

## 1: [Introdução](#)

Ao tratarmos o tópico óptico de raios, também conhecido como óptica geométrica, não levamos em consideração o caráter ondulatório da luz, nem sua polarização. Nestas condições, efeitos tais como difração e interferência não se evidenciam. Como veremos adiante, isto corresponde ao caso em que o comprimento de onda tende a zero ( $\lambda \rightarrow 0$ ), que é análogo ao limite clássico que se obtém da mecânica quântica ao tomarmos  $\hbar \rightarrow 0$ . Este raciocínio foi utilizado por Schrödinger na obtenção da sua famosa equação, como mostraremos no final do capítulo.

Entende-se como meio homogêneo aquele no qual o índice de refração não depende da posição, sendo portanto constante. Note que o meio pode ser simultaneamente homogêneo e anisotrópico, caso comum em cristais, para os quais o índice de refração tem valores diferenciados para distintas direções de propagação da luz. Já no meio não homogêneo, o índice de refração é dependente da posição, em geral devido às flutuações de densidade, temperatura, ou composição química do material.

Este capítulo inicia-se com uma breve exposição das propriedades de propagação de raios em meios homogêneos, com ênfase na sua refração ao atingir uma interface dielétrica plana. Este é um tópico que será revisto no [Cap. 6](#), depois que abordarmos os conceitos de polarização da luz e condições de contorno do campo eletromagnético, que nos levarão às equações de Fresnel. Em seguida, trataremos de uma situação bem mais interessante, a propagação de luz em meios não homogêneos. Mostraremos que a trajetória dos raios de luz podem descrever uma trajetória curva, diferentemente dos meios homogêneos, onde as trajetórias dos raios são retilíneas. Serão apresentados quatro tratamentos teóricos para este tipo de problema. Em particular, faremos, no final do capítulo, uma analogia entre a mecânica clássica e a óptica geométrica. Esta analogia será importante para a obtenção da equação de Schrödinger.

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

A área de óptica é um campo de estudos fascinante. De maneira simplificada, podemos dizer que ela é o ramo da Física que estuda a propagação da luz e sua interação com a matéria. Em muitas áreas da ciência e tecnologia, o entendimento de determinados conceitos pode ser difícil porque seus efeitos não são facilmente visualizados. Na óptica, entretanto, o simples uso de um laser permite a visualização de um dado efeito como função de vários parâmetros, facilitando o aprendizado. Isto se deve principalmente à coerência, monocromaticidade e colimação da luz proveniente deste instrumento, que permitem a observação de fenômenos tais como interferência e difração, nos quais a natureza ondulatória da luz se manifesta claramente. Entretanto, para se chegar ao desenvolvimento deste dispositivo, e de vários outros que são importantes no nosso cotidiano, um longo caminho foi percorrido e este percurso gerou um histórico bastante rico. Alguns aspectos que merecem destaque estão ligados às ideias sobre a natureza da luz e aos caminhos paralelos que a óptica e o eletromagnetismo trilharam durante séculos. Para se entender um pouco estes fatos, faremos, no transcorrer desta seção, uma breve revisão histórica do desenvolvimento dos conceitos principais ligados à óptica.

Outro fato importante para o qual deve-se chamar a atenção refere-se à analogia existente entre a óptica física e a mecânica quântica. No estado estacionário, ambas são descritas pela mesma equação de ondas e assim, vários fenômenos que se observa num laboratório de óptica podem ser usados para um melhor entendimento da mecânica quântica. Apenas como exemplo, o princípio da incerteza de Heisenberg pode ser verificado num experimento de difração de luz por uma fenda, como veremos no Cap. 9. Similarmente, outros fenômenos nos quais a matéria comporta-se de forma ondulatória encontra seu análogo na óptica física. Desta forma, o aprendizado da mecânica quântica torna-se mais simples com o auxílio da óptica.

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

## 2: Propagação de luz em meio homogêneos

Os trabalhos realizados até a primeira metade do século XVII estabeleceram que quando um raio de luz se propaga, obedece aos seguintes princípios:

- a) nos meios homogêneos a propagação é retilínea e
- b) quando um raio (raio 1) atinge a interface que separa dois meios distintos temos uma fração refletida (raio 2) e outra refratada (raio 3), conforme mostra a Fig. 2.1.

Como discutido por Huygens, cada meio é caracterizado por um parâmetro chamado índice de refração,  $n$ , que determina a velocidade com que o raio se propaga naquele meio. A direção seguida pelos raios 2 e 3 não é arbitrária. Demonstraremos na seção 6.6, usando as condições de contorno para o campo eletromagnético, que eles obedecem as seguintes regras:

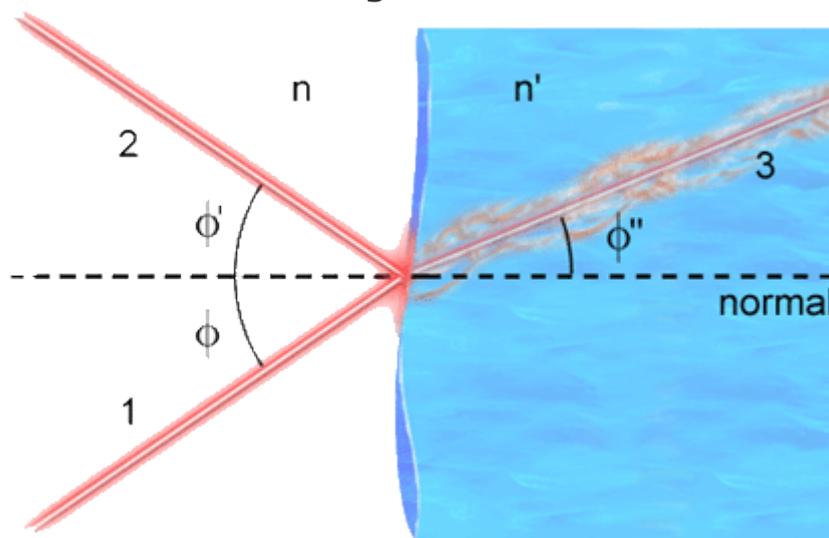
(i) os raios 1, 2 e 3 estão todos num mesmo plano, o qual é chamado de plano de incidência,

(ii)  $\phi = \phi'$

(iii)  $n \sin \phi = n' \sin \phi'$  (lei de Snell). Estas leis são muito importantes para o traçado dos raios ópticos na presença de interfaces dielétricas. Note que pela expressão,

(iii) quando um raio penetra num meio de índice de refração maior ele se aproxima da normal. Pela interpretação corpuscular de Newton isto só seria possível se a componente de velocidade do raio paralela à normal aumentasse.

Mas isto é contrário à descoberta experimental de Foucault, que constatou que um raio de luz diminui sua velocidade ao adentrar um meio de maior índice de refração, como apresentamos na seção 1.4.

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

**Fig. 2.1 - Reflexão e refração de um raio luminoso numa interface dielétrica.**

Em seguida trataremos o caso da propagação de luz em meios não homogêneos, para o qual obviamente um meio homogêneo é um caso particular. Através do princípio do tempo mínimo, ou princípio de Fermat, vamos deduzir a lei dos senos. Apresentaremos ainda quatro abordagens teóricas diferentes, que serão aplicadas a algumas situações específicas, em particular ao caso em que o índice de refração depende de apenas uma coordenada.

### 3: Propagação de luz em meios não homogêneos

A motivação para o estudo da propagação de raios em meios não homogêneos encontra-se nas diversas aplicações práticas e situações que ocorrem no nosso cotidiano. Dentre os vários exemplos que podem ser citados, destacamos os seguintes:

#### **1. Turbulência atmosférica**

Ao olharmos para as estrelas numa noite de céu claro, notamos que elas tremem ou piscam. Isto se deve às turbulências atmosféricas, tais como flutuações de pressão e densidade, que levam à formação de correntes de

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

vento e variações do índice de refração do ar. Como consequência, o caminho percorrido pelo raio de luz não é estável, levando a dificuldades para as observações astronômicas de corpos celestes distantes, o que obriga o uso de satélites, como por exemplo, o Hubble, ou o emprego de óptica adaptativa. Na óptica adaptativa emprega-se um laser de corante para excitar átomos de sódio existentes na camada superior da atmosfera. Isto gera uma mancha circular brilhante devido à luminescência do sódio, que devido às flutuações atmosféricas é visto de uma forma distorcida pelo telescópio. Um sistema servo-mecânico corrige então a curvatura de um dos espelhos do telescópio, de maneira a eliminar estas distorções. O tempo de resposta deste sistema de correção é da ordem de 0.1 s.

## **2. Efeito miragem**

O aquecimento do ar próximo à superfície da Terra modifica seu índice de refração e isto faz com que a luz execute uma trajetória não retilínea. Este efeito é claramente observado nas transmissões de corridas de carros pela TV. O ar, aquecido pelo contato com o asfalto, realiza um movimento convectivo ascendente fazendo tremer as imagens dos carros, como se houvesse uma tênue fumaça diante deles. O efeito do desvio da luz é ainda mais evidente para os raios rasantes, como quando viajamos de carro e observamos a imagem do céu e nuvens refletidas no asfalto, dando a impressão de poças d'água. Nesta situação, os raios rasantes são desviados pelo ar aquecido localizado próximo ao asfalto e atingem o olho do observador. Este efeito, conhecido como miragem, é comum em desertos, mas também pode ocorrer no mar, só que neste caso, a água resfria o ar e a imagem é invertida.

## **3. Comunicações ópticas**

Na transmissão de informações com luz, o meio no qual o raio se propaga desempenha um papel importante. Na transmissão de micro-ondas por visada direta, onde o sinal gerado por uma antena parabólica é captado por outra, flutuações na atmosfera produzem ruído no sinal transmitido, devido à instabilidade na trajetória dos raios, que por vezes não atingem perfeitamente a

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

antena receptora. Nas comunicações via fibra óptica, a luz gerada por um laser semiconductor fica confinada principalmente no núcleo, que possui índice de refração maior que a casca. Assim, a variação do índice de refração novamente modifica a propagação dos raios. A própria focalização de luz em fibras ópticas é muitas vezes realizada por uma lente do tipo GRIN (gradient index), cujo índice de refração diminui radialmente, de forma contínua. A propagação de luz nestes meios do tipo lente será discutida após introduzirmos as ferramentas matemáticas necessárias.

#### 4. Efeitos auto-induzidos

Ocorrem quando um feixe de luz laser percorre um meio do tipo Kerr, cujo índice de refração depende da intensidade de acordo com:  $n(l) = n_0 + n_2 l$ , onde  $n_0$  é o índice de refração para baixas intensidades e  $n_2$  é chamado de índice de refração não linear. O feixe de luz laser possui em geral um perfil transversal de intensidade do tipo gaussiano, que modifica o índice de refração na direção radial, produzindo o efeito de uma lente. A origem de  $n_2$  pode ter natureza térmica ou eletrônica, e sua determinação constitui um assunto de pesquisa atual. Em comunicações por fibras ópticas, a presença deste tipo de efeito pode compensar a dispersão da velocidade de grupo e dar origem a sólitons. Trataremos deste assunto brevemente no [Cap. 5](#).

Além dos exemplos citados acima, o estudo da propagação de luz em meios não homogêneos é importante do ponto de vista histórico, pois permite entender como a mecânica ondulatória foi introduzida por Schrödinger. Mesmo assim, o material relativo a este tópico está disperso em vários livros e artigos, e sua compilação justifica a existência do presente texto.

Do ponto de vista teórico, a propagação de luz em meios não homogêneos pode ser tratada de quatro maneiras distintas, que cronologicamente seguem a seguinte ordem:

- a) lei de Snell generalizada,
- b) princípio de Fermat,

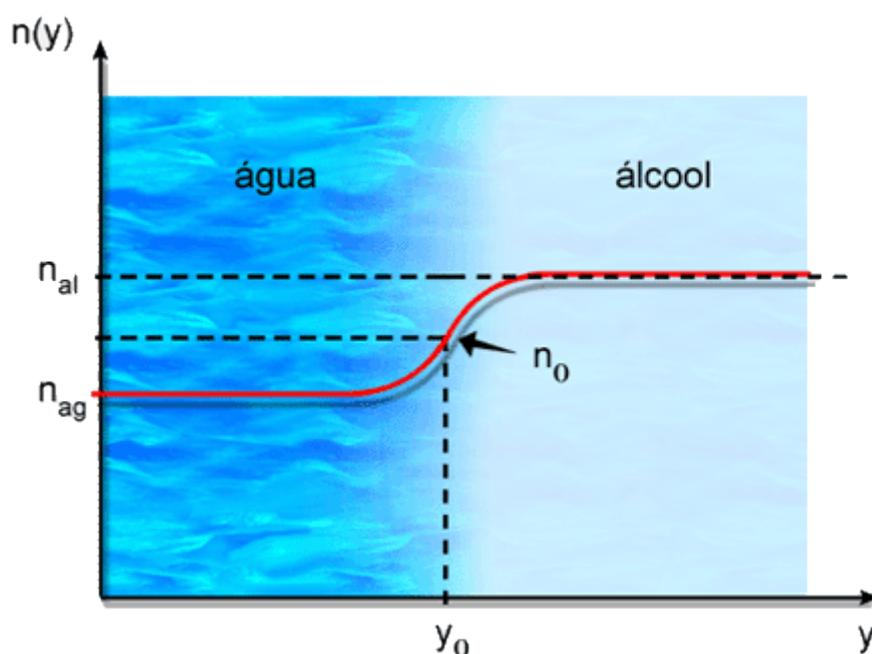
**Autor: Sergio Carlos Zilio**

- c) equação do eikonal e
- d) limite clássico da equação de Schrödinger.

No restante do capítulo, desenvolveremos estas análises teóricas, com a aplicação a alguns casos particulares.

#### 4: A lei de Snell generalizada

Como se tornará evidente mais situação, tomemos uma mistura não homogênea de água ( $n=1.333$ ) e álcool ( $n=1.361$ ), que apresenta uma variação de índice de refração como indicada na Fig. 2.2. adiante, este tipo de abordagem se aplica ao caso unidimensional, ou seja, quando o índice de refração varia em apenas uma direção. Como exemplo desta



**Fig. 2.2 - Variação do índice de refração numa mistura não homogênea de água e álcool ( $n_{ág}=1.333$  e  $n_{al}=1.361$ ).**

Vamos ainda supor que o raio de luz penetra nesta mistura a uma altura  $y_0$ , localizada na região de transição água-álcool, propagando-se ao longo do eixo  $z$ . Esta situação está esquematizada na Fig. 2.3. Como a variação de  $n$  é pequena e ocorre numa região relativamente grande (da ordem de um centímetro), admitiremos que o desvio sofrido pelo feixe é pequeno. Assim, o

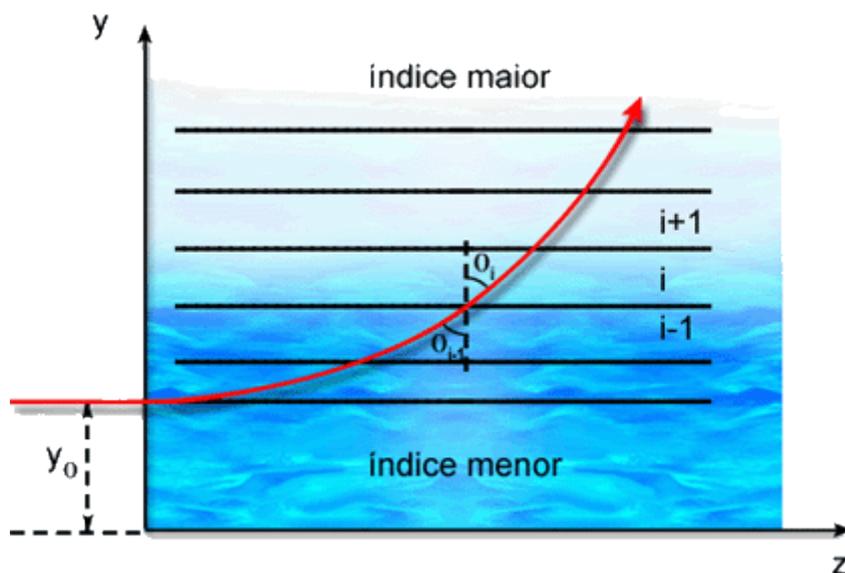
**Autor: Sergio Carlos Zilio**

raio deslocar-se-á pouco da altura  $y_0$  e o índice de refração pode ser expandido em série de Taylor, de acordo com:

$$n(y) = n_0 + \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0} (y - y_0) \quad (2.1)$$

onde  $n_0$  e  $\left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0}$  são respectivamente o índice de refração e seu gradiente na

altura  $y_0$ . A seguir, vamos utilizar a lei de Snell, que já era conhecida experimentalmente em 1621. Para isto, vamos imaginar a região de transição água-álcool dividida num grande número de lâminas planas e paralelas, de espessuras tão finas quanto se queira, de forma que em cada uma delas o índice de refração é praticamente constante. As lâminas são paralelas ao eixo  $z$  e portanto perpendiculares à direção em que  $n$  varia. O paralelismo entre as faces de cada lâmina é motivado pelo fato de  $n$  variar apenas ao longo de  $y$ .



**Fig. 2.3 - Desvio de um raio de luz que incide na mistura água-álcool a uma altura  $y_0$ . A magnitude do desvio foi exagerada para melhor visualização.**

Podemos aplicar a lei de Snell na interface que separa duas lâminas consecutivas  $i$  e  $i-1$ :  $n_i \text{sen} \theta_i = n_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1}$ , onde  $\theta_i$  é o ângulo que o raio faz com o eixo  $y$ . Como o índice de refração é constante em cada uma das lâminas, o raio se propaga em linha reta até a próxima interface, aonde chega

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

com o ângulo de incidência  $i$ . Novamente aplicamos a lei de Snell:  $n_i \text{sen} \theta_i = n_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1}$ . Desta forma, o produto  $n \text{sen}$  mantém-se constante conforme o raio se propaga pelas diferentes lâminas. Tomando o limite em que as espessuras das lâminas tendem a zero, obtemos a lei de Snell generalizada:

$$n(y) \cos \theta = \text{constante} \quad (2.2)$$

que estabelece que o ângulo  $\theta$  varia continuamente com  $y$ , conforme  $n$  varia. Podemos ainda trabalhar com o ângulo  $\beta(y)$  que o raio faz com as faces das lâminas. Levando em conta que  $\beta$  é o ângulo complementar de  $\theta$  e que o raio inicialmente propaga-se ao longo do eixo  $z(\beta(y_0)=0)$ , a lei de Snell generalizada fica:

$$n(y) \cos \beta = n_0 \quad (2.3)$$

O raio descreve uma trajetória curva dada por  $y = y(z)$ , cuja inclinação é:

$$\frac{dy}{dz} = \text{tg} \beta = \frac{\text{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta} \quad (2.4)$$

Usando as expressões de  $\cos \beta$  e  $n(y)$  dadas pelas equações (2.3) e (2.1), temos:

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{\frac{n^2}{n_0^2} - 1} = \sqrt{\frac{2}{n_0} \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0}} (y - y_0) \quad (2.5)$$

onde o termo quadrático em  $\frac{dn}{dy}$  foi desprezado. A eq. (2.5) pode facilmente ser integrada resultando em:

$$y = y_0 + \frac{1}{2n_0} \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0} z^2 \quad (2.6)$$

que representa a trajetória parabólica do raio dentro do meio. No capítulo final do livro apresentamos uma demonstração na qual se mede o desvio de um raio de luz laser ao percorrer certa distância dentro do meio. Isto possibilita a medida do gradiente do índice de refração como função da altura  $y$ . Devido ao

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

fato deste gradiente não ser constante, observamos a focalização (ou desfocalização) da luz do laser, como descrito a seguir.

Consideremos um feixe de luz laser com diâmetro  $\Delta y$ , de tal forma que a parte inferior do raio penetra no meio a uma altura  $y_0$  e a parte superior em  $y_0 + \Delta y$ . Vamos ainda considerar  $\Delta y$  suficientemente pequeno tal que o índice de refração seja aproximadamente o mesmo ( $n_0$ ) ao longo de todo o perfil transversal do feixe. A uma distância  $z$  no interior do meio, a parte inferior do feixe satisfará a eq. (2.6), enquanto que a parte superior executará uma trajetória descrita por:

$$y' = (y_0 + \Delta y) + \frac{1}{2n_0} \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0 + \Delta y} z^2 \quad (2.7)$$

e assim, o diâmetro do feixe,  $\Phi = y' - y$ , como função da distância de propagação, fica:

$$\Phi = \Delta y + \frac{1}{2n_0} \left\{ \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0 + \Delta y} - \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0} \right\} = \Delta y = \left\{ 1 + \frac{1}{2n_0} \left. \frac{d^2n}{dy^2} \right|_{y_0} z^2 \right\} \quad (2.8)$$

Desta forma, o desvio sofrido pelo feixe está ligado ao gradiente de  $n$ , enquanto que seu diâmetro fornece a derivada segunda de  $n$ . De acordo com a Fig. 2.2, próximo da água o feixe será desfocalizado e na região mais próxima do álcool haverá focalização. Voltaremos a discutir este assunto quando apresentarmos a demonstração do capítulo final.

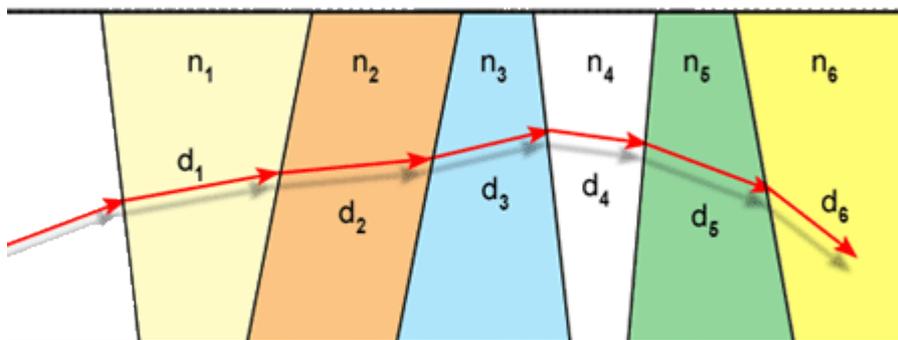
## 5: O princípio de Fermat

Introduzido em 1657, o princípio de Fermat estabelece que a luz se propaga entre dois pontos no menor tempo possível, no caso em que ela não sofre reflexões. Consideremos um raio se propagando por meios com diferentes índices de refração, conforme mostra a Fig. 2.4. O tempo total para ele realizar o percurso indicado é dado pela somatória dos tempos gastos em cada meio:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

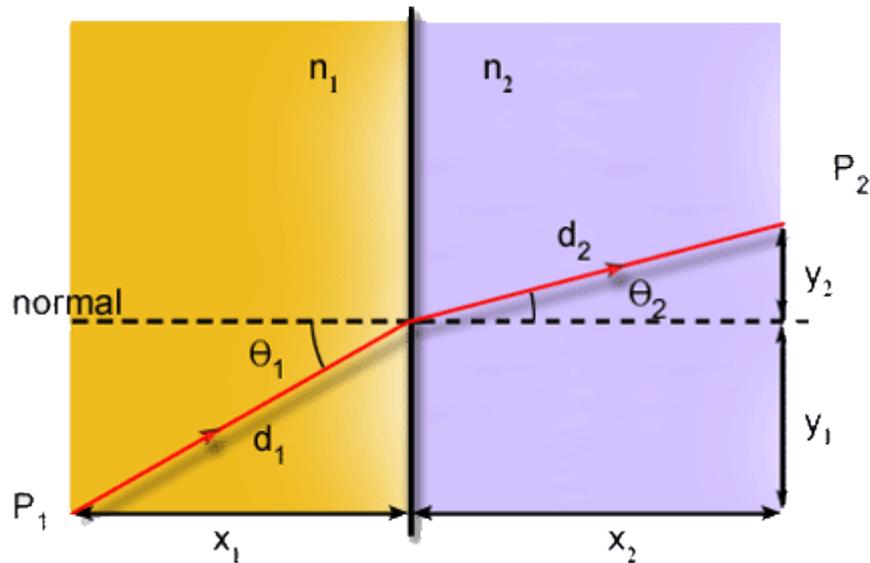
$$t = \sum_{i=1}^N t_i = \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{v_i} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N n_i d_i \quad (2.9)$$

onde  $d_i$  é a distância percorrida em cada meio, com velocidade  $v_i = \frac{c}{n_i}$ .  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $n_i$  é o índice de refração do  $i$ -ésimo meio. A somatória  $[\Delta] = \sum n_i d_i$  é denominada de caminho óptico. Como  $c$  é constante, o tempo mínimo implica no menor caminho óptico possível.



**Fig. 2.4 - Raio se propagando numa série de meios homogêneos com índices de refração diferentes.**

Uma aplicação simples do princípio de Fermat é a dedução da lei de Snell, que apresentamos a seguir. Consideremos um raio que se propaga entre dois pontos fixos,  $P_1$  e  $P_2$ , localizados em meios com índices de refração distintos,  $n_1$  e  $n_2$ , conforme mostra a Fig. 2.5. As distâncias  $x_1$  e  $x_2$  são fixas, mas  $y_1$  e  $y_2$  podem variar para a minimização do tempo. Entretanto, como os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são fixos,  $y_1$  e  $y_2 = Y$  é constante. O caminho óptico será dado por:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

**Fig. 2.5 - Geometria utilizada na dedução da lei de Snell pelo princípio de Fermat.**

$$[\Delta] = \sum_{l=1}^N n_l d_l = n_1 d_1 + n_2 d_2 \quad (2.10)$$

que de acordo com a geometria da Fig. 2.5 pode ser expresso como:

$$[\Delta] = n_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = n_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{x_2^2 + (Y - y_1)^2} \quad (2.11)$$

A eq. (2.11) estabelece a variação de  $[\Delta]$  com  $y_1$ . Para encontrarmos seu valor mínimo igualamos sua derivada a zero:

$$\frac{d[\Delta]}{dy_1} = \frac{n_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{n_2 (Y - y_1)}{\sqrt{x_2^2 + (Y - y_1)^2}} \quad (2.12)$$

De acordo com a geometria da Fig. 2.5, as frações da eq. (2.12) correspondem aos senos de 1 e 2, de forma que assim obtemos a lei de Snell:

$$n_1 \text{sen} \theta_1 - n_2 \text{sen} \theta_2 = 0 \quad (2.13)$$

Até agora nossa apresentação do princípio de Fermat restringiu-se ao caso em que a luz se propaga através de vários meios homogêneos, porém com diferentes índices de refração. Queremos agora analisar o caso em que a propagação ocorre num meio em que o índice de refração varia continuamente ao longo do percurso do raio. Neste caso, a somatória da eq. (2.9) deve naturalmente ser substituída por uma integral:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$$[\Delta] = \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds \quad (2.14)$$

onde  $s$  é distância percorrida pelo feixe entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  e  $n(s)ds$  é o caminho óptico elementar. O princípio de Fermat estabelece a existência de um caminho muito bem definido para o raio ir de  $P_1$  e  $P_2$ . Trata-se de um princípio variacional que pode ser colocado da seguinte maneira:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds = 0 \quad (2.15)$$

Quando um raio se propaga no espaço,  $ds$  é expresso em coordenadas cartesianas como:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (2.16)$$

Onde  $\dot{x} = \frac{dx}{dz}$  e  $\dot{y} = \frac{dy}{dz}$ . Note que  $dz$  foi arbitrariamente colocado em evidência, mas

também poderíamos ter escolhido  $dx$  ou  $dy$ . Assim, o princípio de Fermat fica:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(x, y, z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} dz = 0 \Rightarrow \delta \int_{P_1}^{P_2} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) dz = 0 \quad (2.17)$$

com:

$$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) = n(x, y, z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (2.18)$$

onde supusemos que  $n$  pode variar nas três direções. A solução da eq. (2.17) já foi estabelecida no contexto da mecânica clássica, explicitamente ao se tratar o princípio da mínima ação:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) dt = 0 \quad (2.19)$$

onde  $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  é a Lagrangeana do sistema mecânico,  $x$ ,  $y$ , e  $z$  são as coordenadas cartesianas e  $t$  é o tempo. Comparando as equações (2.17) e (2.19), notamos que  $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, z)$  faz o papel da Lagrangeana e  $z$ , o de tempo. Como já estudado na mecânica clássica, a solução da eq. (2.17) leva a um conjunto de

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

equações do tipo Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.20b)$$

Queremos agora aplicar estas equações na análise da trajetória do raio se propagando na mistura de água e álcool. De acordo com a simetria do problema, a trajetória do raio está confinada no plano yz e a função f independe de x e  $\dot{x}$ . Em geral, a análise de problemas onde o índice de refração depende de apenas uma coordenada torna-se matematicamente mais simples se a coordenada "tempo" for tomada na direção em que n varia. Assim, tomaremos  $ds\sqrt{1+\dot{z}^2}dy$ , onde agora dy foi colocado em evidência. Neste caso, a equação de Euler-Lagrange torna-se:

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2.21)$$

onde  $f(\dot{z}, y) = n(y)\sqrt{1+\dot{z}^2}$  independe de z e portanto  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ . Isto simplifica a solução da eq. (2.21) pois  $\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}$  será constante. Desta forma, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = \frac{n(y)\dot{z}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = n_0 \quad (2.22)$$

onde a condição inicial  $\beta(y_0) = 0$  foi usada. Note que  $\text{tg}\beta(y_0) = \frac{dy}{dz} = 0$  para  $z = 0(y = y_0)$ . Portanto,  $\dot{z} = \cot g = \infty$  neste ponto e os  $\dot{z}$  do numerador e denominador da eq. (2.22) se cancelam. Elevando esta equação ao quadrado obtemos:

$$n^2(y)\dot{z}^2 = n_0^2(1+\dot{z}^2) \quad (2.23)$$

Substituindo a expressão aproximada para o índice de refração

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$n(y) = n_0 + \left(\frac{dn}{dy}\right)(y - y_0)$  e considerando que  $\dot{z} = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dz}\right)} = \frac{1}{\dot{y}}$ , obtemos:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dz} = \sqrt{\frac{2}{n_0} \frac{dn}{dy} \Big|_{y_0}} (y - y_0) \quad (2.24)$$

onde o termo quadrático em  $\frac{dn}{dy}$  foi desprezado. Esta equação é idêntica à eq. (2.5) e

sua integração leva à trajetória parabólica da eq. (2.6) obtida na seção precedente. Com esta análise chegamos ao mesmo resultado obtido com a lei de Snell generalizada. Entretanto convém salientarmos que as equações de Euler-Lagrange são mais gerais pois permitem tratar problemas onde o índice de refração varia nas três direções.

## 6: [A equação dos raios](#)

Através da manipulação matemática das equações de Euler-Lagrange, obtidas com o princípio de Fermat, é possível a obtenção de uma equação vetorial elegante, que descreve a propagação de um raio num meio óptico não homogêneo. Para deduzirmos esta equação dos raios, começaremos com a eq. (2.20a):

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.25)$$

onde a expressão para  $f$ , dada pela eq. (2.18), foi utilizada na derivada relativa a  $x$ . Efetuando também a derivada com relação a obtemos:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{n\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.26)$$

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

Da eq. (2.16) temos:  $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . Portanto, usando a regra da cadeia

no termo  $\dot{x} = \frac{dx}{dz}$  do lado esquerdo da equação temos:

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.27)$$

Aplicando novamente a regra da cadeia na derivada relativa a z chegamos a:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.28)$$

Partindo da outra equação de Euler-Lagrange, eq. (2.20b), obtemos de forma análoga a expressão envolvendo a coordenada y:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (2.29)$$

Combinando as equações (2.28) e (2.29) é possível encontrar uma expressão análoga para a coordenada z:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z} \quad (2.30)$$

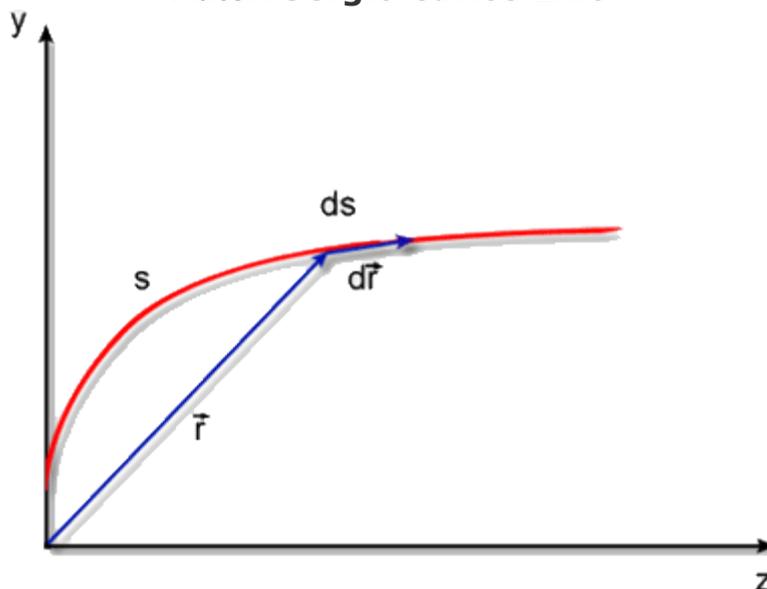
Multiplicando as equações (2.28), (2.29) e (2.30) respectivamente pelos versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , e somando as três, obtemos a equação vetorial que fornece a propagação do raio dentro do meio não homogêneo:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n \quad (2.31)$$

A Fig. 2.6 mostra a geometria de  $s$ ,  $ds$ ,  $\vec{r}$  e  $d\vec{r}$ . É interessante notar que  $|d\vec{r}| = ds$ . A direção de propagação do raio de luz é caracterizada por um

versor  $\hat{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ . O vetor é definido a partir da escolha de uma origem arbitrária,

$s$  é o deslocamento ao longo do raio e  $ds$  é um incremento infinitesimal deste deslocamento.

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

**Fig. 2.6 - Geometria das grandezas utilizadas na equação dos raios.**

Para finalizarmos esta seção, vamos aplicar a equação dos raios à análise da propagação de luz pela mistura de água e álcool. O uso da eq. (2.31) é em geral simples na aproximação paraxial, onde o desvio do raio é pequeno. Neste caso,  $ds$  está praticamente na direção  $z$  e assim podemos substituir  $\frac{d}{ds}$  por  $\frac{d}{dz}$

. Como a trajetória do raio se dá no plano  $yz$ , escrevemos  $\vec{r} = y\hat{j} + z\hat{k}$ , de onde tiramos  $\frac{d\vec{r}}{dz} = \frac{dy}{dz}\hat{j} + \hat{k}$ . O gradiente de  $n$  pode ser calculado a partir da eq. (2.1)

e resulta em  $\vec{\nabla}n = \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0} \hat{j}$ . Substituindo estas grandezas na equação dos raios

obtemos:

$$\frac{d}{dz} \left[ n(y) \left( \frac{dy}{dz} \hat{j} + \hat{k} \right) \right] \left. \frac{dn}{dy} \right|_{y_0} \hat{j} \quad (2.32)$$

Como  $n(y)$  não depende de  $z$ , ele pode ser tirado para fora da derivada. é um vetor constante e sua derivada relativa a  $z$  é nula. Portanto, da equação vetorial (2.32) sobra apenas a componente na direção, dada por:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$$\left[ n_0 + \frac{dn}{dy} \Big|_{y_0} (y - y_0) \right] \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{dn}{dy} \Big|_{y_0} \quad (2.33)$$

onde  $n(y)$ , dado pela eq. (2.1) já foi substituído.

Na aproximação paraxial, o raio se desvia pouco do eixo  $z$  ( $y \approx y_0$ ) e além disto  $\frac{dn}{dy}$  é pequeno. Logo podemos desprezar o segundo termo entre

colchetes do lado esquerdo da equação e assim obtemos uma expressão onde a derivada segunda de  $y$  é constante (equação da parábola). A solução desta equação é simples e leva aos resultados já obtidos anteriormente:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n_0} \frac{dn}{dy} \Big|_{y_0} \quad (2.34)$$

que implica em:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{n_0} \frac{dn}{dy} \Big|_{y_0} z \quad (2.35)$$

de forma que

$$y = y_0 + \frac{1}{2n_0} \frac{dn}{dy} \Big|_{y_0} z^2 \quad (2.36)$$

onde as condições iniciais  $\dot{y}(z=0)$  e  $y(z=0) = y_0$  foram utilizadas. Portanto, recuperamos os resultados já encontrados pela lei de Snell generalizada e pelas equações de Euler-Lagrange.

## 7: A função eikonal

Neste ponto, deixaremos de lado a óptica geométrica para introduzirmos o conceito de eikonal. Esta função, obtida a partir da óptica ondulatória, é importante pois representa o papel da função característica de Hamilton na mecânica clássica e é de grande valia quando se faz a analogia desta com a

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

óptica geométrica. Como veremos no Cap. IV, a equação das ondas eletromagnéticas na sua forma reduzida (sem dependência temporal) é dada por:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.37)$$

onde  $k(\vec{r}) = \frac{2\pi n(\vec{r})}{\lambda}$  é o vetor de propagação, que depende da posição,

uma vez que  $n(\vec{r})$  depende da posição num meio não homogêneo. A solução da equação de ondas é uma grandeza complexa, que contém um termo de amplitude e outro de fase, e pode ser escrita como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\phi(\vec{r})} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ik_0 S(\vec{r})} \quad (2.38)$$

sendo  $\vec{E}_0(\vec{r})$  a amplitude (envelope),  $\phi$  a fase da onda e  $S(\vec{r})$  a função eikonal, que dá a direção de propagação da onda em termo de seus co-senos diretores.  $k_0$  é o vetor de onda no vácuo, dado por  $k_0 = \frac{2\pi n}{\lambda}$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz no vácuo ( $n=1$ ). As superfícies  $S(\vec{r}) = \text{constante}$  formam as equifases da onda, e esta se propaga perpendicularmente a estas superfícies. Para visualizarmos este fato, consideremos uma onda plana, cuja fase é dada por:

$$\phi(\vec{r}) = \vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (2.39)$$

como veremos posteriormente. Assim, a função eikonal fica sendo:

$$S(x, y, z) = \frac{k_x}{k_0} x + \frac{k_y}{k_0} y + \frac{k_z}{k_0} z \quad (2.40)$$

A direção perpendicular a esta superfície pode ser encontrada pelo cálculo de seu gradiente:

$$\vec{\nabla} S(x, y, z) = \frac{\vec{k}}{k_0} = n\hat{u} \quad (2.41)$$

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

onde  $\hat{u}$  é um versor paralelo a  $\hat{k}$  e que portanto define a direção de propagação da onda. Realizando o produto escalar  $\vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla}S$  obtemos:

$$|\vec{\nabla}S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad (2.42)$$

que é conhecida como a equação do eikonal. Esta equação também pode ser obtida diretamente pela substituição da eq. (2.38) em (2.37), mas isto será deixado como exercício.

O conceito de função eikonal pode ser utilizado na dedução da equação dos raios que obtivemos na seção 2.6. Fazendo uso da Fig. 2.6, de onde temos

$|d\vec{r}| = ds$  e  $\hat{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ , podemos escrever  $\vec{\nabla}S = n\hat{u} = \frac{nd\vec{r}}{ds}$ , sendo que este último

termo já é o que entra na equação dos raios. Tendo em mente a eq. (2.31) escrevemos:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \vec{\nabla}S \quad (2.43)$$

O lado direito da equação pode ser trabalhado com o uso da regra da cadeia:

$$\frac{d}{ds} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \quad (2.44)$$

e pelo cálculo do gradiente da eq. (2.42) (equação do eikonal):

$$\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}S \right)^2 = 2\vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}S \right) = 2n\vec{\nabla}n \quad (2.45)$$

Usando  $\vec{\nabla}S = n \frac{d\vec{r}}{ds}$  no segundo termo desta equação obtemos:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}S \right) = \frac{d}{ds} \vec{\nabla}S = \vec{\nabla}n \quad (2.46)$$

onde a eq. (2.44) foi utilizada no primeiro termo da esquerda. Substituindo a igualdade da direita na eq. (2.43) recuperamos a equação dos raios.

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

Com a função eikonal é possível obter-se as condições de contorno para os raios de luz. Lembrando que o rotacional do gradiente é nulo, temos:

$$\int_A \left[ \vec{\nabla}(\vec{\nabla}S) \right] d\vec{a} = \oint \vec{\nabla}S \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.47)$$

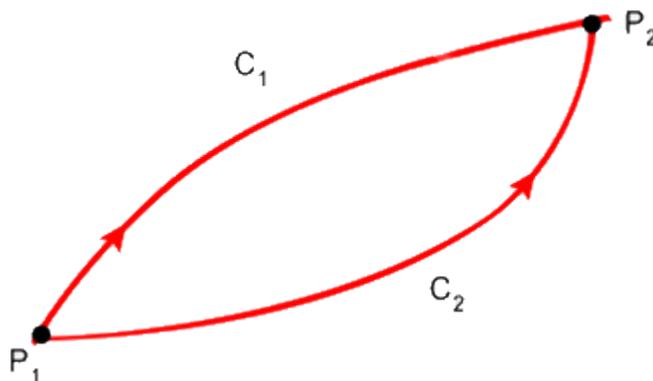
onde o teorema de Stokes foi usado. Como  $\vec{\nabla}S = n \frac{d\vec{r}}{ds}$ , temos:

$$\oint n \frac{d\vec{r}}{ds} d\vec{l} = \oint n ds = 0 \quad (2.48)$$

Nesta última passagem supusemos que o caminho de integração coincide com o caminho dos raios de luz, isto é,  $\hat{u}$  é paralelo a  $d\vec{l}$ . De acordo com a Fig. 2.7 podemos definir os caminhos  $C_1$  e  $C_2$ , e a eq. (2.48) pode ser expressa como:

$$\int_{C_1} n ds_1 = \int_{C_2} n ds_2 \quad (2.49)$$

de onde concluímos que dois raios de luz que deixam um ponto  $P_1$  e chegam até um ponto  $P_2$  por caminhos geométricos diferentes, o fazem com o mesmo valor de caminho óptico. Exemplificando, todos os raios que saem de um dado ponto de um objeto colocado na frente de uma lente e chegam ao mesmo ponto da imagem, o fazem de tal forma que as integrais de linha de  $nds$  por diferentes caminhos geométricos fornecem o mesmo valor.



**Fig. 2.7 - Possíveis caminhos seguidos pelos raios de luz.**

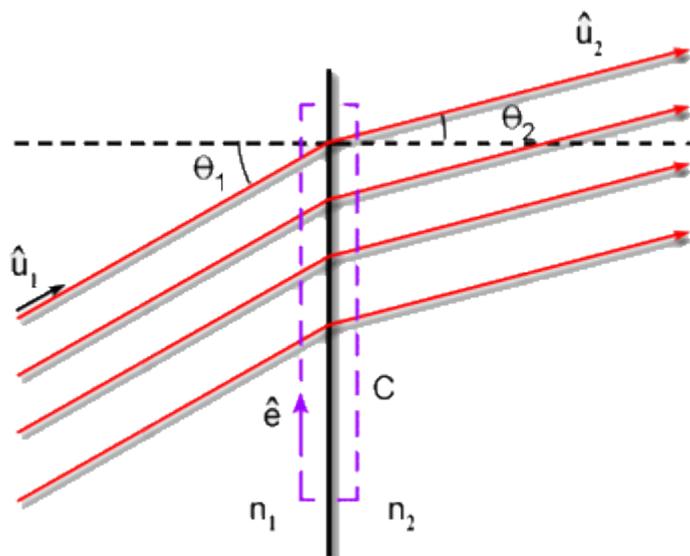
Podemos também usar a eq. (2.48) para deduzir a lei de Snell. Neste caso, o caminho de integração dado pela curva  $C$  não corresponde à direção de

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

propagação dos raios de luz. Considere a Fig. 2.8, que mostra raios incidentes sobre uma interface que separa dois meios. Neste caso temos:

$$n_1 \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)_1 \hat{e} = n_2 \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)_2 \hat{e} \Rightarrow n_1 \hat{u}_1 e = n_2 \hat{u}_2 e \quad (2.50)$$

que nos leva diretamente à lei de Snell, já que  $\hat{u}e = \text{sen}\theta$ . A seguir, vamos usar a ideia de função eikonal para estabelecer um paralelo entre a óptica geométrica e a mecânica clássica.



**Fig. 2.8 - Raios de luz que incidem numa interface dielétrica.**

## 8: Analogia entre a mecânica clássica e a ótica geométrica

Em 1828, Hamilton formulou a analogia entre a óptica geométrica e a mecânica Newtoniana de uma partícula. Esta formulação está discutida em detalhes na referência 2.3 e aqui fazemos apenas um breve resumo das ideias envolvidas. Já vimos um pouco desta analogia quando estudamos o princípio de Fermat, que é equivalente ao princípio da mínima ação, ou ação estacionária. Vamos ver agora outros aspectos desta equivalência. Para a obtenção da equação de Hamilton-Jacobi, lembremo-nos que a ação é dada por:

$$A(q, p, t) = \int_c L(q, p, t) dt + C \quad (2.51)$$

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

onde  $L$  é a Lagrangeana,  $q$  e  $p$  são respectivamente a coordenada e velocidade generalizadas,  $t$  é o tempo e  $C$  é uma constante. Denominando de  $H$  o Hamiltoniano do sistema mecânico e fazendo uma transformação canônica tal que o novo Hamiltoniano,  $K$ , seja nulo, obtemos a equação de Hamilton-Jacobi:

$$K(q, p, t) = H\left(q, \frac{\partial A}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.52)$$

No caso em que a energia se conserva,  $H$  não depende do tempo e a eq. (2.52) pode ser integrada, resultando em:

$$A(q, p, t) = W(q, p) - Et \quad (2.53)$$

onde  $H = E$  é a energia da partícula,  $A$  é a função principal de Hamilton e  $W$  é conhecida como função característica de Hamilton. Na eq. (2.52), o momentum é representado por  $\frac{\partial A}{\partial q}$ , e como nos sistemas conservativos apenas  $W$

depende de  $q$ , como visto na eq. (2.53), temos  $p = \frac{\partial W}{\partial q}$ . Este resultado pode

ser estendido para três dimensões fornecendo:

$$\vec{p} = \vec{\nabla} W \quad (2.54)$$

Isto significa que a partícula caminha perpendicularmente à superfície definida pela função  $W$ . Neste ponto já é possível notar-se alguma semelhança com a óptica geométrica, pois de acordo com a eq. (2.41), um raio de luz propaga-se perpendicularmente à superfície  $S(x, y, z)$ , com o índice de refração fazendo o papel de momentum.

Para analisarmos o movimento de uma partícula, consideremos a superfície  $A = \text{constante} = a$ , como uma frente de onda propagando-se no espaço das configurações. De acordo com a Fig. 2.9, a variação da função  $W$  num intervalo de tempo  $dt$  é dada por:

$$dW = W' - W = E \cdot dt \quad (2.55)$$

Usando o conceito de derivada direcional temos:

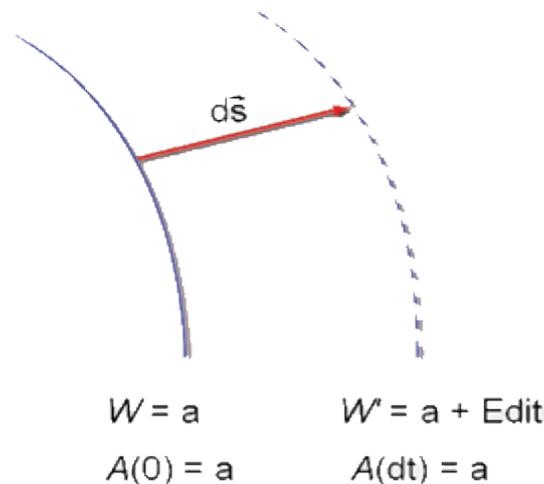
**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$$dW = \vec{\nabla}W \cdot d\vec{s} = |\vec{\nabla}W| ds \quad (2.56)$$

onde  $d\vec{r}$  é um vetor perpendicular à superfície  $A = \text{constante}$ . Igualando as equações (2.55) e (2.56) obtemos a velocidade de fase para a propagação da frente de onda como:

$$vf = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\vec{\nabla}W|} = \frac{E}{p} = \frac{E}{\sqrt{2mT}} \quad (2.57)$$

onde  $T = \frac{p^2}{2m}$  é a energia cinética da partícula. Deste modo, vemos que a velocidade de fase aumenta quando a velocidade da partícula diminui. Entretanto, como veremos posteriormente, é a velocidade de grupo (velocidade de um pacote de onda) que é igual à velocidade da partícula, e não a velocidade de fase.



**Fig. 2.9 - Propagação da superfície  $A(t)=a$  no espaço das configurações.**

Para realizarmos uma comparação formal entre a óptica geométrica e a mecânica clássica, vamos inicialmente mostrar que a equação do eikonal tem sua origem na óptica ondulatória no limite em que  $\lambda \rightarrow 0$ . Para isto não podemos usar a equação de ondas na forma reduzida, dada pela eq. (2.37), mas sim sua forma completa, que envolve a derivada temporal. Esta equação, que será deduzida no Cap. 4, é dada por:

$$\nabla^2 E + \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.58)$$

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

onde o aspecto vetorial do campo elétrico foi ignorado para simplificar as contas. A solução desta equação é obtida generalizando-se a eq. (2.38) de acordo com:

$$E(\vec{r}, t) = e^{B(\vec{r})} e^{ik_0[S(\vec{r}) - ct]} \quad (2.59)$$

onde a amplitude do campo elétrico foi escrita como  $E_0(\vec{r}) = \exp\{B(\vec{r})\}$  por conveniência. A substituição de (2.59) em (2.58), que será deixada como exercício, nos leva a:

$$\left\{ ik_0 \left[ 2\vec{\nabla}B \cdot \vec{\nabla}S + \nabla^2 S \right] + \left[ \nabla^2 S + (\vec{\nabla}B)^2 - k_0^2 (\vec{\nabla}S)^2 + n^2 k_0^2 \right] \right\} E = 0 \quad (2.60)$$

Como as grandezas B e S são reais, cada termo entre colchetes deve se anular separadamente. Assim temos:

$$2\vec{\nabla}B \cdot \vec{\nabla}S + \nabla^2 S = 0 \quad (2.61a)$$

$$\nabla^2 B + (\vec{\nabla}B)^2 - k_0^2 (\vec{\nabla}S)^2 + n^2 k_0^2 = 0 \quad (2.61b)$$

No limite em que  $\lambda \rightarrow 0$  ( $k_0 \rightarrow \infty$ ), apenas os dois últimos termos de (2.61b) são relevantes, o que nos leva à equação do eikonal já discutida anteriormente. Em resumo, a solução da equação de ondas eletromagnéticas possui uma fase que é dada por:

$$\left\{ ik_0 \left[ 2\vec{\nabla}B \cdot \vec{\nabla}S + \nabla^2 S \right] + \left[ \nabla^2 B + (\vec{\nabla}B)^2 - k_0^2 (\vec{\nabla}S)^2 + n^2 k_0^2 \right] \right\} E = 0 \quad (2.62)$$

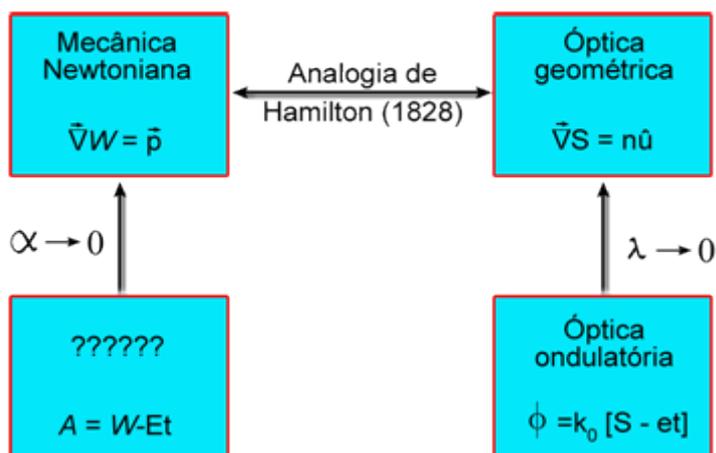
e no limite em que  $\lambda \rightarrow 0$  obtemos que o raio de luz se propaga com uma direção definida por  $\vec{\nabla}S = n\hat{u}$ . Já na mecânica clássica, a direção de propagação de uma partícula é dada pela eq. (2.54). Assim, a função característica  $W(q, p)$  faz o papel de eikonal e  $p = \sqrt{2mT} = \sqrt{2m(E - V)}$  (onde V representa a energia potencial), faz o papel de índice de refração. A análise da equação de Hamilton-Jacobi indica que a mecânica clássica é análoga ao limite da óptica geométrica da equação de ondas. Raios de luz ortogonais às frentes de onda (equifases) correspondem à trajetórias de partículas, ortogonais as superfícies de ação constante. Na seção seguinte,

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

vamos ver como Schrödinger estendeu a analogia de Hamilton para obter uma equação básica na mecânica quântica, que hoje leva seu nome.

## 9: Obtenção da equação de Schrödinger

Embora Hamilton tivesse desenvolvido a analogia exposta na seção precedente ainda em 1828, ele não tinha motivos para atribuir qualquer caráter ondulatório a uma dada partícula. Desta forma, por falta de evidências experimentais não foi possível a ele encontrar uma equação de ondas para descrever o comportamento da partícula. Foi Erwin Schrödinger que, em 1927, estendeu a analogia de Hamilton e encontrou uma equação de ondas para descrever o movimento de um ponto material. A ideia seguida por Schrödinger está esquematizada na Fig. 2.10. Sabia-se que a óptica geométrica era um caso limite da óptica ondulatória e que era análoga à mecânica Newtoniana de uma partícula. Seria possível obter alguma equação, no mesmo pé de igualdade da equação de ondas eletromagnéticas, que levaria à mecânica clássica no limite em que alguma grandeza, inerente à esta teoria tendesse a zero?



**Fig. 2.10 - Conjectura de Schrödinger.**

Da analogia de Hamilton,  $W$  corresponde ao eikonal  $S$ . Levando-se em conta a parte temporal, a ação  $A = W - Et$  deve corresponder à fase da onda eletromagnética, dada por:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$$\phi(\vec{r}, t) = k_0 [S(\vec{r}) - ct] = 2\pi \left[ \frac{S(\vec{r})}{\lambda_0} - vt \right] \quad (2.63)$$

onde as substituições  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  e  $\lambda_0 = \frac{c}{v}$  foram introduzidas. Comparando os termos com dependência temporal na fase da onda e na ação, Schrödinger concluiu que a energia da partícula deveria ser proporcional à frequência de alguma onda associada a ela, cuja propagação está mostrada na Fig. 2.9. Assim,

$$E = h\nu \quad (2.64)$$

onde  $h$  é uma constante de proporcionalidade, que mais tarde foi identificada como sendo a constante de Planck. Associando um comprimento de onda à propagação da superfície  $A(t)$  no espaço das configurações e levando em conta que esta se propaga com uma velocidade de fase dada por  $v_f = \frac{E}{p}$ , temos:

$$\lambda = \frac{v_f}{v} = \frac{\left(\frac{E}{p}\right)}{\left(\frac{E}{h}\right)} = \frac{h}{p} \quad (2.65)$$

Desta forma, Schrödinger conseguiu associar um comprimento de onda à partícula de momentum  $p$ . Este comprimento de onda foi posteriormente deduzido por de Broglie de uma outra maneira e por isso leva o nome de comprimento de onda de Broglie. A eq. (2.65) permite encontrar o vetor de propagação como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h} p = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar}} \quad (2.66)$$

onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , e as relações  $p^2 = 2mt$  e  $E = T - V$  foram utilizadas.

Substituindo o valor de  $k$  dado em (2.66) na equação de ondas reduzida, eq. (2.37), chegamos à equação de Schrödinger:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \quad (2.67)$$

onde o vetor campo elétrico foi substituído por uma nova função,  $\psi$ , cuja interpretação será deixada para os textos de mecânica quântica. Em resumo, para se obter a equação de Schrödinger, é necessário associar um comprimento de onda à partícula de momentum  $p$  (comprimento de onda de Broglie) e isto pode ser feito estendendo-se a analogia de Hamilton. A partir disto, usa-se a conservação de energia e a equação de ondas na sua forma reduzida para a obtenção da equação de Schrödinger. Para finalizarmos esta seção, vamos mostrar que a velocidade de grupo associada à propagação da superfície de ação constante corresponde à velocidade da partícula. Como veremos no Cap. V, a velocidade de grupo, ou de pacote de onda, é dada por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \quad (2.68)$$

com  $\omega = 2\pi\nu$ . Usando a eq. (2.65), e considerando que  $p = \sqrt{2m(E - V)}$  e  $E = h\nu$ , temos:

$$\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{2m(h\nu - V)}{h}} \quad (2.69)$$

cuja derivada com respeito a  $\nu$  nos fornece  $v_g^{-1}$ :

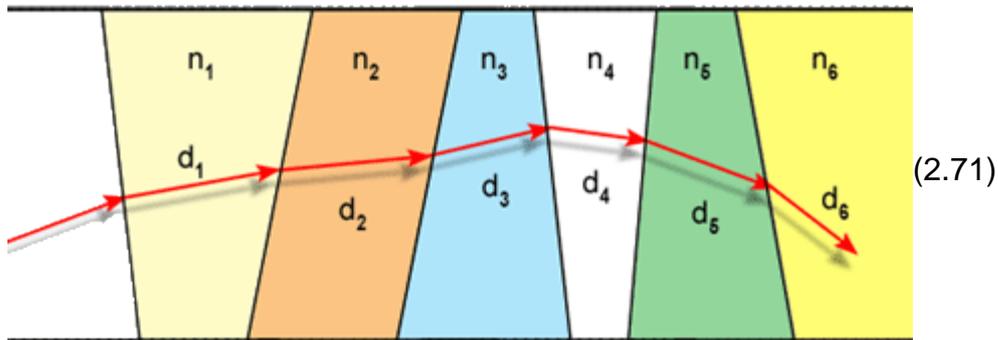
$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\nu} = \frac{m}{\sqrt{2m(h\nu - V)}} \quad (2.70)$$

Substituindo  $h\nu$  por  $E$  e  $p = \sqrt{2m(E - V)}$ , obtemos  $v_g = \frac{p}{m} = v$ .

## 10: [O potencial ótico](#)

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

Como vimos na seção anterior, as equações de ondas eletromagnéticas e de Schrödinger são formalmente equivalentes desde que se associe o comprimento de onda de de Broglie à partícula. No limite clássico da equação de Schrödinger, que corresponde ao caso  $\hbar \rightarrow 0$  (0), recuperamos as equações da mecânica clássica. Para sistemas conservativos temos:



e este tipo de equação também deve existir na óptica geométrica devido à equivalência entre as duas equações de ondas. Usando (2.66), podemos definir um potencial óptico como:

$$V(\vec{r}) = E - \frac{\hbar^2 k^2(\vec{r})}{2m} \quad (2.72)$$

Na presente analogia, a óptica geométrica está ligada ao limite clássico da equação de Schrödinger, no qual a 2ª lei de Newton é válida. Desta forma,

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k(\vec{r})}{m} \vec{\nabla}k \quad (2.73)$$

Como  $k(\vec{r}) = k_0 n(\vec{r})$  e  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , temos:

$$\vec{a} = \left( \frac{\hbar\omega}{mc} \right)^2 n(\vec{r}) \vec{\nabla}n \quad (2.74)$$

Assim, obtemos a aceleração que atua sobre uma partícula de luz quando esta atravessa um meio com índice de refração variável. Entretanto, a eq. (2.74) mistura o caráter de uma partícula de massa  $m$  com o de onda ( $\omega, c$ ). Para eliminarmos a massa desta equação, faremos uso da relação de Broglie:

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

$$mv = \hbar k \Rightarrow \frac{v}{n} = \frac{\hbar \omega}{mc} \quad (2.75)$$

onde  $k_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c}$ . Substituindo (2.74) em (2.73) obtemos uma expressão

para a aceleração de um raio de luz que se propaga com velocidade  $v = \frac{c}{n}$

num meio cujo índice de refração depende da posição:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{n} \vec{\nabla} n \quad (2.76)$$

Entretanto, a solução desta equação é complicada, uma vez que  $v$  também pode depender da posição. Para simplificá-la, vamos tomar a aproximação paraxial que estabelece que o movimento do raio está confinado em torno

do eixo de propagação, que denominaremos de  $z$ . Neste caso,  $v = \frac{dz}{dt}$  e a

aceleração pode ser expressa como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (2.77)$$

onde a regra da cadeia foi utilizada. Substituindo (2.77) em (2.76) e cancelando  $v$  obtemos:

$$\frac{d\vec{v}}{dz} = \frac{v}{n} \vec{\nabla} n \quad (2.78)$$

Usando  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  e aplicando novamente a regra da cadeia chegamos a:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dz^2} \frac{dz}{dt} = \frac{v}{n} \vec{\nabla} n \quad (2.79)$$

que nos leva à equação de propagação de raios:

$$n \frac{d^2\vec{r}}{dz^2} = \vec{\nabla} n \quad (2.80)$$

Podemos comparar este resultado com a equação dos raios obtida

**Autor: Sergio Carlos Zilio**

anteriormente. Usando a aproximação paraxial  $\left(\frac{d}{ds} \rightarrow \frac{d}{dz}\right)$  na eq. (2.31) e realizando a primeira derivada com respeito a  $z$ , temos:

$$\frac{dn}{dz} \frac{d\vec{r}}{dz} + n \frac{d^2\vec{r}}{dz^2} = \vec{\nabla} n \quad (2.81)$$

Vemos então que o primeiro termo desta equação não aparece em (2.80). Para efeitos práticos isto não tem muita importância, pois as duas equações são válidas apenas na aproximação paraxial, que só tem sentido quando a variação de  $n$  é muito pequena. Na solução da eq. (2.81), despreza-se em geral o primeiro termo e aproxima-se  $n$  por  $n_0$  no segundo termo.

Podemos entender a ausência do termo proporcional a  $\frac{dn}{dz}$  em (2.80) reescrevendo o potencial óptico como:

$$V(\vec{r}) = \left[ E - \frac{\hbar^2 \omega^2 n_0^2}{2mc^2} \right] + \left[ \frac{\hbar^2 \omega^2 (n_0^2 - n^2(\vec{r}))}{2mc^2} \right] \quad (2.82)$$

que corresponde a um termo constante e outro muito pequeno. Para passarmos do caso quântico para o clássico devemos ter  $\hbar \rightarrow 0$ . Isto significa que os níveis de energia do sistema são quase contínuos e para isto o potencial deve variar lentamente no espaço. Assim, o primeiro termo de (2.81) pode ser considerado como de 2ª ordem e portanto desprezado. Em conclusão, introduzimos um potencial óptico com o qual obtivemos uma equação que descreve a propagação dos raios na aproximação paraxial. Este conceito é interessante porque através dele podemos entender porque os raios de luz procuram sempre as regiões de maior índice de refração (menor potencial). Como exemplo, numa fibra óptica o núcleo possui índice de refração levemente superior ao da casca, o que garante que os raios de luz fiquem confinados próximos ao seu centro.