Aula 06 - Exercícios de Apoio e Atividade Avaliativa

Exercícios de Apoio

1. Considere a reação nuclear do tipo alvo fixo representada por $a+A \rightarrow b+B$. Usando os princípios de conservação de energia e de momento linear, deduza a expressão para a energia cinética do núcleo *b* a partir das massas dos núcleos envolvidos, da energia cinética do núcleo *a*, do valor de *Q* dessa reação e do ângulo de espalhamento do próprio núcleo *b* (que são parâmetros conhecidos do arranjo experimental).

Resolução:

A partir da conservação de energia, tem-se:

$$E_a + E_A = E_b + E_B \qquad (1)$$

e, a partir da conservação do momento, tem-se:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_A = \vec{p}_b + \vec{p}_B$$

que, no caso de uma colisão de alvo fixo (*A* em repouso), resulta em:

$$\begin{aligned} p_a &= p_b \cos\theta + p_B \cos\varphi \\ 0 &= p_b \sin\theta - p_B \sin\varphi \end{aligned} \qquad (2)$$

De (1), tem-se:

$$\begin{aligned} & m_a c^2 + K_a + m_A c^2 + K_A = m_b c^2 + K_b + m_B c^2 + K_B \\ & m_a c^2 + m_A c^2 - m_b c^2 - m_B c^2 = K_b + K_B - K_a \end{aligned}$$

Sendo,

$$Q = K_b + K_B - K_a \Rightarrow K_b = Q - K_B + K_a \qquad (3)$$

podemos eliminar K_B e φ dessa equação, usando (2):

$$\begin{aligned} & p_B \cos\varphi = p_a - p_b \cos\theta \Rightarrow p_B^2 \cos^2\varphi = p_a^2 + p_b^2 \cos^2\theta - 2 p_a p_b \cos\theta \\ & 0 = p_b \sin\theta - p_B \sin\varphi \Rightarrow p_B^2 \sin^2\varphi = p_b^2 \sin^2\varphi \end{aligned}$$

Somando essas duas expressões, temos:

$$p_B^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2 p_a p_b \cos\theta$$

Como, $K_B = {p_B^2}/{2m_B}$, a equação (3) resulta em:

$$K_b = Q - \left(\frac{p_a^2 + p_b^2 - 2 p_a p_b \cos\theta}{2m_B} \right) + K_a$$

e como $K_a = {p_a^2}/{2m_a}$ e $K_b = {p_b^2}/{2m_b}$, tem-se:

$$K_b = Q - \left(\frac{2m_a K_a + 2m_b K_b - 2\sqrt{4 m_a K_a m_b K_b}\cos\theta}{2m_B} \right) + K_a$$

$$m_B K_b = m_B Q - m_a K_a - m_b K_b + 2\sqrt{m_a K_a m_b K_b}\cos\theta + m_B K_a$$

$$\left(m_b + m_B\right) K_b - 2\sqrt{m_a K_a m_b}\cos\theta \cdot \sqrt{K_b} + \left(m_a - m_B\right) K_a - m_B Q = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{K_b} = \frac{\sqrt{m_a K_a m_b}\cos\theta \pm \sqrt{m_a K_a m_b \cos^2\theta - \left(m_b + m_B\right)\left[\left(m_a - m_B\right) K_a - m_B Q\right]}}{\left(m_b + m_B\right)}$$

2. Sabendo que:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int \left| f(\theta) \right|^2 sen\theta d\theta$$

e que para o espalhamento elástico,

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{i=0}^{\infty} (2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) P_l\left(\cos\theta\right)$$

mostre que:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) sen^2\delta_l$$

Resolução:

Basta substituir a expressão para *f(θ)* na fórmula de *σ*, ou seja:

$$\sigma = \frac{2\pi}{4k^2} \int_o^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 \left(2 - 2\cos 2\delta_l\right) \left[P_l\left(\cos\theta\right)\right]^2 sen\theta d\theta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) sen^2\delta_l$$

pois:

$$\int_0^{\pi}\left[P_l(\cos\theta)\right]^2 sen\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1}\left[P_l(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

3. Mostre como é possível calcular o *Q* de uma reação a partir das energias de ligação dos núcleos envolvidos. Usando essa expressão, discuta porque reações envolvendo núcleos muito ligados envolvem o consumo de energia (reações endotérmicas)

Resolução:

Sabendo que:

$$Q = m_{inicial} - m_{final}$$

e,

$$m(Z,N)c^2 = Z \cdot m_p c^2 + N \cdot m_n c^2 - B$$

considerando uma reação *A+B->C+D*, onde:

$$m_A(Z,N)c^2 = Z_A \cdot m_p c^2 + N_A \cdot m_n c^2 - B_A$$
$$m_B(Z,N)c^2 = Z_B \cdot m_p c^2 + N_B \cdot m_n c^2 - B_B$$
$$m_C(Z,N)c^2 = Z_C \cdot m_p c^2 + N_C \cdot m_n c^2 - B_C$$
$$m_D(Z,N)c^2 = Z_D \cdot m_p c^2 + N_D \cdot m_n c^2 - B_D$$

e que por conservação do número de prótons e nêutrons (em colisões de baixas energias), temos:

$$Z_A + Z_B = Z_C + Z_D$$
$$N_A + N_B = N_C + N_D$$

pode-se escrever *Q* como:

$$Q = m_A(Z,N)c^2 + m_B(Z,N)c^2 - m_C(Z,N)c^2 - m_D(Z,N)c^2$$

$$\begin{aligned} Q = {} & Z_A \cdot m_p c^2 + N_A \cdot m_n c^2 - B_A + Z_B \cdot m_p c^2 + N_B \cdot m_n c^2 - B_B \\ & - Z_C \cdot m_p c^2 - N_C \cdot m_n c^2 + B_C - Z_D \cdot m_p c^2 - N_D \cdot m_n c^2 + B_D \end{aligned}$$

$$Q = (Z_A + Z_B - Z_C - Z_D) \cdot m_p c^2 + (N_A + N_B - N_C - N_D) \cdot m_n c^2 + B_C + B_D - B_A - B_B$$

$$Q = B_C + B_D - B_A - B_B$$

Portanto, se os produtos da reação forem menos ligados (menor valor de *B*) do que os núcleos reagentes, teremos $Q<0$ e a reação será endotérmica. Por essa razão que reações envolvendo o núcleo de ^{56}Fe (como núcleo interagente) normalmente consomem energia.

4. Mostre que, a partir do Modelo da Gota Líquida, a fissão espontânea só pode ocorrer em núcleos com uma razão Z^2/A acima de, aproximadamente, 65. Considere que a fissão levará um núcleo de massa atômica *A* e número atômico *Z* para dois núcleos de massa *A/2* e número atômico *Z/2*. Também considere que para ocorrer a fissão, a diferença de massa entre o núcleo original e os dois núcleos resultantes deve ser maior do que a energia Coulombiana entre os dois núcleos resultantes, quando os mesmos estão a uma distância *2R* entre eles, onde *R* é o raio de cada núcleo ($R=r_0A^{1/3}$, onde $r_0 = 1,2\ fm$).

Resolução:

De maneira simplificada, podemos dizer que um núcleo com número atômico *Z* e número de massa *A* irá fissionar se a diferença entre a sua massa e dos núcleos resultantes do processo de fissão, que podemos simplificar para dois núcleos com número atômico *Z/2* e número de massa *A/2*, for maior do que a energia eletrostática desses dois fragmentos que estão a uma distância próxima um do outro, dada por *2R*, onde *R* é o raio desses núcleos. Portanto, a fissão ocorrerá se:

$$\Delta Mc^2 - E_C > 0$$

onde,

$$\Delta Mc^2 = \left[M(Z,A) - 2M(Z/2, A/2)\right]c^2 = -0,26a_S A^{2/3} + 0,37a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

considerando-se a formula semi-empírica de massa do Modelo da Gota-Líquida, expressão (18) do texto base da aula 4, e

$$E_C = \frac{\left(Ze/2\right)^2}{2R} = \frac{0,227}{r_0}\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

sendo $R=r_0A^{1/3}$. Portanto, a fissão nuclear ocorrerá de forma espontânea quando:

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{0,26a_S}{0,37a_C - 0,227/r_0}$$

Usando os valores da expressão (18) do texto base da aula 4 e $r_0=1{,}2\ fm$, tem-se que:

$$\frac{Z^2}{A} > 65$$

ou seja, apenas núcleos pesados devem sofrer a fissão espontânea, como observado experimentalmente.

Atividade Avaliativa

5. Calcule o Q da reação $^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n$, sabendo que $m_{2H}=1876{,}12\ MeV/c^2$, $m_{3H}=2809{,}43\ MeV/c^2$, $m_n=939{,}56\ MeV/c^2$, $m_{4He}=3728{,}40\ MeV/c^2$. Essa reação seria uma boa opção para um reator de fusão nuclear? Por quê?

Resolução:

Sendo,

$$Q = m_{inicial} - m_{final}$$

neste caso, teremos:

$$Q = 1876{,}12 + 2809{,}43 - 939{,}56 - 3728{,}40 = 17{,}\ 56\ MeV$$

Portanto o Q da reação será positivo, indicando que haverá liberação de energia nessa reação, o que a torna uma boa opção para um reator de fusão.