm}^3}$$

Exercício Resolvido 1.8

Um cubo de massa 4,0kg e aresta 10 cm está apoiado sobre uma mesa, numa região em que g = 10m/s^2. Calcule a pressão média exercida pelo cubo sobre a superfície de contato com a mesa.

Resolução:

A = área da base do cubo = (10cm)^2 = (10^{-1}m)^2 = 10^{-2}m^2

A força F exercida pelo cubo sobre a mesa tem intensidade igual ao seu peso P.

P = m.g = (4,0kg) (10m/s^2) = 40N

Portanto, a pressão p é dada por:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{40\text{N}}{10^{-2}\,\text{m}^2} = 4{,}0.10^3\ \text{N/m}^2 = 4{,}0.10^3\ \text{Pa}$$

Exercício Resolvido 1.9

a) Determine a pressão que um indivíduo de massa M= 100 Kg exerce sobre a superfície de uma balança de área 1000 cm^2.

b) Lembrando que $1atm \cong 10^5\,Pascal$,compare com a pressão atmosférica local (P_{loc}), que é de 0.9 atmosferas. Adote $g = 10m/s^2$

Essa balança tem uma superfície abaixo da qual é colocado um conjunto de molas elásticas. Esse conjunto de molas atua de forma a ser equivalente a uma única mola de constante elástica k. Com o indivíduo sobre a balança verifica-se que o seu alongamento é de 1 cm.

c) Qual é a constante elástica k da mola equivalente?

Resolução:

a) Por definição:

$$P = \frac{F}{A}$$

No caso, F é a força gravitacional. Assim:

$$P = \frac{Mg}{A}$$

Transformando a área dada para as unidades do SI temos:

$$1000cm^2 = 1000\left(10^{-2}\right)^2 m^2 = 0{,}1m^2$$

Portanto a pressão é, adotando g=10,

$$P = \frac{Mg}{A} = \frac{100\cdot 10}{0{,}1} = 10^4\,Pa$$

b) Lembramos que

$$1atm \cong 10^5\,Pascal$$

Assim:

$$10^4\,Pa = 10^{-1}\,atm$$

Em termos da pressão local, escrevemos:

$$10^4\,Pa = 10^{-1}\,atm = 10^{-1}\frac{0,9atm}{0,9} = \frac{1}{9}P_{local}$$

Ou seja, essa pressão é uma fração da pressão atmosférica local.

c) $Kx = P = mg$

Nesse caso, e no SI

$$K\left(10^{-2}\right) = 100.10$$

Portanto,

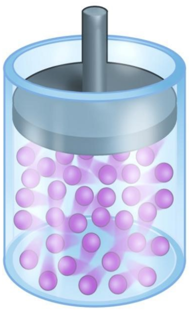
$$K = 10^5\,N/m$$

Exercício Resolvido 1.10

Um gás ideal é confinado num pistão de forma que uma das superfícies é móvel. Seja A a área dessa superfície. Constata-se que sua temperatura e pressão iniciais são T_1 e P_1

Em seguida, mantendo o volume do gás constante, adicionamos uma massa M à superfície do gás.

a) Qual é a pressão do gás após a adição da massa?
b) Qual é a temperatura do gás após a adição da massa?



Resolução:

Sendo um gás ideal, a equação de estado do mesmo é:

$$PV = nRT$$

Portanto, considerando-se diferentes temperaturas, mas mantendo o volume constante, temos:

$$P_1V = nRT_1$$
$$P_2V = nRT_2$$

Logo:

$$P_2 = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Portanto:

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1}T_1$$

Com o acréscimo de massa sobre a superfície, temos a relação entre as pressões:

$$\boxed{P_2 = P_1 + \frac{Mg}{A}}$$

Logo:

$$T_2 = \frac{P_1 + \frac{Mg}{A}}{P_1} T_1$$

Ou seja,

$$\boxed{T_2 = \left(1 + \frac{Mg}{AP_1}\right) T_1}$$