**Autor: Gil da Costa Marques**

## Método Variacional

### 1: Funcionais

Temos muita familiaridade com o conceito de função. No caso de uma função temos uma a para associar a um ponto do espaço um valor no eixo real.

De uma maneira pouco rigorosa dizemos que uma funcional associa não um ponto do espaço mas uma curva no espaço a um valor no eixo real.

Se a curva é parametrizada pelo parâmetro $\tau$ então representamos o funcional por

$$F\left[\vec{r}\left(\tau\right)\right]$$

onde $\vec{r}\left(\tau\right)$ é um particular ponto de curva. Naturalmente o funcional pode depender também da derivada de $\vec{r}\left(\tau\right)$ e do próprio $\tau$. Podemos escrever, mais geralmente,

$$F\left[\vec{r}\left(\tau\right),\frac{d\vec{r}\left(\tau\right)}{dT},\tau\right]$$

### 2: Exemplos

**1. O comprimento de uma curva interligando dois pontos**

O comprimento de uma curva ligando dois pontos A e B pode ser pensado como um funcional (FIGURA)

$$\Delta L=\int dS\int\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}\,d\tau$$

Note-se que nesse caso

$$L=L\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)$$

Para cada curva parametrizada por $\tau$

$$x=x\left(\tau\right)$$
$$y=y\left(\tau\right)$$
$$z=z\left(\tau\right)$$

obtemos um valor diferente em função da curva escolhida.

## 2. O caminho óptico

No caso da propagação de um raio luminoso através de um meio cujo índice de refração é variável

$$n = x(x, y, z)$$

definimos o livre caminho óptico para cada possível trajetória da luz naquele meio como o funcional

$$\lambda\left(\vec{r}(\tau), \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = \int dSn(\vec{r})$$

onde *dS* é o elemento de comprimento da curva associada ao trajeto do raio luminoso

$$dS = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}$$

Observe-se que dado $n(\vec{r})$ obteremos um valor diferente para o caminho óptico para as diferentes trajetórias do raio luminoso.