2-O movimento harmônico simples (MHS) e o sistema massa-mola

2-1. O movimento harmônico simples

O movimento oscilatório é um caso especial de movimento periódico isso porque o movimento oscilatório é definido como aquele no qual em algum momento o corpo muda de direção. Essa inversão se dá quando a velocidade do corpo se anula mudando, em seguida, de sentido. Dizemos que o movimento é oscilatório se ele for periódico e se o sentido do movimento, determinado no caso unidimensional pelo sinal da velocidade, for invertido a intervalos de tempos regulares (no caso o período do movimento). O movimento de um pêndulo simples é o melhor exemplo de tais movimentos. Nos pontos de máxima amplitude o pêndulo atinge a velocidade igual a zero retornando em seguida.

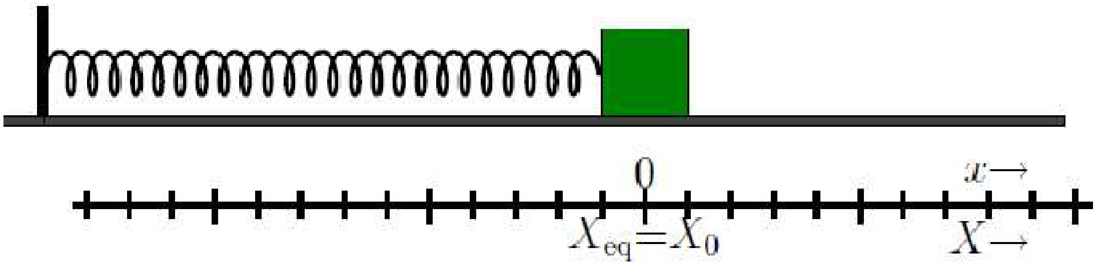


Fig. Uma mola helicoidal tem constante elástica k. Ela funciona, igualmente bem, sob tração e sob compressão. Uma de suas extremidades é fixa numa parede e a outra no ponto A onde ela é presa a um carrinho de massa m que pode mover-se livremente sobre uma plataforma horizontal.

Nesse capitulo estudaremos o movimento oscilatório mais simples dentre todos. Ele é denominado Movimento Harmônico Simples (MHS).

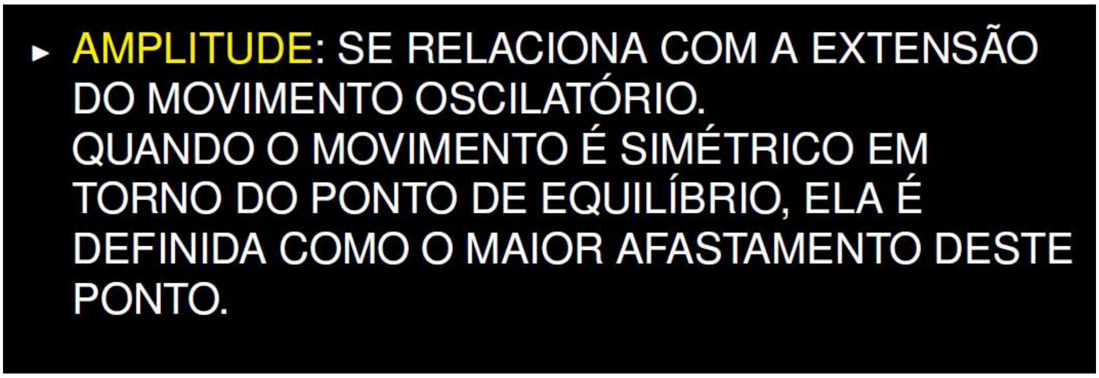
Esse tipo de movimento oscilatório é sem dúvida o mais simples de todos. Porquanto ele é, além de ser um movimento oscilatório, ele é um movimento periódico. E na descrição do movimento nos temos equações horárias tanto para posição, velocidade, aceleração que envolvem função seno e cosseno de forma que esse nome harmônico se refere a essa característica do movimento. Na qual descrevemos o movimento utilizando essas funções que são relativamente simples.

2-1.1 Amplitude, período e frequência do MHS

A seguir falaremos de quatro grandezas que caracterizam o MHS. A quinta, denominada fase, será explicada depois.

Amplitude- A

Refere-se ao maior valor da coordenada a partir da posição de equilíbrio. Ela será representada pela letra. A.



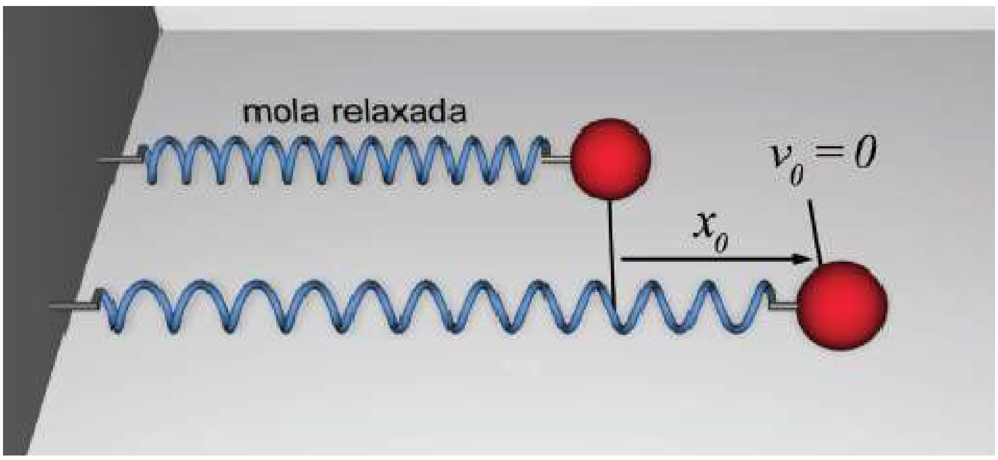


Fig. O valor máximo do afastamento, a partir da posição de equilíbrio, é a amplitude do movimento.

Periodo- T

Existem movimentos que se repetem a intervalos de tempo regulares e sucessivos. Tais movimentos são ditos periódicos. Dizemos que o movimento de um ponto material se repetiu se, depois de decorrido o intervalo de tempo de um período (T), ele está na mesma posição anterior e com a mesma velocidade. Não basta, portanto, estar na mesma posição. Assim, dizemos que um movimento é periódico se decorrido um intervalo de tempo T conhecido como o período, valem as seguintes relações:

$$\vec{r}(t+T)=\vec{r}(t)$$
$$\vec{v}(t+T)=\vec{v}(t)$$

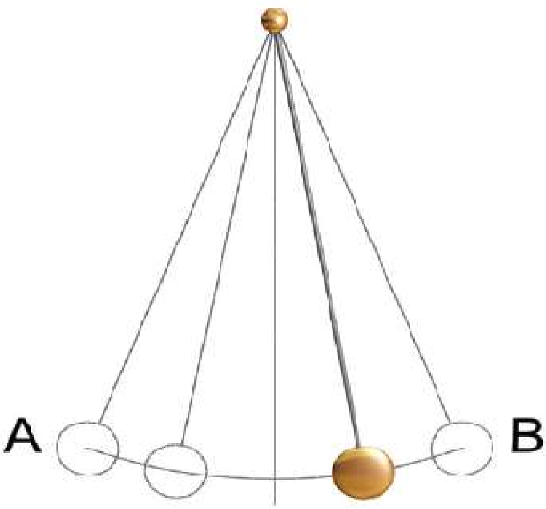
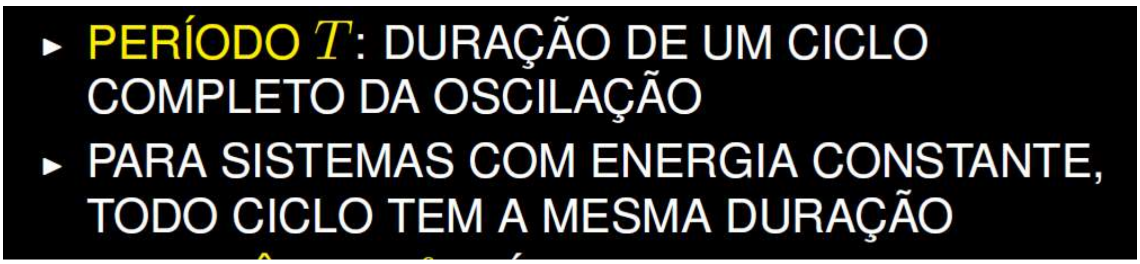


Fig. Um pêndulo executa um movimento de vai e vem periodicamente.

O mais comum dentre eles é aquele associado à rotação da Terra em torno de seu eixo. Outro movimento periódico é aquele associado ao movimento da Terra em torno do Sol. Ou ainda, o movimento de um pêndulo.

O intervalo de tempo decorrido entre duas repetições sucessivas do movimento é conhecido como o Período do movimento. Designamos o período pela letra T . Ou, por outra, ele é definido como sendo o intervalo de tempo necessário para completar um ciclo do movimento.

Fig. Determine o período de um pêndulo de um relógio



frequência- f

Definimos a frequência ν do movimento periódico como o inverso do período. Isto é:

$$f = \frac{1}{T}$$

Por essa definição pode-se ver que a frequência determina o número de vezes que o movimento se repete, por unidade de tempo.

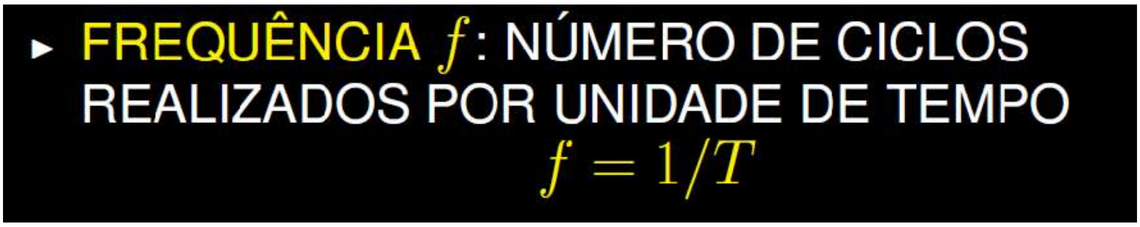
O movimento da terra é periódico uma vez que, depois de um ano, a Terra está na mesma posição no espaço e com a mesma velocidade que ela possuía no ano anterior.

As unidades do período são as mesmas unidades utilizadas como unidade de tempo. Portanto, o período é expresso em unidades como o segundo, o minuto e hora, dentre outras.

Para as unidades de frequência, temos igualmente várias opções, as mais utilizadas são

Hertz (Hz) - ciclos por segundo
r.p.m. - rotação por minuto
r.p.s. - rotação por segundo

No sistema internacional de medidas a unidade de frequência é o hertz.



Frequência angular- ω

Ela se relaciona com o período a partir da expressão:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Portanto,

$$\omega = 2\pi f$$

2-2 Sistema massa-mola: e a segunda Lei de Newton

um sistema que exib o MHS é o sistema massa mola. Nesse caso, a elongação é descrita pela coordenada x. Para o pêndulo, é o ângulo que o fio forma com a vertical.

No sistema massa-mola temos uma massa presa à mola por sua extremidade. A mola tem um comprimento característico L_0 que é o comprimento dela na posição de equilíbrio da mola. Ou seja, quando a mola não está sob a ação de forças o comprimento dela é L_0. Esse é um elemento importante.

A posição de equilíbrio será tomada como sendo um ponto de origem do nosso referencial. Assim, orientando o eixo para a direita, a posição da partícula de massa m, a posição da partícula presa à mola é caracterizada pela coordenada da partícula de massa m nesse referencial. A coordenada é determinada a partir da posição de equilíbrio.

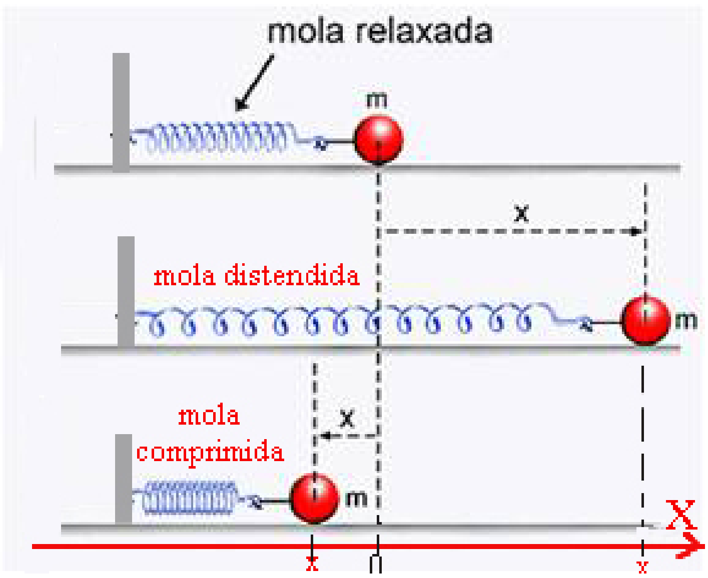


Fig. A partícula ocupa posições indicadas pela coordenada x.

De acordo com a lei de Hooke, escrevemos:

$$F = -kx$$

Onde k é a constante elástica da mola.

Assim, a equação de movimento é a segunda lei de Newton, a qual no caso se escreve como:

$$ma = -kx$$

E, portanto, a aceleração do movimento harmônico simples obedece a uma relação simples com a coordenada associada à posição:

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Definimos a frequência angular como sendo dada por:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

2-2.1 Mola na vertical

Uma mola pode ficar presa de forma a se movimentar na vertical. Nesse caso ela fica sob o efeito de duas forças: A força peso e a força elástica.

O ponto x_0 no qual as forças se anulam é tal que:

$$mg - kx_0 = 0 .$$

Esse é o novo ponto de equilíbrio, em torno do qual o corpo executará um movimento harmônico simples. A coordenada importante, agora é uma nova variável definida por

$$x' = x - x_0$$

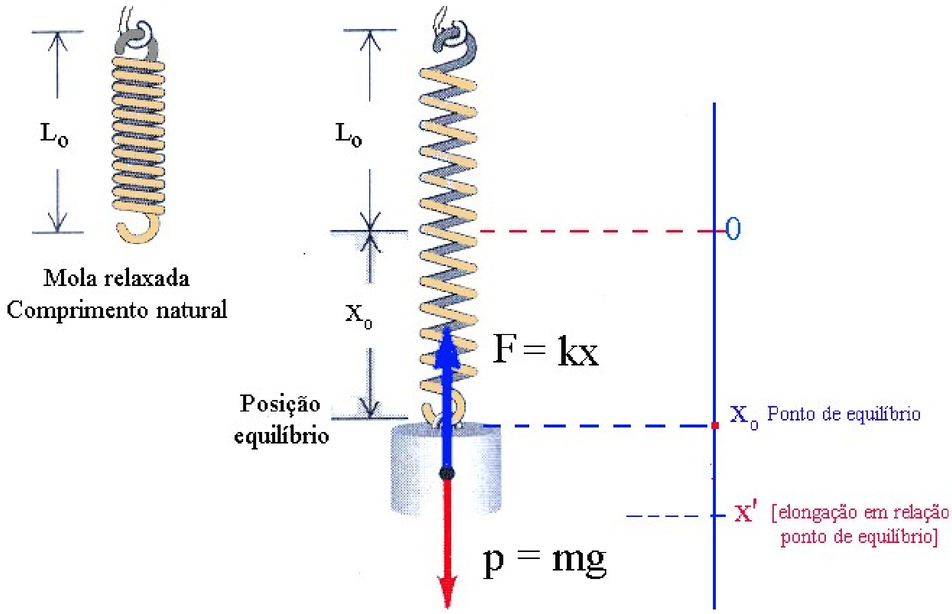


Fig. Mola na vertical e o novo ponto de equilíbrio. As oscilações se darão em torno desse ponto.

2-3 Equação horária de MHS

A solução mais geral da equação de Newton é uma combinação linear de duas funções trigonométricas. Ou seja,

O mais comum dentre eles é aquele associado à rotação da Terra em torno de seu eixo. Outro

A expressão acima pode ser entendida como uma definição de movimento harmônico simples.

A solução depende, alem da constante ω, a ser determinada, de duas outras constantes C e D. Essas duas últimas constantes são determinadas a partir das condições iniciais:

$$x(0) \quad \text{e} \quad v(0) \quad .$$

e esse aspecto é importante termos sempre em mente.

Considerando-se a propriedade do coseno:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)$$

Pode-se ver que a solução geral pode ser escrita ainda sob uma forma inteiramente equivalente a (000), ou seja:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

Donde inferimos que as constantes A e θ_0 se relacionam de uma forma simples com as constantes C e D. Tal relação è:

$$C = A\cos\theta_0$$
$$D = -Asen\theta_0$$

Temos assim duas formas equivalentes de escrever a equação horário do MHS, no que tange à equação horária da coordenada x.

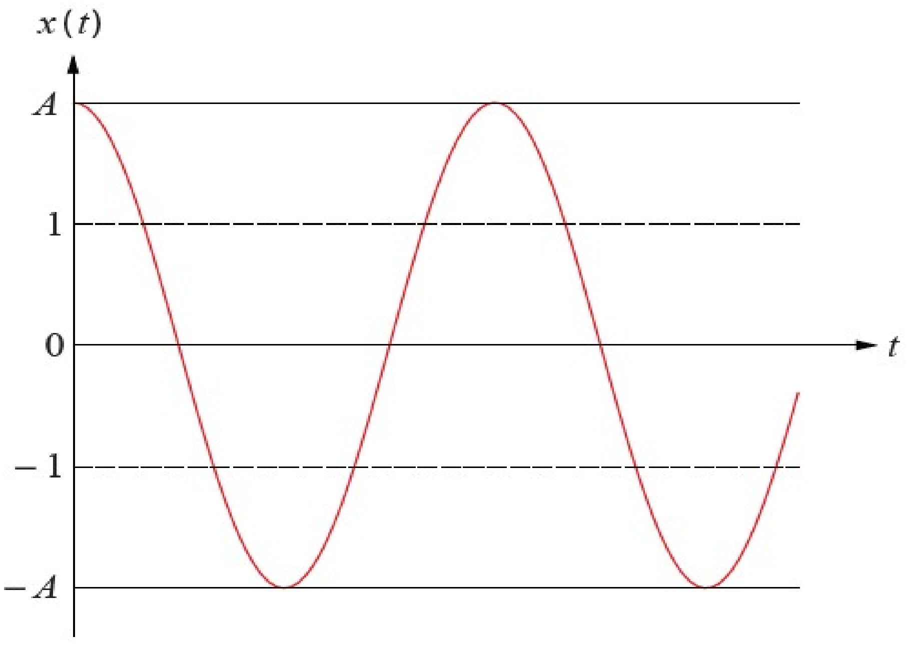


Fig. 26.6. Comportamento da posição em função do tempo.

Trata-se de uma solução envolvendo, de novo, três parâmetros desconhecidos e que serão determinados como segue.

Notemos primeiramente, que a solução proposta é tal que os valores máximos do deslocamento, x_M , e os valores mínimos, x_m, dos deslocamentos ocorrem para valores dados por:

$$x_M = A \qquad x_m = -A$$

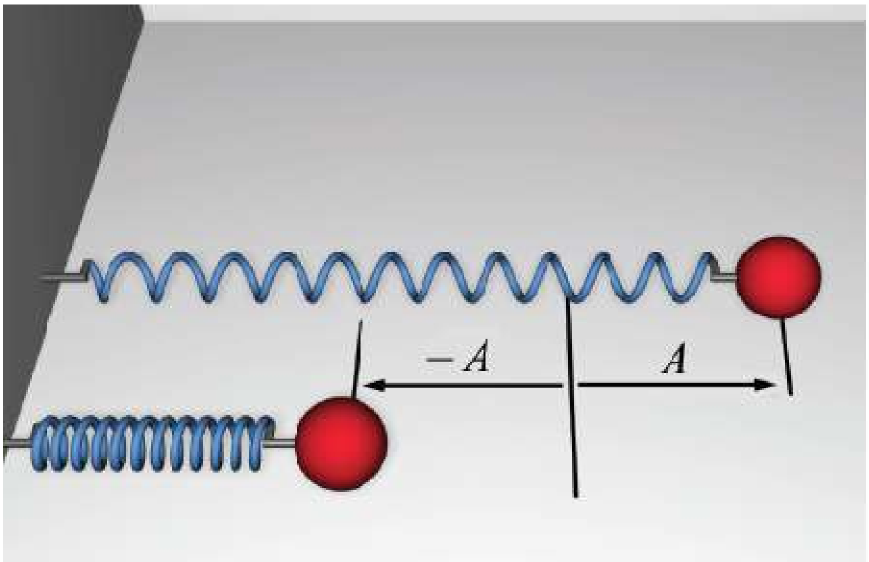


Fig. Ilustrando o conceito de amplitude.

Isso indica que o parâmetro A da expressão (000) é, portanto, a amplitude do movimento.
Denominamos o termo

$$\phi(t) = \omega t + \theta_0$$

De fase do MHS. Com isso, definimos a constante θ_0 como sendo a fase inicial. Isto é:

$$\theta_0 = \phi(t = 0)$$

A constante θ_0 é, portanto uma fase a qual, por enquanto, é uma constante arbitrária. No entanto, ela pode ser determinada, assim como a amplitude, a partir das condições iniciais. Ou seja, a partir do conhecimento de como o movimento se iniciou.

2-3.1 Período e Frequência desse MHS

Analisaremos agora a constante ω . A função cosseno é uma solução se ω for dado por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

E, portanto, a constante ω depende da massa e da constante elástica da mola. Veremos a seguir que essa constante está também relacionada ao período do movimento.

Como dito anteriormente, o movimento do oscilador harmônico é periódico. O período é determinado a partir da condição bastante geral enunciada na introdução e que nesse caso é:

$$x(t+T) = x(t)$$
$$v(t+T) = v(t)$$

Da solução proposta em (21.6) segue que a condição para que o movimento seja período do movimento é:

$$\cos(\omega t + \omega T + \theta_0) = \cos(\omega t + \theta_0)$$
$$sen(\omega t + \omega T + \theta_0) = sen(\omega t + \theta_0)$$

As condições acima são satisfeitas para valores de ωT tais que:

$$\omega T = 2\pi$$

Portanto, o período do movimento harmônico simples é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

A frequência, sendo o inverso do período será dada pela expressão

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{2\pi}$$

A frequência do oscilador harmônico depende, portanto, da massa da partícula e da constante elástica k.