Mecânica

Dinâmica do Corpo Rígido

1-Introdução

A equação básica descrevendo o movimento de rotação é a equação de movimento para o momento angular total:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad .$$

Note-se que como o tensor de inércia é determinado num sistema preso ao centro de massa e como esse está em rotação, podemos lembrar a expressão e escrever:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\bar{S}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Utilizando a equação $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\bar{S}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$ em $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ temos:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\bar{S}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\tau}$$

Levando em onta que

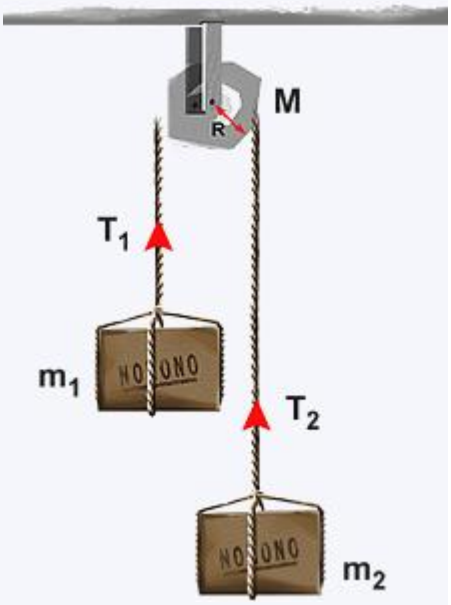
$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} I_1 & \dot{\omega}_1 \\ I_2 & \dot{\omega}_2 \\ I_3 & \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}$$

e tomando as componentes da equação $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\bar{S}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\tau}$ ao longo dos eixos principais, vamos obter

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = \tau_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = \tau_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = \tau_3 \quad .$$

Estas equações são conhecidas como **equações de Euler**.

2-Máquina de Atwood



A máquina de Atwood é um dispositivo bastante simples e que permite, pela determinação da aceleração dos corpos em movimento, testar as leis da mecânica. Ela consiste de dois corpos de massas m_1 e m_2 presos por um fio que passa por uma roldana. Nos problemas mais simples simplificamos o problema admitindo que ela não tenha massa. Isso é claramente uma aproximação. A roldana tem um momento de inércia dado por

$$I = \frac{MR^2}{2} \neq 0$$

e devemos então levar em conta o seu movimento de rotação. Assim, além das equações usuais do movimento das partículas de massa m_1 e m_2

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

onde T_1 e T_2 são as forças tensoras nos fios , temos agora a equação de movimento da roldana

$$I\dot{\omega} = I\alpha = (T_2 - T_1)R \, .$$

Note-se que $T_2 = T_1$ só é possível se desprezarmos a massa da roldana.

Lembrando que

$$\alpha = \frac{a}{R} \, ,$$

temos de $I\dot{\omega} = I\alpha = (T_2 - T_1)R$ e $I = \frac{MR^2}{2} \neq 0$ que

$$T_2 - T_1 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} = \frac{Ma}{2} .$$

A solução torna-se agora, utilizando as equações

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$T_2 - T_1 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} = \frac{Ma}{2} ,$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} .$$

Se tomarmos inicialmente as duas partículas em repouso e a mesma altura (z = 0) teremos para a energia total

$$E = 0$$

Quando elas se deslocam de uma altura h em relação à posição original, a energia será

$$E = m_1 gh - m_2 gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{I\omega^2}{2} = 0$$

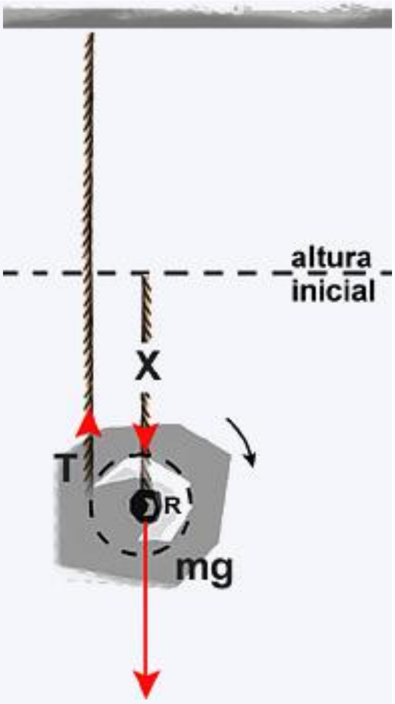
E portanto,

$$(m_2 - m_1)gh = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)v^2$$

Donde obtemos que

$$v^2 = \frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} = 2ah .$$

3-Movimento de iodô



O ioiô é um carretel sobre cujo eixo central enrolamos um fio esticado. Prendemos a extremidade do fio e soltamos o ioiô o qual rola para baixo até o fio acabar. Nesse ponto volta a enrolar o fio, tornando a subir.

O movimento de translação do ioiô é devido à força tensora no fio e ao peso. Temos, portanto, para o centro de massa do ioiô,

$$M\ddot{X} = Mg - T \quad ,$$

ao passo que o movimento de rotação é descrito pela equação

$$I\dot{\omega} = TR \quad ,$$

onde R é o raio do eixo central e I é o momento de inércia ao redor do eixo passando pelo centro da massa.

Como

$$R\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{X} \quad ,$$

a equação $I\dot{\omega} = TR$ é escrita como:

$$I\ddot{X} = TR^2$$

e portanto, de $M\ddot{X} = Mg - T$, temos

$$\ddot{X} = \frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}}$$

e

$$T = \frac{Il}{R^2}\frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}} = \frac{Mg}{1 + \frac{MR^2}{I}}$$

A energia cinética será dada por

$$\Delta P = M(-V_{max} - V_{max}) = 2MV_{max}$$

A energia conservada será dada por

$$E = -MgX + \frac{1}{2}\left(\frac{I + MR^2}{R^2}\right)\dot{X}^2$$

Admitindo E = 0 (o ioiô parado em X = 0), obtemos

$$\dot{X}^2 = 2MgX\frac{R^2}{(I + MR^2)}$$

Para cada posição do ioiô temos duas velocidades

$$\dot{X} = \pm\sqrt{2MgX\frac{R^2}{(I + MR^2)}}$$

O sinal + é válido quando o ioiô desce. O sinal - é associado ao movimento de subida.
O maior valor da velocidade é atingido quando todo o fio de comprimento L está desenrolado

$$V_{max} = \sqrt{2MgL\frac{R^2}{(I + MR^2)}}$$

Ao mudar de sinal existe uma variação de momento dada por

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\bar{s}} = \begin{pmatrix} I_1 & \dot{\omega}_1 \\ I_2 & \dot{\omega}_2 \\ I_3 & \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}$$

e consequentemente uma força (puxão no fio) dada por

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t},$$

onde Δt é o intervalo de tempo no qual houve a variação de momento.