18 – Gravitação

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 18.1

Um satélite artificial de massa $m = 500\,kg$ encontra-se em movimento em órbita circular a uma altitude $h = 600\,km$. A partir dos dados: $(GM_T) = 40 \times 10^{13}\,N.m^2/kg$; e o raio da Terra $= R_T = 6.400\,k$, determinar, no caso desse satélite:

a) Sua aceleração.
b) Sua velocidade.
c) O período (T) do movimento orbital do satélite.

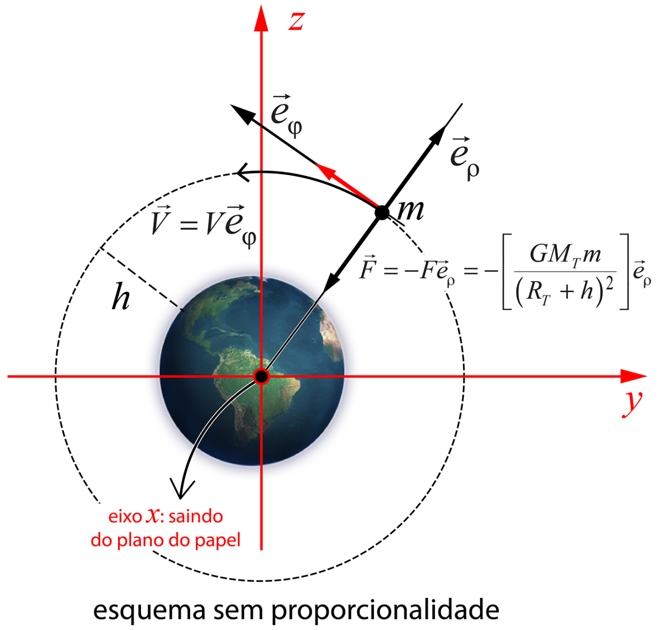

Figura 18.4: Componentes da força e da velocidade de um satélite em órbita circular. Os vetores $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$ são versores nas direções radial e tangencial à trajetória circular.

Resolução

Sobre o satélite artificial de massa m atua uma única força, que é a força de atração gravitacional exercida pela Terra (de massa M_T, conforme ilustra a Figura 18.4).

A força gravitacional é descrita pela Lei da Gravitação Universal, a equação 18.3. Dela podemos inferir que sua intensidade, ou módulo, é dada (para partículas ou corpos esféricos com distribuição de massa simétrica) pela expressão:

$$F = \frac{GM_T \cdot m}{r^2}$$

onde a distância r do satélite até o centro da Terra será escrita em termos do raio da Terra e da altura até a superfície como $r = RT + h$. A sua direção é radial, ou seja, coincidente com aquela que une o centro da Terra ao satélite e o sentido é sempre dirigido para o centro da Terra. Todos esses dados estão contidos na expressão vetorial:

$$\vec{F} = -\left[\frac{GM_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2}\right] \cdot \vec{e}_\rho$$

onde $\vec{e}_\rho$ = versor na direção radial.

Em virtude do caráter circular do movimento, a força gravitacional $\vec{F}$, conforme ilustra a Figura 18.4, é perpendicular à velocidade $\vec{v} = v.\vec{e}_\varphi$, onde $\vec{e}_\varphi$ = versor na direção tangencial à trajetória.

a) A aceleração do satélite.

Nessas circunstâncias, a 2ª Lei de Newton – $\vec{F} = m.\vec{a}$ – se escreve:

$$-\left[\frac{GM_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2}\right] \cdot \vec{e}_\rho = m\vec{a}$$

Donde a aceleração do satélite é dada por:

$$\vec{a} = -\left[\frac{GM_T}{\left(R_T + h\right)^2}\right] \cdot \vec{e}_\rho$$

Dessa expressão inferimos que o módulo da aceleração é $a = \dfrac{GM_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2}$. Ademais, a sua direção é radial (direção do versor), mas no sentido oposto a ele, ou seja, apontando para o centro da Terra. Por estar sempre dirigida para o centro da circunferência (trajetória do satélite), essa aceleração é denominada aceleração centrípeta (a_{centr}).

Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$a = a_{centr} = \frac{40.10^{13}\,\dfrac{N.m^2}{kg}}{\left(6.400.10^3 m + 600.10^3 m\right)^2} = \frac{40.10^{13}}{\left(7.10^6\right)^2}\left[\frac{N}{kg}\right] = \frac{400}{49} N/kg \cong 8{,}16 m/s^2$$

Vetorialmente, escrevemos:

$$\vec{a} = \vec{a}_{centr} = -(8{,}16) \cdot \vec{e}_\rho$$

b) Velocidade escalar do satélite.

Conforme estudado em Movimento Circular, a aceleração centrípeta é $a_{centr} = v^2/r$. Aplicado ao movimento do satélite, temos:

$$a_{centr} = \frac{v^2}{\left(R_T + h\right)}$$

Portanto, a velocidade escalar do satélite é: $v^2 = [a_{centr}][R_T + h]$. Donde:

$$v = \sqrt{[a_{centr}][R_T + h]}$$

No caso especifico, encontramos:

$$v = \sqrt{\left[8{,}16 m/s^2\right]\left[7.10^6 m\right]} = \sqrt{57{,}12.10^6\, m^2/s^2} \cong 7{,}56x10^3\, m/s = 7{,}56 km/s$$

c) O período do movimento orbital do satélite.

O período T é o intervalo de tempo necessário para que o satélite complete, em movimento circular uniforme, uma volta ao redor da Terra. Isto significa que o arco descrito no tempo T é $\Delta s = 2\pi.r$. Sendo v = constante, podemos escrever:

$$v = \frac{\Delta s}{T} = \frac{2\pi.r}{T}$$

donde:

$$T = \frac{2\pi.r}{\text{v}}$$

Substituindo-se os valores dados, concluímos que:

$$T = \frac{2 \times 3{,}14 \times \left(7 \times 10^6\, m\right)}{8{,}16 \times 10^3\, m/s} \cong 5{,}4 \times 10^3\, s \cong 89{,}8 \text{ min}\mathit{utos}$$

Exercício Resolvido 18.2

Um satélite artificial terrestre tem órbita circular à altitude $h = 43.600\, km$. A sua massa é $m = 2.500\, kg$ e sua velocidade orbital é $v = 2\, km/s$.

Dados: $GM_{\text{Terra}} = 40 \times 10^{13}\, Nm^2/kg$; $R_{\text{Terra}} = 6.400\, km$.

A partir desses dados, determine:

a) O campo gravitacional ao longo da órbita do satélite.

b) A sua energia potencial gravitacional.

c) A energia cinética do satélite

d) A energia mecânica do satélite.

e) O potencial gravitacional criado pela Terra ao longo da órbita do satélite.

Resolução

a) O campo gravitacional ao longo da órbita.

Concluímos que o campo gravitacional nos pontos pertencentes à orbita do satélite, ou seja, nos pontos localizados à distância $r = 6.400\, km + 43.600\, km = 50.000\, km$ do centro da Terra, tem as seguintes características:

- Módulo: $g = \dfrac{GM_{Terra}}{r^2} = \dfrac{40 \times 10^{13}}{\left(50 \times 10^6\right)^2} = 0{,}16\, N/kg$ ou $0{,}16\, m/s^2$
- Direção: radial.
- Sentido: dos pontos da trajetória para o centro da Terra.

Vetorialmente ele pode ser assim representado:

$$\vec{g} = -(0{,}16) \cdot \vec{e}_\rho$$

onde $\vec{e}_\rho$ = versor na direção radial – divergente do centro – em cada ponto da trajetória.

b) Energia potencial gravitacional.

Por meio da equação 13.16, podemos calcular a energia potencial gravitacional $U(r)$ do satélite. Obtemos a partir dos dados:

$$U(r) = -\frac{GM_{Terra}}{r} \cdot m_{satélite} = -\frac{\left[40 \times 10^{13}\right]}{(6.400 + 43.600)10^{13}} \cdot 2.500 = -20 \times 10^9\, J$$

Conforme nos movimentamos para pontos longínquos ($r \to \infty$), a energia potencial se torna mais e mais fraca, ou seja, $U \to 0$. Ela assume, porém, sempre valores cada vez menos negativos.

O sinal negativo da expressão do potencial indica que se trata de uma energia de ligação. Ela determina quão ligado à Terra – energeticamente falando – o satélite se encontra.

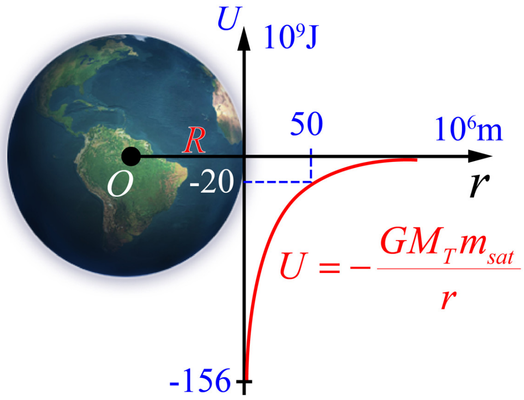

Figura 18.7: Comportamento da energia potencial como função da distância até o centro da Terra. Válida apenas para os pontos externos à distribuição.

c) A energia cinética do satélite.

A velocidade escalar do satélite é $v = 2\sqrt{2}km/s = 2\sqrt{2}\cdot 10^3 m/s$ e a sua massa é $m = 2.500\,kg$. Portanto, a sua energia cinética é:

$$E_c = (1/2)mv^2 = (1/2)(2.500)\cdot\left[2\sqrt{2}\cdot 10^3\right]^2 = 10\times 10^9 J$$

d) Energia mecânica do satélite.

Conforme definido em 13.48, a energia mecânica do satélite é:

$$E = E_c + U = 10\times 10^9 J + \left(-20\times 10^9 J\right) = -10\times 10^9 J$$

A energia mecânica negativa significa que o satélite se encontra ligado à Terra. Para "desligá-lo" é preciso imprimir ao satélite uma energia cinética maior do que $10 \times 10^9 J$.

e) O potencial gravitacional criado pela Terra.

A equação que define a relação entre a energia potencial $U(r)$ de uma massa m e o potencial gravitacional $V(r)$ do ponto onde a massa se encontra é: $V(r) = \frac{U(r)}{m}$. Como $U(r) = -[-GM_{\text{Terra}}.m]/r$:

$$V(r) = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{r}$$

Como GM = constante, o potencial gravitacional depende apenas de r. Assim, como os pontos da órbita do satélite têm a mesma distância em relação ao centro da Terra, esses pontos têm o mesmo potencial gravitacional. O seu valor é:

$$V_{\text{órbita satélite}} = -\frac{40\times 10^{13}}{50\times 10^6}\frac{N\times m^2/kg}{m} = -8\times 10^6\ J/kg$$

Exercício Resolvido 18.3

Determine o potencial gravitacional, em todos os pontos do espaço, gerado por uma distribuição de massas sobre uma superfície esférica de raio R. Admita que a massa total M seja distribuída uniformemente.

Resolução

O potencial gravitacional $V(x, y, z)$ num ponto de coordenadas $P(x, z, y)$ produzido por uma massa infinitesimal dm devido a uma massa infinitesimal dm localizada num ponto $P'(x', z', y')$ sobre a distribuição de massa é dado por:

$$dV = -\frac{dmG}{\sqrt{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)}}$$

Assim, o potencial é dado pela integral de superfície:

$$V(x,y,z) = -G\iint_S \frac{\sigma dA}{\sqrt{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)}} = -G\iint_S \frac{\sigma dA}{\sqrt{r'^2 - 2\vec{r}'\cdot\vec{r} + r^2}}$$

Onde:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

Sobre a esfera, tomamos $r'^2 = R^2$. Além disso, podemos sempre considerar o eixo z passando pelo ponto P. Nesse caso, tomamos $P(0, 0, z)$. Assim, fazemos:

$$V(x,y,z) = -G\sigma\iint_S \frac{dA}{\sqrt{R^2 - 2Rz\cos\theta + z^2}}$$

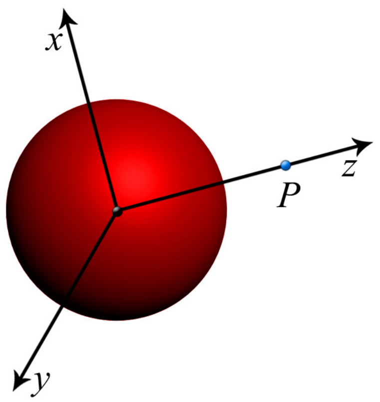

Figura 18.11: Uma distribuição de massa sobre uma superfície esférica distribuída uniformemente sobre ela e a escolha de eixos.

Lembrando que, em coordenadas esféricas,

$$dA = R^2 sen\theta d\theta d\varphi$$

O resultado é que, nesse caso o potencial é dado como uma integral sobre dois ângulos;

$$V(0,0,z) = -G\sigma\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 sen\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta}}$$

Integrando sobre φ obtemos:

$$V(0,0,z) = -G\sigma 2\pi\int_0^{\pi} \frac{sen\theta d\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}} = -\frac{2\pi G\sigma}{2Rz}\int_0^{\pi}\frac{2RGsen\theta d\theta}{\sqrt{z^2-2Rz\cos\theta+R^2}}$$

Seja,

$$u = -2RG\cos\theta$$

$$du = 2RGsen\theta$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi} \frac{2RGsen\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2RG\cos\theta}} = \int\frac{du}{\sqrt{z^2+R^2+u}} = 2\sqrt{\left(z^2+R^2\right)+u}$$

Logo,

$$V(0,0,z) = -\frac{GM2\pi}{zR}\sqrt{z^2+R^2-2RG\cos\theta}\Big|_o^{\pi}$$

Portanto,

$$V(0,0,z) = -\frac{GM2\pi}{zR}\left(\sqrt{z^2+R^2+2Rz} - \sqrt{z^2+R^2-2Gz}\right)$$

Lembrando que:

$$\left(\sqrt{z^2+R^2+2Rz}-\sqrt{z^2+R^2-2Rg}\right)=\sqrt{\left(R+z\right)^2}-\sqrt{\left(R-z\right)^2}=\left|R+z\right|-\left|R-z\right|$$

Onde $|R-z|$ é a função módulo de $R-z$. Isso nos permite concluir que nos pontos no interior da esfera ($z < R$):

$$V\left(0,0,z\right)=-\frac{G\sigma 4\pi}{R}$$

Ou seja, o potencial é constante no interior da esfera.

Nos pontos externos à distribuição, no entanto, temos:

$$V\left(0,0,z\right)=\frac{\sigma\left(4\pi\right)}{z}GR^2$$

Lembrando a expressão para a densidade superficial de massa, podemos escrever a expressão acima como:

$$V\left(0,0,z\right)=-\frac{GM}{z}$$

E, portanto, lembrando que z é a distância até a origem, obtemos, em geral, que:

$$V\left(r\right)=\begin{cases}-\dfrac{GM}{R} & \text{se } r\leq R\\ -\dfrac{GM}{r} & \text{se } r>R\end{cases}$$

Ou seja, nos pontos externos à distribuição tudo se passa como se a massa total, M, estivesse concentrada na origem.

Exercício Resolvido 18.04

Como varia o campo gravitacional gerado pela Terra?

a) Em pontos de altitude h cada vez maiores.

b) Em pontos situados num túnel hipotético da superfície até o centro da Terra

Resolução

a) Campo gravitacional gerado pela Terra

Para pontos fora do planeta (condição que escrevemos como $r \geq R_{\text{Terra}}$), a componente radial do campo gravitacional é dada por:

$$g\left(r\right)=GM_{\text{Terra}}/r^2.=\left[40\times10^{13}\right]/r^2=\left[40\times10^{13}\right]\left[1/r^2\right]$$

Esta equação – válida para $r \geq R$ (raio da Terra) – permite calcular o campo gravitacional em pontos na superfície da Terra; basta substituir r = raio da Terra. Assim, a intensidade (ou módulo) do campo na superfície da Terra é dada por:

$$g_0=\left(40\times10^{13}\,N.m^2/kg\right)/\left(6{,}378\times10^6\,m\right)=9{,}83\,N/kg=9{,}83\,m/s^2$$

Para pontos $r > R$, a intensidade do campo gravitacional é $g < g_0 = 9{,}83\ N/kg$. Por exemplo, a intensidade do campo gravitacional gerado pela Terra na órbita da Lua (distância da órbita ao centro da Terra é $r = 384.000\ km = 384 \times 10^6\ m$) é:

$$g\left(r\right)=\left(40\times10^{13}\right)/\left(384\times10^6\right)^2\approx0{,}00027\,N/kg$$

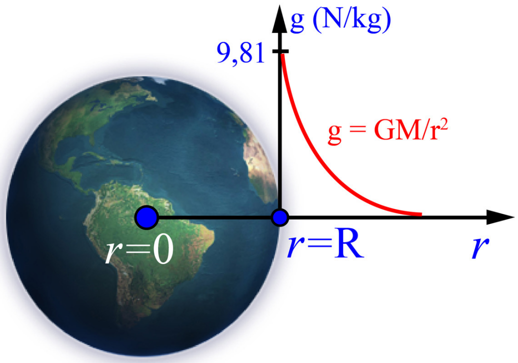

Figura 18.14 Para os pontos externos à distribuição, tudo se passa como se toda a massa estivesse concentrada no centro da distribuição esférica.

Concluímos, portanto que, para pontos localizados a 384.000 *km* da Terra, o campo gravitacional é pequeno quando comparado com o campo de pontos localizados sobre a superfície da Terra, mas, ainda assim, ele se faz presente. O movimento da Lua é uma prova disso.

Observe na Figura 18.14 a variação do campo conforme a distância r aumenta. A intensidade do campo gravitacional é inversamente proporcional a r^2.

b) Campo gravitacional em pontos situados num túnel hipotético da superfície até o centro da Terra.

A equação $g(r) = (GM)/r^2$ não se aplica a pontos no interior do planeta. Ela é válida para pontos na superfície ($r = R$) ou para pontos externos à superfície ($r > R$).

Para pontos no interior da esfera, não se pode considerar a massa M concentrada no centro, pois, conforme nos movemos em direção ao centro da Terra, uma casca cada vez mais espessa vai sendo deixada para trás. Com isso, a massa que gera o campo gravitacional torna-se, para esses pontos no interior da Terra, cada vez menor.

Para determinar a expressão do campo num ponto a uma distância r do centro e no interior da Terra, deve se considerar apenas a massa abaixo de uma casca de raio r. Para tanto, utilizamos o artifício descrito a seguir.

Considerando-se que a massa M no interior da esfera hipotética de raio r se distribua uniformemente e que a densidade é constante, temos assim:

$$\rho = M/V = M/\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

donde concluímos que a massa de uma esfera hipotética de raio r, no interior da Terra, depende do raio da seguinte forma:

$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Substituindo-se esse valor da massa M na expressão de g, temos:

$$g_{r<R} = G\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)\Big/r^2 = G\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)r$$

Em particular, no centro da Terra, o campo gravitacional se anula ($g = 0$).

Assim, para $r < R$ (no interior da Terra), a intensidade do campo tem variação diretamente proporcional à distância até o centro enquanto, para pontos fora do planeta ($r \geq R$), o campo varia na razão inversa do quadrado da distância, conforme a Figura 18.15. A partir do centro da Terra, o campo cresce para cada vez mais até atingir o valor máximo que ocorre para pontos na superfície ($g = 9{,}8\ N/kg$).

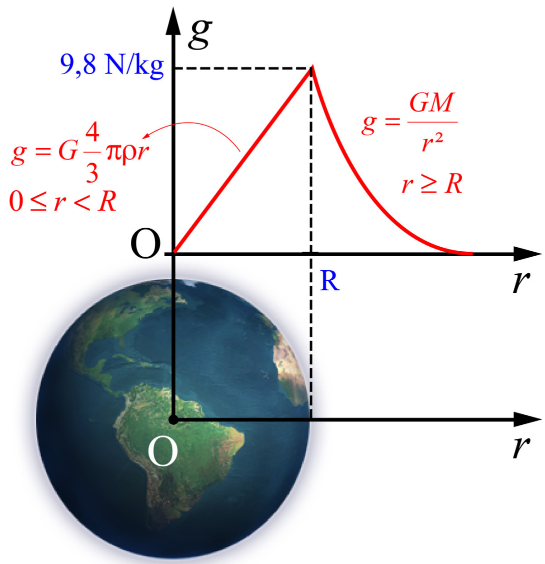

Figura 18.15 Gráfico do comportamento do campo gravitacional quando admitimos uma densidade constante nos pontos internos à distribuição.

Exercício Resolvido 18.5

Antes de prosseguirem viagem em direção à Lua, as naves espaciais "Apollo" davam algumas voltas em torno da Terra. Uma delas, com massa total $m = 25.000\,kg$, realizou 4 voltas em uma órbita terrestre localizada a 200 km de altitude e com velocidade orbital $v \simeq 7{,}8\,km/s$.

Dados $GM_{\text{Terra}} = 40 \times 10^{13}\,N.m^2/kg$; e $R_{\text{Terra}} = 6.378\,km$, determine as seguintes grandezas:

a) O campo gravitacional e a força de atração que a Terra exerce sobre a nave mencionada quando nesta altitude.

b) O potencial gravitacional gerado pela Terra nos pontos cujas altitudes sejam $h = 200\,km$.

c) A energia potencial da nave quando na superfície e à altura $h = 200\,km$.

d) A energia mecânica desta nave na sua órbita terrestre.

e) A variação da energia potencial gravitacional da nave quando ela se movimenta da sua órbita terrestre e atinge a órbita da Lua ($r = 384.000\,km$).

Resolução

a) O campo gravitacional e a força de atração que a Terra exerce sobre a nave nesta altitude.

À altitude $h = 200\,km$, a distância ao centro da Terra é:

$$r = R_{Terra} + h = 6.378\ km + 200\ km = 6.578\ km = 6{,}578 \times 10^6\,m$$

Assim, a intensidade do campo gravitacional é:

$$g = \left[40 \times 10^{13}\,N.m^2/kg\right] / \left(6{,}578 \times 10^6\,m\right)^2 \approx 9{,}24\,N/kg = 9{,}24\,m/s^2$$

Nesta altitude, a Terra atrai a nave com uma força cujo módulo é:

$$F = mg = \left(25.000\ kg\right) / \left(9{,}24\,N/kg\right) = 231.000\ N$$

b) Potencial gravitacional gerado pela Terra em pontos cujas altitudes sejam $h = 200\,km$.

O potencial gravitacional gerado por um corpo esférico de raio R e massa M, em ponto distante $r \geq R$ de seu centro, é dado pela relação:

$$V\left(r\right) = -G\,M/r$$

Para o nosso planeta, e considerando o valor $(GM_{\text{Terra}}) = 40 \times 10^{13}\,N.m^2/kg$, o potencial gravitacional V num ponto distante r do centro da Terra é:

$$V\left(r\right) = -\left[40 \times 10^{13}\right]/r$$

Esta relação indica que $V(r)$ é inversamente proporcional a r (enquanto o campo gravitacional g é inversamente proporcional a r^2).

Para a altitude $h = 200\,km$, a distância ao centro da Terra é:

$r = 6.378 + 200 = 6.578\,km = 6{,}578 \times 10^6\,m$; e, portanto, o potencial gravitacional é:

$$V = -\left[40 \times 10^{13}\right]/\left[6{,}578 \times 10^6\right] = -61 \times 10^6\ J/kg$$

c) Qual a energia potencial da nave quando na superfície e à altura $h = 200\,km$?

Conhecido o potencial gravitacional $V(r)$ de um ponto do espaço à distância r do centro da Terra, a energia potencial gravitacional (U) de um corpo de massa m, neste ponto, é determinada por $(U) = m.V(r)$.

	$V(r)$ (J/kg)	$U = m.V(r)$
Na superfície ($h = 0$)	-63×10^6	$(25 \times 10^3)(-63 \times 10^6) \approx -1.575 \times 10^9$
À altitude $h = 200\,km$	-61×10^6	$(25 \times 10^3)(-61 \times 10^6) \approx -1.525 \times 10^9$

d) A energia mecânica desta nave na sua órbita terrestre.

Lembrando que E = "energia cinética" + "energia pot. gravitacional" ou $E = ½\, mv^2 + m.V(r)$, e que, no caso da nave à altitude $h = 200\,km$, os dados são: $m = 25.000\,kg$, $v = 7{,}8 \times 10^3\ m/s$, $r = R + h = 6{,}578 \times 10^6\ m$; obtemos:

$$V\left(r = R + h\right) = -61 \times 10^6\ J/kg$$

Logo:

$$Ec = \tfrac{1}{2}\left(25 \times 10^3\,kg\right)\left(7{,}8 \times 10^3\ m/s\right)^2 \approx 761 \times 10^9\,J\,(joule)$$

$$U = \left(25 \times 10^3\,kg\right)\left(-6{,}1 \times 10^7\ J/kg\right) \approx -1.525 \times 10^9\,J$$

Portanto,

$$E = Ec + U = \left(761\ \times\ 10^9\,J\right) + \left(-1.525\ \times\ 10^9\,J\right) = -764 \times 10^9\,J$$

Observação:

Energia mecânica negativa significa que a nave está "ligada" ao campo gravitacional terrestre. Para libertá-la da atração gravitacional é preciso fornecer energia igual ou maior do que $7{,}64 \times 10^9\,J$.

e) A variação da energia potencial gravitacional da nave quando ela se movimenta da sua órbita terrestre e atinge a órbita da Lua ($r = 384.000\,km$).

Dados:

- Na órbita terrestre, $r_1 = R + h \approx 6.400\,km$ (altitude da nave $h = 200\,km$);
- Na órbita da Lua, $r_2 = 384.000\,km$);
- Massa da nave: $m = 25 \times 10^3\,kg$.

	r (m)	$U = mV(r) = -\,m[GM]/r$
Órbita terrestre	$6{,}4 \times 10^6$	$-\,(25 \times 10^3)(40 \times 10^{13})[1/(6{,}4 \times 106) = -\,1.562{,}5 \times 10^9$
Órbita da Lua	384×10^6	$-\,(25 \times 10^3)(40 \times 10^{13})[1/(384 \times 10^6) = -\,26 \times 10^9$

A variação de energia potencial da nave é:

$$\Delta U = \left[U_{(2)}\right] - \left[U_{(1)}\right] \rightarrow \Delta U = \left(-1.562{,}5 \times 10^9\right) - \left(-26 \times 10^9\right) = 1.536{,}5 \times 10^9\,J \approx 1540 \times 10^9\,J$$

A variação da energia potencial gravitacional da nave – quando ela se movimenta da órbita terrestre ($h = 200\,km$) até a órbita da Lua ($384.000\,km$) – é $\Delta U \simeq +\,1540 \times 10^9\,J$.

Exercício Resolvido 18.6

Mostre que a variação de energia potencial gravitacional de um corpo de massa m quando ele for erguido de uma altura h em pontos próximos da superfície da Terra (pequenas altitudes) é:

$$\Delta U = m.g.h$$

onde $g = [GM]/R^2$ é a intensidade do campo gravitacional na superfície.

Resolução

	$r = R + h$	$V(r)$	$U = mV(r)$
Superfície ($h = 0$)	$r_1 = R$	$V_1 = -[GM/R]$	$U(1) = -m[GM/R]$
Altitude ($h > 0$)	$r_2 = (R + h)$	$V_2 = -[GM/(R + h)]$	$U(1) = -m[GM/(R + h)]$

A variação da energia potencial é: $\Delta U = U_{(2)} - U_{(1)}$. Donde obtemos:

$$\Delta U = \{-m.[GM]/(R+h)\} - \{-m.[GM]/(R)\}$$

Eliminando os colchetes, temos:

$$\Delta U = -m.[GM]/(R+h) + m.[GM]/(R) = m[GM/R] - m[GM/(R+h)$$

Colocando em evidência o termo comum, $m[GM]$, encontramos:

$$\Delta U = mGM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

Finalmente, colocando-se R na expressão acima em evidência no denominador:

$$\Delta U = m.\left[GM/\left[1/R - 1/(R+h)\right]\right] = m.[GM]\left[\frac{(R+h)-R}{R(R+h)}\right] = m[GM]\left[\frac{h}{R(R+h)}\right]$$

$$\Delta U = m.\frac{GM}{R^2}\left[\frac{h}{\left(1+\left(\frac{h}{R}\right)\right)}\right]$$

Mas, $GM/R^2 = g_0$ - campo gravitacional na superfície da Terra. Logo:

$$\Delta U = m.g_0\left[\frac{h}{\left(1+\left(\frac{h}{R}\right)\right)}\right]$$

Para pequenas altitudes, por exemplo, pontos tais que $h \leq 0{,}01\,R$, podemos desprezar o termo contendo (h/R), uma vez que $(h/R) < 0{,}01$. Nessas condições, desprezando-se o termo (h/R) obtemos (depois de desprezá-lo) uma diferença menor do que 2% no cálculo da energia potencial. Assim, sempre que não for exigida uma precisão inferior a 2%, a expressão da energia potencial toma a seguinte forma:

$$\Delta U = m.g_0 h. \rightarrow U_{(2)} - U_{(1)} = mg_0 h$$

Adotando-se $U_{(1)} = 0$ na superfície da Terra, escrevemos:

$$U_2 = mg_0 h$$

Como o índice (2) se refere a uma altura h genérica, a energia potencial U de um corpo de massa m, no campo gravitacional g_0 – próximo à superfície da Terra – à altitude h é determina pela relação:

$$U = m.g_0 h$$

A energia potencial de um avião voando a $5.000\,m$ de altura e com massa $m = 180.000\,kg$ é:

$$U = m.g.h = (180.000\ kg)(9{,}83\ N/kg)(5.000\ m) = 8.847 \times 10^6\ J$$

Exercício Resolvido 18.7 – Velocidade de escape

Velocidade de escape – v_e – de um planeta é a velocidade que se deve imprimir a um corpo para que ele escape do planeta no qual se encontra e sem condições para retornar. Determine a velocidade de escape da Terra.

Fig18.17 A velocidade de escape é a velocidade mínima necessária para que um objeto lançado sobre a superficie da Terra não mais retorne a ela.

Resolução

Um corpo de massa m lançado a partir da superfície da Terra rumo ao espaço, dotado de energia cinética $E_c = ½\, m.v^2$, tem energia potencial gravitacional dada por $U = -\, m(GM)/R$, onde M e R são, respectivamente, a massa e o raio da Terra. Portanto, no ato do lançamento, a energia mecânica do corpo é:

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 - m\left(GM\right)/R$$

Conforme o corpo se distancia da Terra, a sua energia cinética ($½\, m.v^2$) transforma-se em energia potencial; a energia cinética diminui e a energia potencial ($E_p = -\, mGM/r$) aumenta, ou seja, torna-se cada vez menos negativa.

A distância (ou altura máxima) é atingida quando a energia cinética se transformar totalmente em energia potencial gravitacional (supondo que a energia mecânica seja conservada). Se a distância máxima for, por exemplo, alcançada à altitude de $10\,km$, o corpo retorna para a Terra sob a ação da força gravitacional.

Para que o corpo atinja um ponto suficientemente longínquo, de forma que escape do campo gravitacional da Terra, sua energia deve ser, no mínimo, nula.

Assim, fundamentado na Lei da Conservação de Energia:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

Escrevemos, para que o corpo escape:

$$\frac{1}{2} m.v^2 - m\left(GM\right)/R = 0$$

Nessas condições, a velocidade de lançamento $v = v_e$ = velocidade de escape.

Portanto, $½\, m.v_e{}^2 - m(GM)/R = 0 \rightarrow ½\, m.v_e{}^2 - m(GM)/R \rightarrow v_e{}^2 = m(GM)/R$; donde

$$v_e = \sqrt{2GM/R}$$

Para o caso da Terra: $GM = 40 \times 10^{13}\ N.m^2/kg$ e $R = 6{,}378 \times 10^6\, m$.

$$v_e = \sqrt{\left[2\left(40\times10^{13}\right)/6{,}378\times10^{6}\right]} = 11{,}2\times10^{3}\ m/s = 11{,}2\,km/s$$

Observe que a velocidade de escape não depende da massa do corpo lançado para o espaço.