Autor: Gil da Costa Marques

1: Movimento do corpo rígido

O corpo rígido é um caso particular de um sistema de N partículas. Ele é particular no sentido de manter as distâncias, entre as várias partes que o compõem (átomos), invariáveis. As distâncias entre os vários pontos do corpo rígido são fixas (só nesse sentido a rigidez).

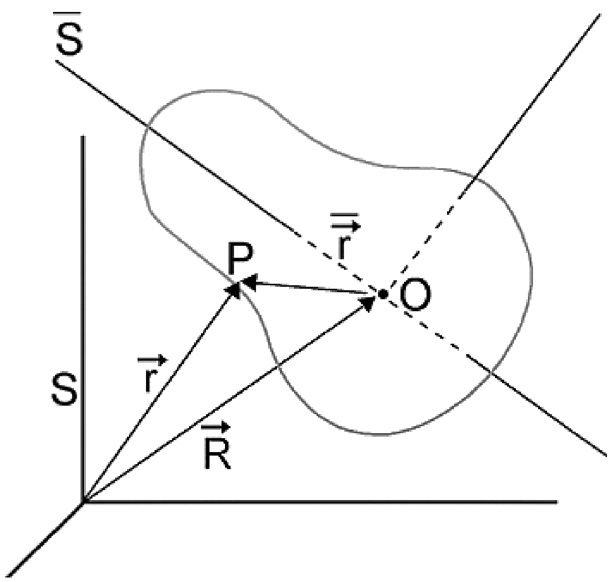
Qualquer deslocamento de um ponto P do corpo rígido pode sempre ser dado como uma soma de dois termos. Um deles associado ao movimento de translação do corpo rígido como um todo e o outro associado a uma rotação pura do corpo rígido. Escrevemos, assim

$$\delta\vec{r} = \left(\delta\vec{r}\right)_{\text{translação}} + \left(\delta\vec{r}\right)_{\text{rotação}}$$

Para entendermos isso basta imaginarmos um sistema de referência $\bar{S}$ solidário ao corpo rígido, com origem num ponto O, arbitrariamente escolhido, do mesmo. A posição de um ponto P do corpo rígido, com respeito a um sistema de referência S, será dada por

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\bar{r}} \ ,$$

onde $\vec{R}$ é a posição do ponto O e $\vec{\bar{r}}$ o vetor posição relativa a ele.



Portanto

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{R} + \delta\vec{\bar{r}}$$

onde $\delta\vec{R}$ descreve o deslocamento do ponto O do corpo e $\delta\vec{\bar{r}}$ corresponde ao deslocamento associado à rotação em torno de O. Já vimos que

$$\delta\vec{\bar{r}} = \delta\vec{\Omega} + \vec{\bar{r}}$$

onde $\delta\vec{\bar{\Omega}}$ é o vetor deslocamento angular. Portanto, podemos escrever para a velocidade de um ponto do corpo rígido:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade de O.

Autor: Gil da Costa Marques

Como o movimento mais geral do corpo rígido consiste de um movimento de translação e um outro de rotação, dizemos que o corpo rígido requer seis graus de liberdade para descrevê-lo:

Translação: 3 coordenadas do ponto O.

Rotação: 3 ângulos de Euler.

2: Caráter absoluto da velocidade angular

A velocidade angular do corpo rígido é a mesma em relação a qualquer um de seus pontos. Para entendermos isso, consideremos o caso em que ao invés do ponto O, toma-se outro ponto como referência, isto é, um ponto O'. Agora escrevemos

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\bar{r}}_0$$

onde $\vec{r}_0$ é a posição da origem do novo sistema e $\vec{\bar{r}}_0$, é a posição do ponto relativa a esse novo sistema. Podemos escrever

$$\vec{\bar{r}}_{0'} = \vec{\bar{r}}_0 + \vec{a}$$

De $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\bar{r}}_{0'}$ podemos escrever

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{\bar{r}}_{0'}$$

e, portanto,

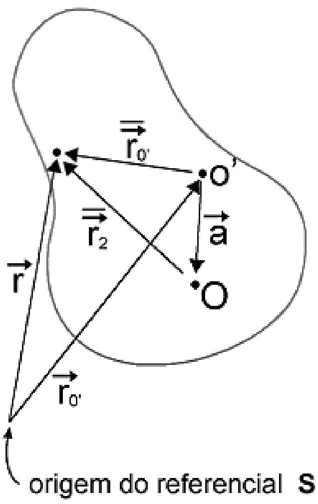
$$\vec{v} = \vec{V}_{0'} + \vec{\omega}' \times \vec{\bar{r}}_{0'}$$

Sendo, pela equação $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}$,

$$\vec{V}_{0'} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (-\vec{a})$$

temos estão

$$\vec{v} = \vec{V} - \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega}' \times \vec{\bar{r}}_{0'}$$



Por outro lado, $\vec{v}$ é dada também por $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}$. Temos assim

$$\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}_0 = \vec{V} - \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega}' \times \vec{\bar{r}}_{0'}$$

isto é,

Autor: Gil da Costa Marques

$$\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_0+\vec{a}\right)=\vec{\omega}'\times\vec{r}_{0'}$$

Levando em conta $\vec{r}_{0'}=\vec{r}_0+\vec{a}$, vem

$$\left(\vec{\omega}'-\vec{\omega}\right)\times\vec{r}_{0'}=0$$

Como $\vec{r}_{0'}$ é arbitrário, pois P é um ponto qualquer do corpo rígido, podemos concluir que

$$\vec{\omega}'=\vec{\omega}\quad .$$

3: Eixo instantâneo de rotação

Contanto que exista um ponto O cuja velocidade $\vec{V}$ seja perpendicular a $\vec{\omega}$, existe um eixo cujos pontos têm velocidade $\vec{v}$ nula e em torno do qual o movimento do corpo é visto como uma rotação pura. Muitas vezes isso não é muito útil porquanto esse eixo pode mudar de direção. O movimento, portanto, só é de rotação pura instantaneamente. Para determinarmos esse eixo consideremos os pontos do corpo que tem velocidade igual a zero:

$$\vec{v}=0\Rightarrow\vec{V}+\vec{\omega}\times\vec{r}=0$$

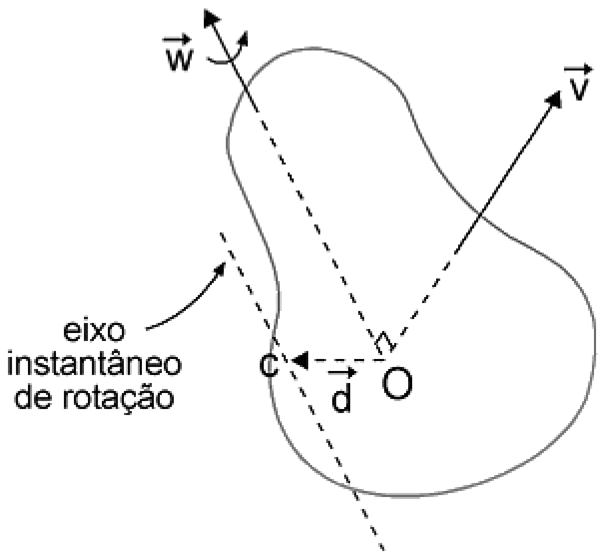
A solução dessa equação são os pontos $\vec{r}$ situados sobre uma reta (ou seja, um eixo) paralela a $\vec{\omega}$ que passa por um ponto C cuja posição em relação a O é dada pelo vetor.

$$d=\frac{\vec{\omega}\times\vec{V}}{\omega^2}\,.$$

Esse eixo é conhecido como **eixo instantâneo de rotação** e se encontra a uma distância d dada por

$$d=\frac{V}{\omega}\,.$$

Autor: Gil da Costa Marques



4: Momento angular

O momento angular do corpo rígido com respeito à origem do sistema S é dado por

$$\vec{L} = \int dm\vec{r} \times \vec{v} = \int \rho\vec{r} \times \vec{v}dV$$

onde é a densidade de massa do corpo rígido e dV é o elemento de volume.

Lembrando $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\bar{r}}$ e $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} + \vec{\bar{r}}$ e considerando o ponto O como sendo o centro de massa, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int \rho dV\left(\vec{R} + \vec{r}\right) \times \left(\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} + \vec{\bar{r}}\right) \\ &= \vec{R} \times \left(\int \rho dV\right)\vec{V}_{CM} + \left(\int \rho dV\vec{\bar{r}}\right) \times \vec{V}_{CM} + \vec{R} \times \vec{\omega} \times \int \rho dV\vec{\bar{r}} + \int \rho dV\vec{\bar{r}} \times \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}\end{aligned}$$

Sendo

$$\int \rho dV = \text{massa total do corpo rígido} = \mathrm{M}$$

e

$$\int \rho dV\vec{\bar{r}} = 0\,,$$

Temos o momento angular composto por dois termos:

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V}_{CM} + \int \rho dV\vec{\bar{r}} \times \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}\ .$$

Autor: Gil da Costa Marques

O primeiro corresponde ao momento angular do centro de massa e está associado ao movimento de translação do corpo rígido como um todo. O segundo, que indicaremos com $\vec{\overline{L}}$, diz respeito estritamente à rotação e será analisado em seguida.

5: Momento de inércia

Utilizando a identidade vetorial

$$\vec{\overline{r}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\overline{r}} \right) = \vec{\omega}\left(\vec{\overline{r}}^{\,2} \right) - \vec{\overline{r}}\left(\vec{\overline{r}}^{\,2} \cdot \vec{\omega} \right),$$

a expressão

$$\vec{\overline{L}} = \int \rho dV \vec{\overline{r}} \times \vec{\omega} \times \vec{\overline{r}}$$

transforma-se em

$$\vec{\overline{L}} = \int \rho dV \left[\vec{\omega} \vec{\overline{r}}^{\,2} - \vec{\overline{r}}\left(\vec{\overline{r}} \cdot \vec{\omega} \right) \right]$$

Para as componentes no sistema solidário do corpo rígido, temos

$$\overline{L}_i = \int \rho\left(\vec{\overline{r}} \right) dV \left[\omega_i \left(\sum_{j=1}^{3} \overline{x}_j^2 \right) - \overline{x}_i \left(\sum_{j=1}^{3} \overline{x}_j \omega_j \right) \right].$$

A i-ésima componente pode ser escrita como

$$\overline{L}_i = \sum_{j=1}^{3} l_{ij} \omega_j \ ,$$

onde

$$L_{ij} = \int \rho dV \left[\left(\sum_{k=1}^{3} \overline{x}_k^2 \right) \delta_{ij} - \overline{x}_i \overline{x}_j \right]$$

são as componentes do **tensor de inércia**.

Utilizando uma notação mais compacta temos

$$\overline{L} = l\vec{\omega},$$

onde I é o tensor de inércia escrito de uma forma matricial

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Autor: Gil da Costa Marques

Observe-se que sob uma rotação do sistema de eixos solidário ao corpo rígido, as coordenadas sofrem a transformação

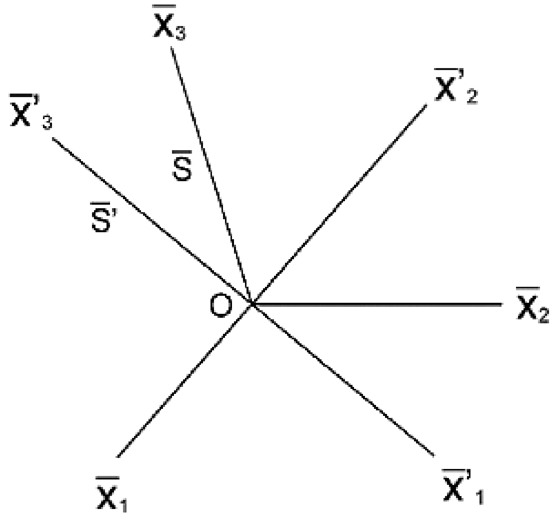
$$\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_i^{'} .$$

Espera-se, pois que sob uma rotação o tensor I_{ij} também se transforme:

$$I_{ij} \rightarrow I_{ij}^{'} .$$

Para determinarmos como o tensor I_{ij} se transforma sob uma rotação, lembremo-nos de que as coordenadas se transformam de acordo com

$$\bar{x}_i^{'} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\bar{x}_j \quad .$$



A partir da equação anterior podemos verificar facilmente que após a rotação o tensor I_{ij} se transforma da seguinte maneira

$$I_{ij}^{'} = \sum_{k}\sum_{I} R_{ik}R_{jI}I_{kI} \ .$$

Em notação matricial dizemos que o tensor I se transforma como

$$I \rightarrow I' ,$$

onde

$$I' = RI\tilde{R} .$$

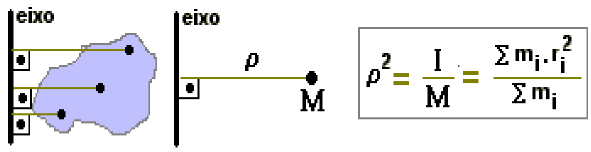
Uma transformação dada pela equação anterior e $\bar{x}_i^{'} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\bar{x}_j$ é conhecida por transformação de semelhança e onde sabemos que, no caso de rotação,

$$R\tilde{R} = RR^{-1} = 1 .$$

Autor: Gil da Costa Marques

6: Teorema dos eixos paralelos

Em alguns casos pode haver interesse na relação entre o momento de inércia num determinado sistema no centro de massa e aquele de um sistema de eixos paralelos a esse. Façamos, portanto, a translação



$$\vec{r}\,' = \vec{\bar{r}} - \vec{a}\,.$$

Substituindo a relação acima na expressão de I'_{ij} obtemos

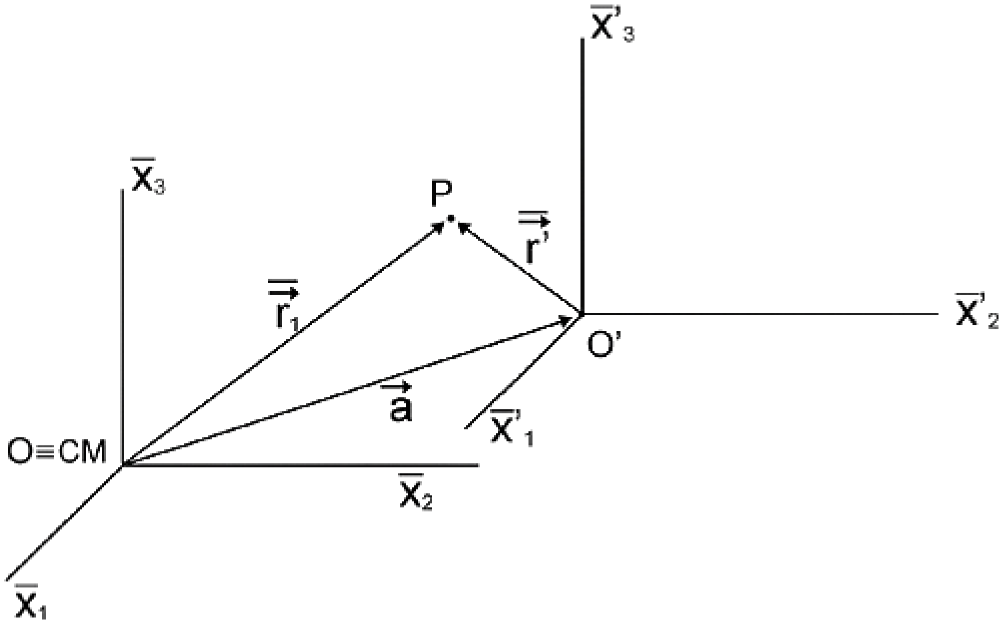
$$I'_{ij} = \int \rho dV\left[\left(\vec{\bar{r}} - \vec{a}\right)^2 \delta_{ij} - \left(\bar{x}_i - a_i\right)\left(\bar{x}_j - a_j\right)\right]\,.$$

O integrando é portanto:

$$\left(\vec{\bar{r}}^{\,2} - 2\vec{\bar{r}}\cdot\vec{a} + \vec{a}^{\,2}\right)\delta_{ij} - \left(\bar{x}_i\bar{x}_j\right) - a_i a_j + a_i\bar{x}_j + a_j\bar{x}_i$$

Substituindo em $I'_{ij} = \sum_k \sum_l R_{ik} R_{jl} I_{kl}$, obtemos

$$\int \rho dV\cdot\left(\vec{\bar{r}}^{\,2}\delta_{ij} - \bar{x}_i\bar{x}_j - 2\vec{\bar{r}}\cdot\vec{a}\delta_{ij} + a_i\bar{x}_j + a_j\bar{x}_i + a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$$



Lembrando que

$$\int \rho dV \vec{\bar{r}} = 0$$

$$\int \rho dV \bar{x}_i = 0$$

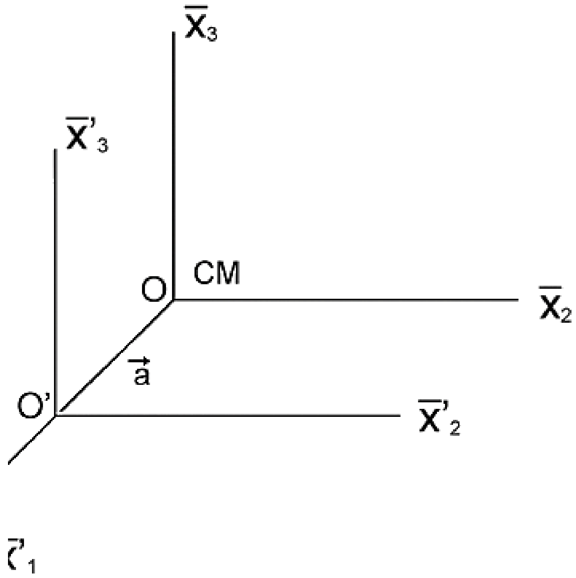
temos finalmente

$$I'_{ij} = I_{ij} + M\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right) \ .$$

Este é o teorema dos eixos paralelos. Para a situação mostrada na figura ao lado, temos

$a_1 = \left|a^2\right| = a, \quad a_2 = 0$ e $a_3 = 0$ reduzindo-se a relação anterior a

$$I'_{11} = I_{11} + M\left(a^2 - a^2\right) = I_{11}$$
$$I'_{12} = I_{12}$$
$$I'_{13} = I_{13}$$
$$I'_{22} = I_{22} + Ma^2$$
$$I'_{23} = I_{23}$$
$$I'_{33} = I_{33} + Ma^2$$



7: Energia cinética

Consideremos agora a expressão para a energia cinética do corpo rígido. Sua energia cinética é dada por

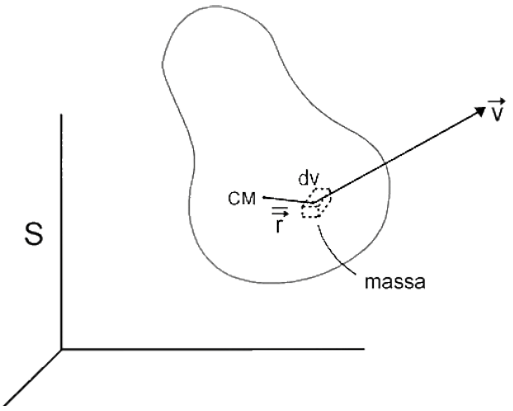
$$T = \iiint \rho \frac{\vec{V}^2}{2} dV \ .$$

Lembrando agora que a velocidade do ponto do corpo rígido localizado na posição $\vec{r}$ (em relação ao centro de massa) é dada por

$$\vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r} \ ,$$

segue que

$$T = \int \rho dV \frac{1}{2}\left(\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 .$$



Lembrando as propriedades $\int \rho dV$ = massa total do corpo rígido = M e $\int \rho dV \vec{\bar{r}} = 0$ e que:

$$\int \rho dV \vec{V}_{CM} \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{\bar{r}} \right) = \vec{V}_{CM} \cdot \left[\vec{\omega} \times \int \rho dV \vec{\bar{r}} \right]$$

obtém-se

$$T = \frac{M}{2} \vec{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \int \rho dV \left[\left(\vec{\omega} \times \vec{\bar{r}} \right)^2 \right]$$

E portanto, a energia cinética se constitui de duas partes. A primeira é a energia cinética de translação do corpo como um todo (é a energia cinética do centro de massa). A segunda está associada à rotação do corpo rígido. $\vec{\bar{L}} = \int \rho dV \vec{\bar{r}} \times \vec{\omega} \times \vec{\bar{r}}$

Lembrando a identidade

$$\left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)^2 = \vec{\omega} \cdot \left[\vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\bar{r}} \right) \right].$$

Podemos escrever T sob a forma

$$T = \frac{M}{2} \vec{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \int \rho dV \left[\vec{\omega} \cdot \left\{ \vec{\bar{r}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\bar{r}} \right) \right\} \right] = \frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \int \rho dV \vec{\bar{r}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\bar{r}} \right)$$

Lembrando a definição do momento angular, notamos que T pode então ser então escrito agora como

$$T = \frac{M}{2} \vec{V}_{CM}^2 + \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\bar{L}}}{2}.$$

Vemos que a energia cinética de rotação é dada por

$$T_R = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\bar{L}}}{2},$$

ou, de um modo equivalente,

$$T_R = \frac{\vec{\omega} \cdot l \vec{\omega}}{2}$$

ou ainda

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_i I_{ij} \omega_j.$$