Autores: Gil da Costa Marques e Nobuko Ueta

1: Introdução

No estudo de um fenômeno físico são realizadas experiências onde são medidas diversas grandezas ao mesmo tempo. A relação entre essas grandezas pode ser expressa por meio de fórmulas matemáticas, tabelas ou gráficos. Muitas vezes também o significado de uma lei da natureza ou de uma equação fica mais claro se a representamos num gráfico. Neste texto revisamos algumas ideias básicas necessárias à construção e interpretação de gráficos, particularmente quando a função é linear.

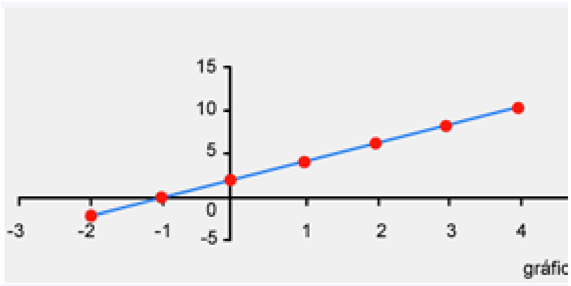
Representamos os gráficos no plano por um sistema de **eixos cartesianos** ortogonais. Para cada eixo adota-se uma escala, sendo que as duas escalas podem ser diferentes.

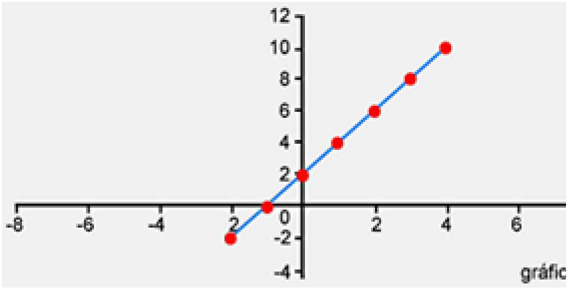
Na construção de um gráfico, a primeira tarefa importante que temos que realizar é **uma escolha conveniente da escala**. Se a escala não for conveniente, parte do gráfico pode ficar fora do papel, ou então ficará tão pequeno que não poderemos observar seus detalhes. O procedimento descrito a seguir permite escolher bem a escala.

a)Determine o tamanho do papel e identifique os valores máximos e mínimos das grandezas que serão representadas nos eixos x e y e, a partir dessas dimensões, calcule a escala que permita ocupar o espaço disponível.
b) A divisão da escala deve ser definida de modo a permitir a fácil localização e marcação de pontos, bem como uma posterior leitura de valores a partir do gráfico. Isso se consegue usando divisões na escala que sejam múltiplos ou submúltiplos de 10, ou seja: ...; 0,1; 1; 10; ...; 0,2; 2; 20; ...; 0,5; 5; 50; ...

Agora observe os gráficos abaixo e responda rápido: eles representam a mesma função ou funções diferentes?

Autores: Gil da Costa Marques e Nobuko Ueta





Para construir um gráfico de uma função organizamos uma tabela com valores convenientes de x e os correspondentes valores de y. A seguir localizamos no plano (supondo um sistema de eixos cartesianos) cada par (x, y). O gráfico da função é obtido ligando-se esses pontos de modo a respeitar o seu comportamento.

Construa uma tabela com pares de valores x e y para os dois gráficos acima. Responda novamente: eles representam a mesma função?

2: Quando o gráfico é uma reta

Uma reta é descrita pela função de primeiro grau (primeiro grau porque a variável x aparece elevada à potência 1):

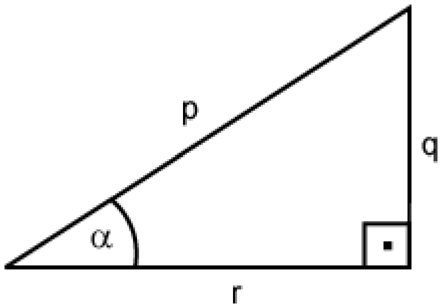
$$y = ax + b$$

onde a e b são constantes reais. Dizemos que y depende linearmente de x ou que a relação entre y e x é linear.

3: Interpretação dos coeficientes A e B em Y=AX +B, quando X e Y tem a mesma dimensão

O **número real a** é denominado **coeficiente angular** e está associado à **inclinação da reta em relação ao eixo Ox**. No caso (i) da prática anterior, o coeficiente angular é igual a 2; no caso (ii) é igual a 3. Note que a reta descrita pela função do item (ii) é "mais inclinada" que a do item (i). Se a for negativo

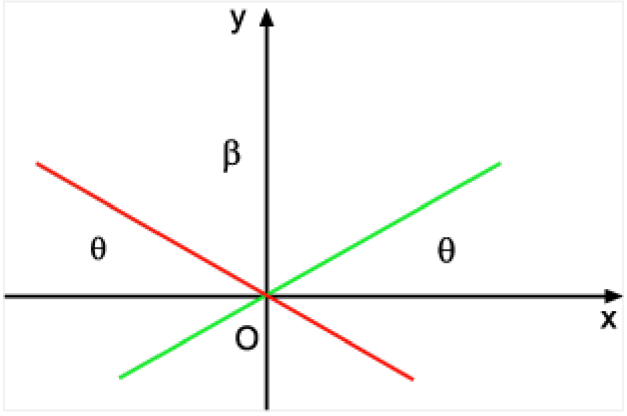
$(a<0)$, como no item (iv), a grandeza y decresce à medida que x cresce e a reta forma um ângulo maior que 90º com o eixo x.Podemos relacionar o coeficiente angular com o ângulo entre a reta e o eixo Ox. Para relembrar porque, considere o triângulo retângulo abaixo. Os dois lados que formam o ângulo reto são chamados catetos. O lado q é o cateto oposto ao ângulo α e o lado r é o cateto adjacente ao ângulo α. No triângulo retângulo define-se tangente de α (abreviadamente tan α) como a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente:



$$tg(\alpha)=\frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}=\frac{q}{r}$$

Assim, vemos que a constante a é igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo Ox.

Podemos definir as funções trigonométricas, como seno, coseno e tangente, para qualquer ângulo. A tangente de um ângulo $90^{\circ}<\theta<180^{\circ}$ tem sinal negativo e é igual em módulo à tan $(180^{\circ}-\theta)$. Com esta definição, o coeficiente a pode ser interpretado como a tangente do ângulo que a reta $y=ax+b$ faz com o eixo x. Se a for negativo, o ângulo que a reta forma com o eixo x é obtuso e y diminui se x aumenta. A figura ao lado mostra duas retas com coeficientes angulares de mesmo módulo e sinais contrários. Chamando de a o coeficiente angular da reta que forma ângulo θ com o eixo Ox, temos $a>0$ e a reta que forma ângulo $\beta=180^{\circ}-\beta$ tem coeficiente angular $-\alpha$.



O número real b corresponde ao valor de y quando $x=0$, ou seja, indica em que ponto a reta vai "cortar" o eixo y. Note que a reta descrita pela função do item (i) cruza o eixo Oy em $y=2$ e a reta do item (iii) cruza o eixo y em $y=-1$. Como o coeficiente angular das duas retas é o mesmo $(a+2)$, elas têm a mesma inclinação, ou seja, são paralelas.

4: Em física, a maioria das grandezas envolvidas nas equações tem dimensão

Em física, a maioria das grandezas envolvidas nas equações tem dimensão, isto é, são expressas em relação a uma unidade de medida. Isso faz com que a inclinação do gráfico que expressa um fenômeno físico tenha uma unidade e não possa ser interpretada como tangente de um ângulo, na maior parte dos casos.

Entretanto, sempre podemos definir a inclinação da reta a partir de um par qualquer de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), pela expressão

$$\text{inclinação}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a \ .$$

Assim, o coeficiente **a** é uma grandeza com dimensão física quando as grandezas x e y não têm a mesma dimensão física. Por exemplo, se y mede posição em m e x mede tempo em s, a inclinação tem a dimensão de m/s.

É importante, ainda, ter atenção para o fato de que, apesar da reta que representa o gráfico y(x) formar um ângulo com o eixo Ox que pode ser medido, por exemplo, com um transferidor, não podemos dizer que o coeficiente a seja a tangente desse ângulo. Isso ocorre porque este ângulo depende da maneira como você escolhe as escalas. Por isso, para calcular a é necessário usar a expressão para a inclinação dada acima, embora seja comum chamá-lo d e coeficiente angular.

Em relação ao coeficiente **b**, a interpretação é a mesma da situação anterior, exceto pelo fato dele possuir também uma dimensão física na maior parte dos casos.

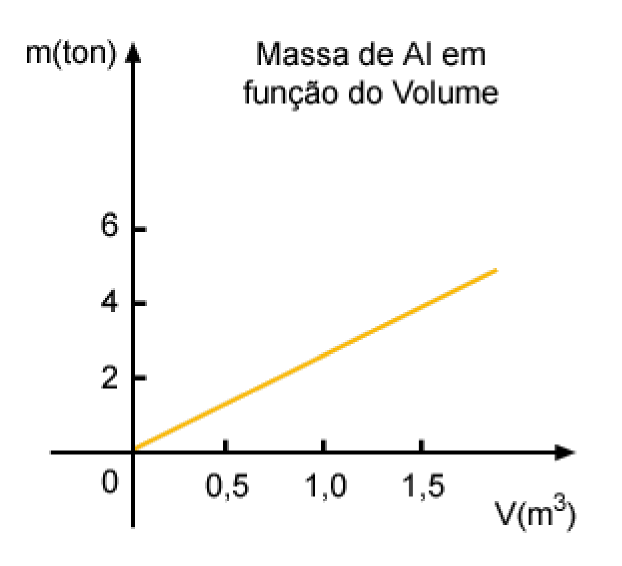
5: Variação proporcional vs. proporção

Estamos muito habituados a "fazer regra de três" em situações do cotidiano. Calculamos muito rapidamente que, se a dúzia de bananas custa R$2,40, uma dúzia e meia custará R$3,60. Dizemos que o preço da penca é proporcional ao número de bananas. Existem muitas outras situações onde há proporcionalidade entre grandezas, por exemplo, um mol de moléculas contém 6×10^{23} moléculas.

Uma grandeza física que é uma proporção entre duas outras grandezas é a densidade dos corpos homogêneos - a densidade é a razão entre a massa e o volume do corpo. Dizer que o corpo é homogêneo significa dizer que as propriedades de qualquer fragmento são as mesmas do corpo todo.

Para fixar ideias nesta discussão, imagine uma usina de Alumínio. A densidade do Al é $2,7g/cm^2 = 2,7\times103kg/m^3$. A fábrica produz, a partir de um grande corpo de Alumínio que podemos considerar puro nesta discussão, perfis, panelas e papel de Alumínio. Dizer que o grande corpo de Al é homogêneo, em relação à densidade, significa dizer que a proporção entre massa e volume é a mesma para qualquer pedaço desse corpo. Assim, tanto para um pedaço de papel de Alumínio quanto para um caco da panela ou um fragmento de um trilho de cortina, a razão entre massa e volume é $\rho = 2,7 \times 103 kg / m^3$. Podemos, portanto, sempre deduzir o volume V de um objeto de Al como $V = m / \rho$. Quando o objeto tem Volume conhecido, podemos deduzir sua massa m como $m = V_\rho$.

O gráfico da figura abaixo representa essa propriedade do Alumínio metálico puro nas condições ambientes normais.

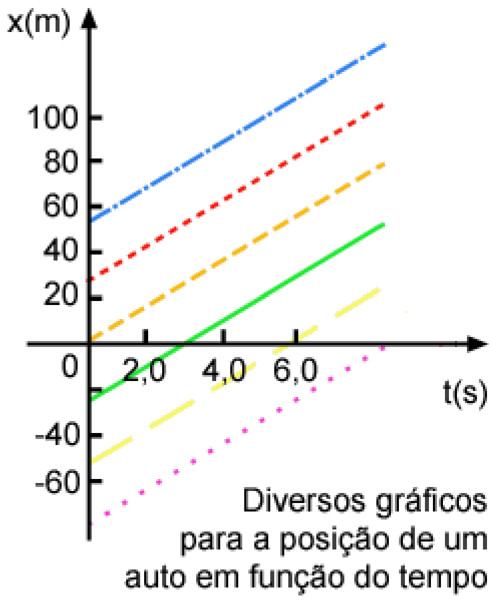


Note a propriedade, absolutamente importante, do gráfico da massa de Alumínio em função do volume passar pela origem do sistema de coordenadas, identificada pelo ponto O.

Quando lidamos com a velocidade de um objeto, tendemos a pensar que ela representa uma proporção. Afinal, dizer que um automóvel está correndo a 10 m/s significa que ele corre 10 m em 1 s. No entanto, a velocidade não é uma proporção entre a posição e o tempo. Veja, na figura abaixo, diferentes possíveis gráficos da posição em função do tempo de um automóvel com velocidade $v = 10 m / s$.

Caso você, equivocadamente, imaginasse a velocidade como uma proporção entre posição e tempo, deduziria que a posição do automóvel em $t = 6,0 s$ é $x = 60 m$. Vemos no gráfico acima que, exceto na situação descrita pela linha tracejada, a posição do automóvel em $t = 6,0 s$ NÃO é $x = 60 m$.

Autores: Gil da Costa Marques e Nobuko Ueta

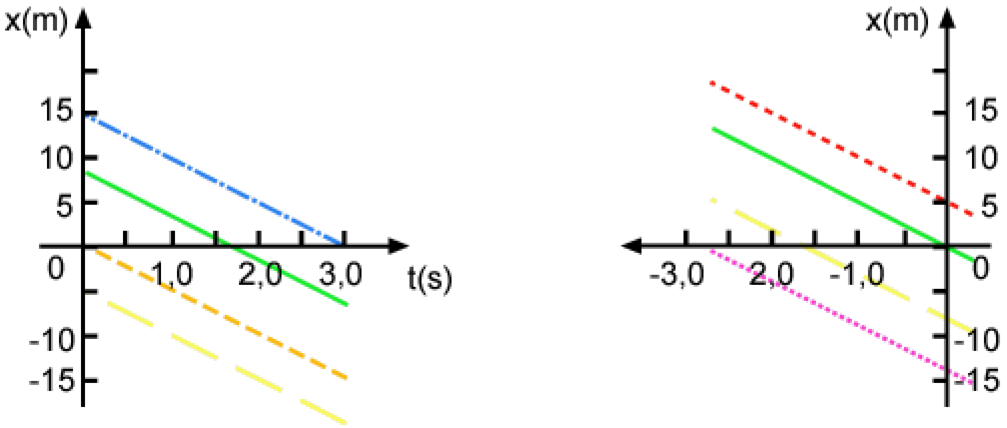


Se a velocidade não é uma proporção, o que ela é? Resposta: é uma variação proporcional. Ela representa o deslocamento - uma variação de posição - num intervalo de tempo. Assim, a velocidade não é a proporção entre a posição e o tempo, mas sim a proporção entre variação de posição e "variação" de tempo. Quando um corpo mecânico desloca-se à velocidade constante, sua variação de posição é proporcional ao intervalo de tempo considerado, portanto, é uma variação proporcional.

Para pensar...

Nas situações mais simples onde há apenas um objeto em movimento uniforme, você pode escolher a origem do sistema de coordenadas de maneira que em $t = 0s$ ele esteja na origem. No entanto, isso não pode ser feito em geral, de maneira que NUNCA devemos pensar na velocidade como uma proporção entre posição e tempo, mesmo que isso dê certo em alguma situação muito particular.

Uma variação proporcional pode, com frequência, ser expressa por números negativos, o que raramente faz sentido com proporções. Nas figuras abaixo mostramos alguns possíveis gráficos de posição em função do tempo para um objeto à velocidade de $-5m/s$. **A diferença entre as duas figuras é devida apenas ao intervalo de tempo considerado em cada um dos movimentos.**



Descreva uma situação física de **Movimento Uniforme** onde você defina tempos negativos. Veja que basta escolher uma origem para a coordenada tempo posterior ao instante em que você começa a descrever a situação.