Autor: Gil da Costa Marques

1: Introdução

O movimento de rotação é bastante comum no nosso mundo físico. Hoje sabemos que o nosso mundo - a Terra - está em rotação em torno de um eixo imaginário no espaço. A consequência disso é uma sucessão de dias intercalados com noites.

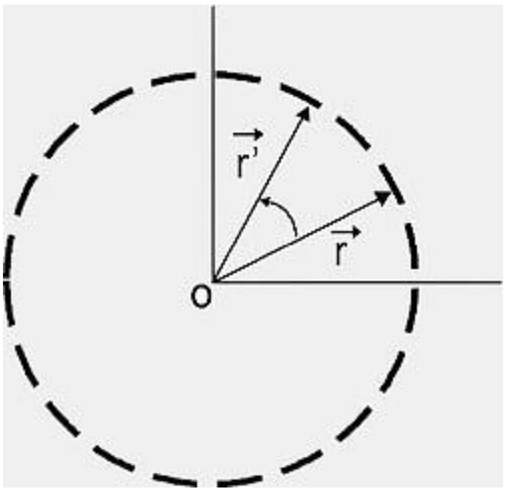
A Terra, portanto, ilustra bem o exemplo de rotação em torno de um eixo. O pião é outro exemplo de objeto que executa movimento de rotação. No entanto, o seu movimento pode ser bem mais complexo do que a simples rotação em torno de um eixo.

As portas das casas são fixadas aos batentes utilizando-se de duas ou três dobradiças. O efeito das dobradiças é o de permitir o movimento de rotação da porta em torno do batente da porta. Para fazermos uma porta girar devemos aplicar uma força sobre a porta. Certamente, você já notou que é mais fácil abrir a porta empurrando-a cada vez mais longe das dobradiças.

2: O que é movimento de rotação

O que caracteriza o movimento em geral é a variação do vetor de posição. Dizemos assim que houve movimento se o vetor de posição r passou para outro vetor de posição r', isto é,

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'$$



Nós dizemos que o movimento é de rotação pura se a direção e o sentido do vetor posição mudam, ou seja, se apenas o módulo do vetor permanece constante. Portanto, numa rotação pura:

$$|\vec{r}\,'| = |\vec{r}|$$

3: Rotação em torno de um eixo

Consideremos uma maçã sobre a qual marcamos uma pinta vermelha (r). Façamos agora a rotação da maçã em torno de seu eixo de simetria por um ângulo muito pequeno $\Delta\theta$. A nova posição é agora r'. O deslocamento durante a rotação é dada por

$$\Delta r = r' - r$$

No caso de rotação de um ângulo θ em torno de um eixo podemos escrever a seguinte relação entre as coordenadas do vetor depois da rotação (r') e o vetor antes da rotação (r).

$$x' = \cos\varphi x + sen\varphi y$$
$$y' = \cos\varphi y - sen\varphi y$$
$$z' = z$$

Para ângulos pequenos ($\delta\theta$) temos:

$$x' = x + \varphi y$$
$$y' = y - \Delta\varphi y$$
$$z' = z$$

Portanto, o vetor deslocamento tem coordenadas

$$(\Delta r)_x = \Delta\varphi y$$
$$(\Delta r)_y = -\Delta\varphi x$$

Vê-se, pois que podemos escrever

$$\Delta r(\Delta\varphi k) \times r$$

onde k é um versor, cuja direção e sentido angular são aqueles do eixo de rotação.

O vetor $\delta\theta$ k é o vetor deslocamento angular

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi k$$

Esse vetor é denominado por $\delta\varphi$.

$\delta\varphi$ = vetor deslocamento angular.

O vetor deslocamento angular pode agora ser escrito para angulas bem pequenos como:

$$\Delta r = \Delta\varphi \times r$$

Observe que o vetor deslocamento angular é apenas uma generalização, para grandezas vetoriais, da relação entre espaço percorrido e ângulo, no caso do movimento circular. Lembramos que, naquele caso,

$$\Delta S = \Delta\varphi R$$

4: O vetor deslocamento angular

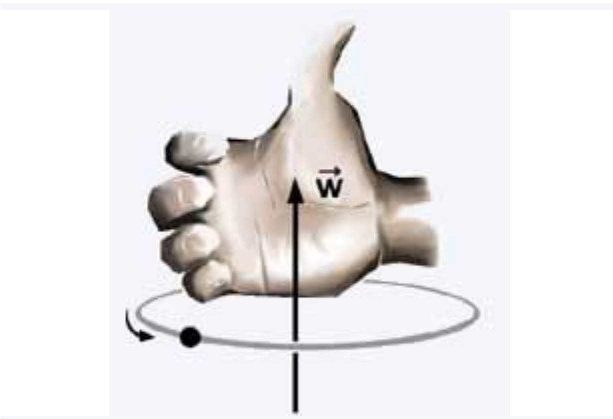
Podemos expressar o deslocamento devido à rotação como função do vetor posição r. Para isso, introduzimos o vetor deslocamento angular. O vetor deslocamento angular é definido (como todo vetor) a partir do seu módulo, direção e sentido.

Direção

A direção do vetor deslocamento angular é dada pelo eixo de rotação.

Sentido

O sentido é dado pela regra da mão direita. Com a mão direita leve r para a nova posição r'. O polegar indica o sentido.



Módulo

O módulo é igual à variação $\delta\theta$ (do ângulo de rotação).

5: O vetor velocidade angular

A partir do vetor deslocamento angular podemos definir o vetor velocidade angular através do processo limite

Autor: Gil da Costa Marques

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

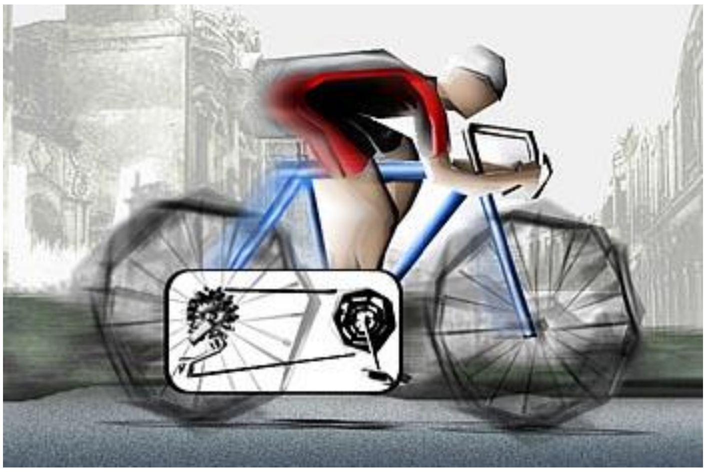
Dividindo $\Delta S = \Delta\varphi R$ por Δt e tomando o limite, teremos:

$$\lim_{\Delta t} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \times r$$

Portanto, a velocidade de um ponto devido à rotação é:

$$V = \omega \times r$$

Essa velocidade está associada estritamente à rotação. Estamos imaginando o corpo sem movimento de translação. Essa é a velocidade percorrida por alguém que observa a partícula ou corpo em rotação em torno do eixo.



Novamente aqui notamos a semelhança com o movimento circular no qual escrevemos: $V = \omega R$

Portanto a definição () é uma generalização necessária visando a estabelecer relações entre grandezas vetoriais.

6: Momento angular

O momento angular, L, é uma grandeza física muito importante, especialmente em se tratando de rotações, mas cuja definição é um tanto quanto abstrata. Ela é definida como o produto vetorial do vetor posição e do vetor quantidade de movimento.

$$L = r \times p$$

Vê-se que L é um vetor perpendicular a r e a p e, por isso, na maioria das vezes, ela acaba levando a dificuldades de visualização. No entanto, é uma quantidade física fundamental e importante no estudo da rotação de um corpo.

A quantidade de movimento de um corpo pode ser nula (o que significa que ele não está em movimento de translação) e ainda assim ter momento angular total diferente de zero.

O momento angular total está para o movimento de rotação assim como a quantidade de movimento total está para o movimento de translação.

Como p = mv, e usando expressão $V = \omega \times r$, podemos escrever o momento angular em termos de velocidade angular, como

$$L = r \times (\omega) \times r$$

Para um sistema de partículas, definimos o momento angular total como a soma dos momentos angulares de cada uma das partículas. Para um sistema de N partículas, temos:

$$\begin{aligned} L^{\text{total}} &= L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N \\ &= r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2 + \ldots + L_N \times p_N \end{aligned}$$

Um corpo em rotação tem um valor definido para o momento angular.

Pode-se, portanto, dizer que, se o corpo está em rotação, ele tem momento angular e vice-versa.

7: O torque

O torque (τ) de uma força (F) é definido como o produto vetorial entre a posição onde aplicamos a força.

$$\tau = r \times F$$

Trata-se, portanto, de uma grandeza vetorial.

Analogamente, definimos, quando mais de uma força atua sobre o corpo, o torque total como a soma dos torques produzidos por cada uma das forças.

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_N = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + \ldots + r_N \times F_N$$

Para duas forças F_1 e F_2, temos:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2$$

Um exemplo muito simples é o binário de duas forças. Nesse caso, aplicamos a um corpo a mesma distância (a partir de uma origem comum) duas forças de mesmo módulo, mas sentidos opostos.

Nesse caso, a força total é nula, mas a soma dos torques, não.

8: Torque e rotação

Um corpo se coloca em rotação quando aplicamos torques sobre ele. A variação de velocidade angular ocorre sempre como resultado de torques aplicados a um corpo.

Rotações ocorrem como resultado de torques aplicados a um corpo.

Para entendermos isso, notamos que a variação de momento angular pode ocorrer como resultado da variação da posição e da quantidade de movimento. Da definição () segue que:

$$\Delta L = \Delta r \times p + r \times \Delta p$$

Se dividirmos esta expressão por Δt e tomarmos o limite quando $\Delta t \to 0$, teremos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta r}{\Delta t} \times p + r \times \lim_{\Delta t} \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

O primeiro termo do lado direito se anula por

$$v \times p = 0$$

Donde concluímos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} + \frac{\Delta L}{\Delta t} = r \times F = \tau$$

ou seja,

Torque é igual à taxa de variação do momento angular .

Isso significa que os torques aplicados às partículas levam a alteração no momento angular.

No caso sistema binário (de duas forças opostas), o corpo sujeito ao binário se colocará em rotação pura (sem movimento de translação).

9: Conservação do momento angular

Se os torques aplicados às partículas ou a um sistema de partículas tiverem uma resultante nula, o momento angular se conserva, isto é, L é constante no tempo. Escrevemos

$$L = L_0$$

onde L_0 é um vetor constante.