Autor: Manfredo Harri Tabacniks

1: Introdução

O valor de uma grandeza submetida a medição costuma ser adquirido através de um procedimento que, em geral, envolve algum(s) instrumento(s) de medição. O próprio processo de medida, assim como o instrumento utilizado, tem limites de precisão e exatidão, ou seja, toda medida realizada tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido. A seleção do processo de medida, do instrumento usado e a reprodutibilidade da grandeza medida têm que ser expressa de alguma forma. Em alguns aparelhos, por exemplo, a incerteza do instrumento já vem marcada, caso contrário, a metade da menor divisão da escala é um bom começo. **Note que nada sabemos ainda sobre a reprodutibilidade do processo de medida**.

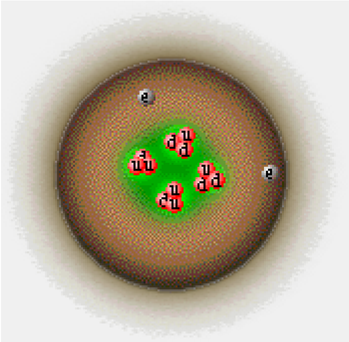
A incerteza é importante na hora de compararmos resultados. Na tabela abaixo temos os resultados de duas medidas de uma mesma grandeza com diferentes aparelhos e um padrão.

medida	**viscosidade** $\left(g\ \ cm^{-1}s^{-1}\right)$
A	$9{,}8 \pm 0{,}4$
B	$12{,}3 \pm 4{,}0$
padrão	$9{,}3$

Na tabela, o valor após o símbolo “$\pm$” indica em geral o intervalo de confiança de um desvio padrão, ou seja, o intervalo com probabilidade de 67% de conter uma medida da grandeza. O valor que segue o símbolo “$\pm$” é denominado incerteza. No caso acima, apesar da medida A estar aparentemente mais próxima do padrão sua incerteza, expressa pelo intervalo de confiança, indica um provável erro de medida, enquanto o valor da medida B, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor do padrão.

Autor: Manfredo Harri Tabacniks

2: Algarismos Significativos



Em medidas físicas é fácil encontrar uma dispersão de valores muito grande. O raio de um átomo e o raio de um universo é só um exemplo entre tantos. Para expressar esses valores adequadamente, é conveniente o uso da notação científica. Escreve-se o valor com apenas **um dígito antes da vírgula**, completa-se com algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e se multiplica tudo pela potência de dez adequada.

Por exemplo, o comprimento de um fio vale 14269513 mm ou é da ordem de $1,43\times10^{7}\,mm$. Note que se usaram apenas dois algarismos após a vírgula sendo que o último foi arredondado para "cima" uma vez que 1,4269 está mais próximo de 1,43 que de 1,42. A regra de arredondamento aqui proposta é a de arredondar o último dígito para "cima" caso o próximo dígito seja ≥ 5, mantendo caso contrário. Note que ao truncar e arredondar as casas decimais, perdemos muito da informação inicial, mas isso pode ser remediado usando quantos algarismos forem necessários depois da vírgula, como por exemplo, $1,4269513\times10^{7}\,mm$ reproduz o valor com toda a precisão inicial.

Denomina-se algarismo significativo o número de algarismos que compõe o valor de uma grandeza, **excluindo eventuais os zeros à esquerda** usados para acerto de unidades. Mas atenção: ZEROS À DIREITA SÃO SIGNIFICATIVOS. Na tabela a seguir um mesmo valor do raio de uma roda é escrito com diferente número de algarismos significativos.

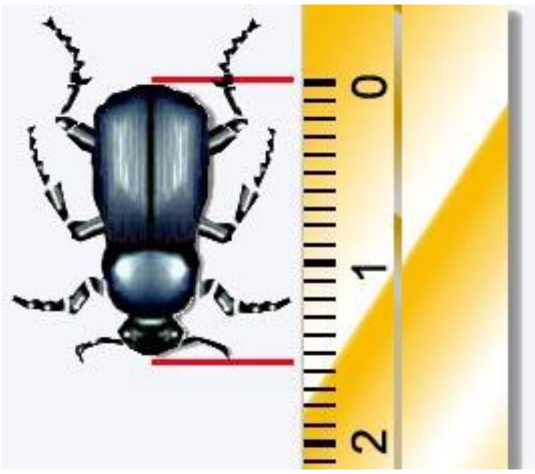
raio (mm)	significativos
$57,896$	5
$5,79\times10^{1}$	3
$5,789600\times10^{1}$	7
$0,6\times10^{2}$	1

A escolha de quantos significativos serão usados no valor da grandeza depende da grandeza, do processo de medida e do instrumento utilizado.

O NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS DE UMA GRANDEZA É DETERMINADO PELA SUA INCERTEZA

Para a expressão da incerteza adaptaremos a convenção sugerida por Vuolo (1992).

Outro exemplo é ilustrado a seguir: Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro.



Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro, qual das alternativas abaixo melhor caracteriza a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,5 e 1,6 cm
d) Entre 1,54 e 1,56 cm
e) Entre 1,546 e 1,547 cm

Acertou quem optou pela alternativa **d).** Isso porque, na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito (duvidoso). Uma vez que a régua foi marcada em milímetros você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa a medida. Você pode não precisar se vale 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56. **Essa é a expressão da sua incerteza**.

Só para confirmar: Qual o diâmetro da moeda?

a) Entre 0 e 2 cm

b) Entre 1 e 2 cm

c) Entre 1,9 e 2,0 cm

d) Entre 1,92 e 1,94 cm

e) Entre 1,935 e 1,945 cm

No exemplo acima podemos afirmar que a metade da menor divisão é uma estimativa da nossa incerteza: portanto o diâmetro da moeda pode ser expresso como:

$$1{,}92 \pm 0{,}05 cm$$
$$1{,}92(5) cm$$

a. Expressão da incerteza

Como devemos expressar a incerteza de uma medida? Ou, posto de outra forma: quantos significativos devem ter a incerteza de uma medida? Usaremos a seguinte convenção:

- Se o primeiro dígito significativo da incerteza for menor que 3, usaremos DOIS significativos.

Caso o primeiro dígito significativo da incerteza for maior ou igual a 3, podemos usar UM ou DOIS algarismos significativos para a incerteza;

Resumindo:

Qualquer que seja o caso sempre podemos usar dois significativos para expressar a incerteza. Mas atenção: quando a incerteza for resultado de uma estimativa ou apenas indicativa, tal como a metade da menor divisão de um instrumento, sugerimos usar apenas UM dígito significativo. Não tem sentido, por exemplo, expressar a incerteza de uma régua milimetrada com DOIS significativos (0,50mm), basta escrever 0,5mm.

b. Expressão da grandeza

- Usar **a mesma potência de dez** tanto para o valor da grandeza como para sua incerteza;

- O número de algarismos significativos da incerteza é dado pela regra 1.2.1. acima;

- O número de dígitos depois da vírgula na incerteza tem que ser o mesmo que no mensurando;

- A notação científica pode ser usada para melhor legibilidade.

Veja alguns exemplos abaixo. Note o casamento do número de casas decimais na incerteza e no valor do mensurando.

notação errada	notação correta
$5,30 \pm 0,0572$	$5,30 \pm 0,06$
$124,5 \pm 11$	125×11
$0,0000200 \pm 0,0000005$	$(200,0 \pm 5,0) \times 10^{-7}$
$(45 \pm 2,6) \times 10^{1}$	$(45 \pm 3) \times 10^{1}$

3: Conceitos básicos para expressão de incertezas

O texto a seguir é uma adaptação do Guia para Expressão da Incerteza de Medição publicada pelo INMETRO (1998). Infelizmente, normas metrológicas são um assunto um tanto burocrático, mas também é parte da linguagem científica que precisamos dominar. Não houve de modo algum a pretensão de exaurir o assunto. Ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, recomendamos fortemente consultar a referência citada.

1. Medição

O objetivo de uma medição é determinar o valor do mensurando, isto é, o valor da grandeza específica a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do método de medição e do procedimento de medição.

Medição: conjunto de operações que têm por objetivo determinar um valor de uma grandeza.

Valor (de uma grandeza): expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número. Exemplo: comprimento de uma barra: 5,34m

Mensurando: grandeza específica submetida à medição. Exemplo: temperatura de fusão da glicerina.

Grandeza (mensurável): atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo "grandeza" pode se referir a uma grandeza em sentido geral (comprimento, tempo, massa.) ou **grandeza específica** (comprimento de uma barra, resistência elétrica de um fio). Os símbolos das grandezas estão definidos na norma ISO 31.

Método de medição: sequência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições. Exemplos: método de substituição, método diferencial, método de "zero"...

Procedimento de medição: conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. Um procedimento (de medição) deve ser um documento com detalhes suficientes para permitir que um observador execute a medição sem informações **adicionais**.

2. Resultado de uma medição

Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando e, assim, só é completa quando acompanhada pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries ou conjunto de observações obtidas sob **condições de repetitividade**.

Resultado de uma medição: valor atribuído a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado se refere à indicação, se é um resultado corrigido ou não corrigido e se corresponde ao valor médio de várias medições. A expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza da medição.

Estimativa: valor de uma estatística (uma conta) utilizada para estimar um parâmetro (uma média, por exemplo) da totalidade de itens (em geral infinito), obtido como resultado de uma operação sobre uma amostra (em geral um conjunto limitado de dados) supondo um determinado modelo estatístico de distribuição (distribuição norma, por exemplo).

Incerteza (de medição): parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor de um mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, contribuem para a dispersão.

Repetitividade (de resultados de medições): grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição.

Condições de repetitividade incluem:

mesmo procedimento de medição
mesmo observador
mesmo instrumento de medição sob as mesmas condições
mesmo local
repetição em curto período de tempo

3. Erros e incertezas

Deve-se atentar e distinguir com cuidado os termos “erro” e “incerteza”. Esses termos não são sinônimos, ao contrário, representam conceitos completamente diferentes. Não devem ser confundidos nem mal empregados.

Erro

Uma medição tem imperfeições que dão origem a um erro no resultado da medição. O erro costuma ser classificado em dois componentes: erro aleatório e erro sistemático. O erro aleatório tem origem em variações imprevisíveis também chamadas efeitos aleatórios. Esses efeitos são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. O erro aleatório não pode ser compensado, mas pode ser reduzido aumentando o número de observações. Apesar de frequentemente citado, o desvio padrão da média não é o erro aleatório da média. Representa, sim, uma medida da incerteza da média devido aos efeitos aleatórios. O erro sistemático, em geral, não pode ser eliminado, mas pode eventualmente ser reduzido ou, caso seja identificado, deve ser corrigido.

4: Estatísticas

Quando se trabalham com vários resultados em condições de repetitividade de uma medição, usam-se algumas estatísticas para resumir e consolidar as informações obtidas. Por exemplo: ao tentar determinar o tempo de queda de um corpo, um aluno mediu uma única vez o evento. Tendo a incerteza do aparelho utilizado, poderíamos ter uma ideia do acerto do aluno. Mas a incerteza cobre apenas o erro do aparelho e não a do aluno ou mesmo do procedimento experimental. O problema que se coloca é:

COMO DETERMINAR A INCERTEZA DE UMA MEDIDA?

Uma abordagem alternativa para este problema é medir várias vezes o mesmo tempo e calcular a média. A variabilidade de cada medida é dada pelo desvio padrão e a variabilidade da média (caso se obtenham várias médias) será dada pelo desvio padrão da média.

O problema é que para o valor mais provável a partir de médias, determinar desvios padrão e desvio padrão de médias exige que se façam INFINITAS medidas e definitivamente não temos tempo para isso! Vamos, portanto, ESTIMAR o valor mais provável, o desvio padrão e o desvio padrão da média para um conjunto pequeno de medidas. O desenvolvimento teórico e a justificativa para esse procedimento podem ser encontrados em qualquer livro texto básico de estatística, como, por exemplo, Helene e Vanin (1981).

A média, o desvio padrão e o desvio padrão da média, para um conjunto finito com n dados podem ser estimados aplicando as equações abaixo.

média de uma amostra com n valores:

$$m = \frac{1}{n}\sum x_i$$

desvio padrão de uma amostra:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - m)^2}$$

desvio padrão da média com n valores:

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n}\sum(x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

5: Desvio Padrão

Um processo de medida tem sempre por objetivo determinar o valor médio verdadeiro, y_{mv} , de uma grandeza, cujo valor verdadeiro é y_V. Acontece que, em geral, o valor verdadeiro nos é desconhecido, e para se obter o valor médio verdadeiro, são necessárias infinitas medidas!

Dessa forma, para um conjunto de medidas, $\{y_1, y_2, y_3, ...y_n\}$, o valor médio verdadeiro é dado por:

$$y_{mu} \lim_{r \to m}\left(\frac{1}{n}\sum_{I=1}^{n} y_1\right)$$

Como em geral y_{mu} é um valor inacessível, usam-se estimativas: a média dada pela equação

$$m = \frac{1}{n}\sum x_i \quad ,$$

a estimativa do desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - m)^2}$$

e do desvio padrão da média

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)_n}\sum(x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Apenas relembrando alguns termos novos que usaremos com frequência:

MENSURANDO: Grandeza a ser determinada num processo de medição.

VALOR VERDADEIRO: Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medida perfeito.

INCERTEZA: Parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuídos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

ERRO: É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exatidão (acurácia).

ERRO SISTEMÁTICO: Erro constante característico do processo ou instrumento.

ERRO PADRÃO: Desvio padrão dos valores médios em relação ao valor verdadeiro.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser 'corrigido' enquanto a incerteza é um intervalo de confiança das medidas. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

Exemplos

Medida da tensão de uma pilha.

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de $1\alpha = 0{,}25\%$ do valor indicado.

A incerteza do processo de medida deve, portanto, ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. As medidas realizadas estão na tabela a seguir.

n	U (volt)	incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004

4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Tabela 1 - Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

Antes, um comentário: a tabela 1 acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo:

n	**U ± 0,004 (V)**
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Tabela 2 - Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

Vamos aos cálculos. Note que em cálculos intermediários usamos um dígito significativo a mais, para apenas no final expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior.

Valor médio:

$$\bar{U} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i = 1,5763V$$

Desvio padrão das medidas:

$$\sigma\sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}\left(V_i - 1,5763\right)^2} = 0,0066V$$

Desvio padrão do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,0066}{\sqrt{6}} = 0,0027V$$

Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida):

$$L_r = \left(\frac{0,25}{100}\right)1,5763 = 0,0039V$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do **processo de medição**) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medidas, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Uma única medida, por exemplo, a primeira medida na Tabela 2, pode ser expressa como:

$$U_1 = (1,572 \pm 0,007)V$$

A incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal citada na tabela 1. Tivemos que fazer uma série de medidas para determinar o NOSSO desvio padrão.

Uma vez que realizamos uma série de 6 medidas, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e seu desvio padrão (o desvio padrão da média). Portanto nosso resultado ficaria assim:

$$\bar{U} = [1,5763 \pm 0,0027]V$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um **erro de calibração**. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com **voltímetros diferentes**? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar a incerteza de calibração do mesmo, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse.

(Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho vagabundo?). Podemos supor então que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal.

Dessa forma é possível que instrumentos diferentes indiquem valores diferentes para uma mesma medida, nesse nosso caso, com um desvio padrão de 0,004V. Caso tenhamos em nosso laboratório mais que um voltímetro do mesmo modelo, temos que incorporar esse “desvio padrão de calibração” em nosso resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada de erro padrão, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão de calibração do instrumento:

Erro padrão:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + L_r^2} = 0,0048V$$

Finalizando, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$$\bar{U}_p = (1,5763 \pm 0,0048)V$$

Afinal, qual o valor que devemos usar? Depende. Para comparar séries de medidas no mesmo instrumento, podemos usar a média $\bar{U}$ e o desvio padrão da média.

Para comparar medidas entre si, basta o desvio padrão.

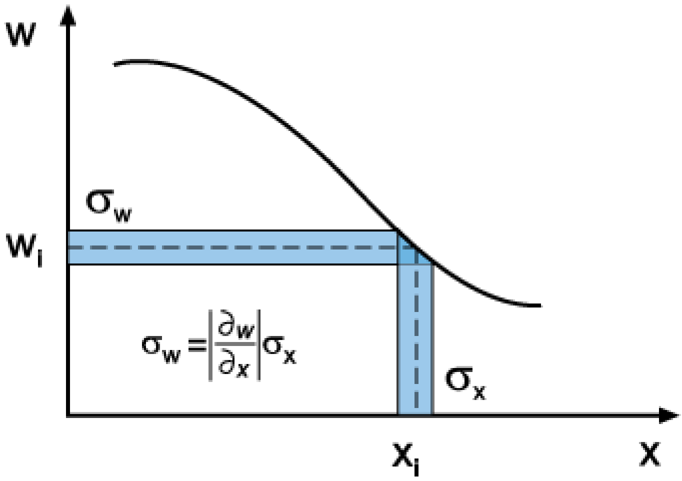
Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.

6: Propagação de incertezas

Muitas vezes usaremos o valor do mensurando numa equação para determinar uma outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o **mensurando** temos a **incerteza do processo** de medida, enquanto que para grandezas determinadas através de fórmulas temos a **incerteza propagada**.

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função $w(x,y,z)$ onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e independentes entre si, quanto vale σ_w. A independência entre $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar suponha w apenas função de x. No gráfico abaixo está representando w(x).



A incerteza de w, neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção da incerteza de x. Para pequenos intervalos no eixo x, temos em primeira ordem:

$$\sigma_w = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\sigma_x$$

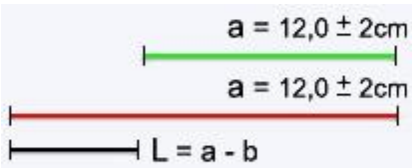
Para mais de uma variável independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

a. Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos:



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação anterior:

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 = 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

que resulta:

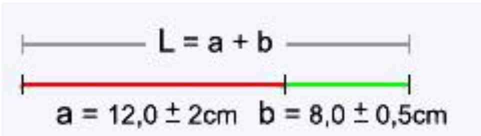
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4.25$$
$$\sigma_L = 2,06cm$$

Logo

$$L = \left(20,0 \pm 2,1\right)cm$$

b. Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente, usando a equação (2.3):

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 = 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

resulta:

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\sigma_L = 2,8cm$$

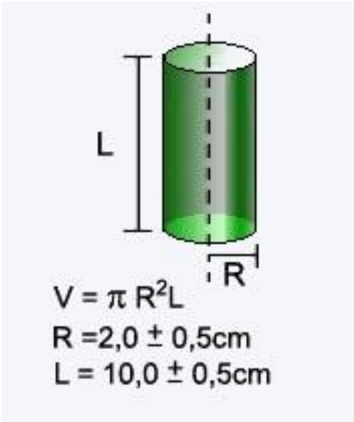
Logo

$$L = \left(4,0 \pm 2,8\right)cm$$

Note que na soma, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas na diferença de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

c. Multiplicação de grandezas

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto: π, R e L.

$$\sigma_v^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 = \left(R^2 L\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\pi 2RL\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\pi R^2\right)\sigma_L^2$$

Dividindo por V^2:

$$\frac{\sigma_v^2}{V^2} = \frac{\left(R^2 L\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\pi 2RL\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\pi R^2\right)\sigma_L^2}{2}$$

$$\left(\frac{\sigma_v}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidos na figura:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\pi}\right) = 0 \text{ (i)}$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2,0} \text{ (ii)}$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right) = \frac{0,5}{10,0} \text{ (iii)}$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_v}{V} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,05^2} = 0,5025$$

MUITO IMPORTANTE:

Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa $\frac{\sigma_v}{V}$. NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (V) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA. Multiplicando σ_V por V e ajustando o número de significativos...

$$\frac{\sigma_v}{V} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,05^2} = 0,5025$$

O resultado do volume do cilindor vale:

$$V = (126 \pm 63)\,cm^3$$

ou ainda

$V = (13 \pm 6) \times 10 cm^3$ Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações podem ser resumidas como segue:

Na soma ou subtração, a incerteza absoluta do resultado é a soma em quadraturadas incertezas absolutas.

Na multiplicação ou divisão, a incerteza relativa do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não se esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta).

A seguir estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Uma importante regra prática pode ser obtida se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Logo:

Qualquer termo menor que 1/3 do maior termo na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e em geral, pode ser desprezado.

Exemplificando:

Volte para o exemplo:

a. Adição de valores experimentais

Lá calculamos o resultado de:

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

observe que $0,5^2 << 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria $\sigma_L = 2cm$, não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Algebricamente: sejam x_1 e x_2 os termos de uma soma em quadratura com $x_2 = kx_1$. A soma em quadratura resulta:

$$S = \sqrt{x_1^2\left(1+k^2\right)}$$

Seja agora

$$S' = \sqrt{x_2^2}$$

em que se desprezou x_1 uma vez que $k > 1$. Note que $S > S'$, uma vez que $x_2 > x_1$. Queremos saber, o menor valor de k de forma que S' e S não difiram em mais que 5%. Queremos que

$$S - S' < 0,05 * S \text{ ou } \frac{S'}{S} > 0,95$$

Com alguma manipulação algébrica se obtém

$$k > 3,0$$

Isto pode simplificar muito as contas pois, numa soma em quadratura, podemos simplesmente desprezar termos menores que 1/3 do maior. Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que **são os termos da soma em quadratura** que devem ser comparados, não as incertezas.

7: Representação de incertezas em um gráfico

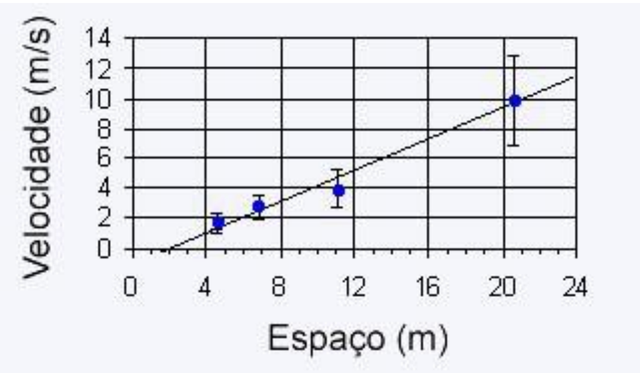
Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Exemplos

Representar dados da tabela abaixo em um gráfico.

n	s ± 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55
2	6,90	2,76±0,82
3	11,10	3,99±1,20
4	20,60	9,88±2,96

Espaços e velocidades de um corpo.



Velocidades e posições de um corpo.

Note que a incerteza do espaço **não** foi colocada no gráfico, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.
- A origem (0; 0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental, caso contrário trace a melhor reta ignorando a origem.

- A reta deve estar contida na maioria das barras de incertezas.

8: Resumo de fórmulas para propagação de incertezas

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
$w = x \pm y$ soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$w = axy$ multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a\left(y/x\right)$ divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = x^m$ potência simples	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$w = ax$ multiplicação por constante	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ ou $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
$w = ax + b$	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ ou $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
$w = ax^p y^p$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = asen\left(bx\right)$ função qualquer **aplicar a definição**	$\sigma_w = \lvert ab\cos\left(bx\right)\rvert\sigma_x \quad b\sigma_x$ em radianos