16 – Corpos Rígidos

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 16.1

Considere um disco circular de raio R e massa m. Ele pode, e deve, ser pensado como constituído de pequenos anéis de espessura dr (vide figura).

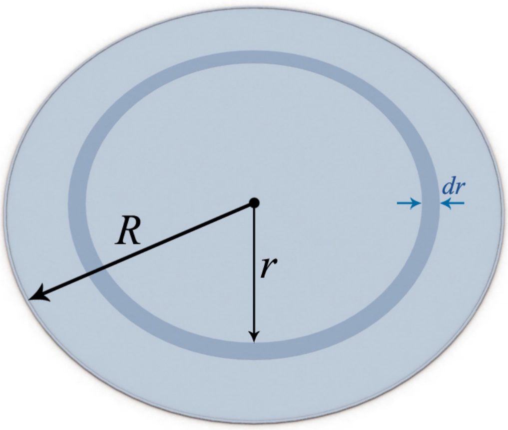
Tendo em vista que cada anel tem comprimento $2\pi r$, e que seu momento de inércia é:

$$dI = dmr^2$$

Onde:

$$dm = \sigma\left(2\pi r dr\right) = \frac{M}{\pi R^2}\left(2\pi r dr\right)$$

Determine o momento de inércia do disco.



Resolução

O momento de inércia de um anel de espessura dr é:

$$dI = dmr^2 = \left(\sigma \cdot 2\pi r dr\right) r^2$$

Mas

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} = \frac{M}{área}$$

Portanto:

$$I = \frac{M}{\pi R^2}\int_o^R 2\pi r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\int_o^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{1}{4}\left(R^4\right) - \frac{o^4}{4}\right]$$

Donde inferimos que o momento de inércia do disco é:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Exercício Resolvido 16.2

Considerando um cilindro de raio R e altura h como composto por um número indefinido de discos de altura dz (vide figura), de tal forma que:

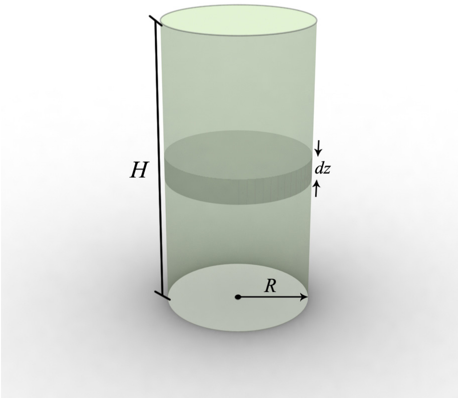
$$\int_o^h dz = h$$

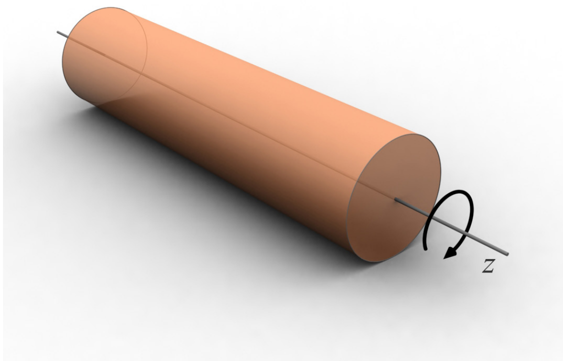
E que o momento de inércia de cada disco é dado por:

$$dI = dmR^2$$

Mostre que para rotações em torno do seu eixo de simetria (vide figura) o momento de inércia é dado por:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$





Somando o momento de inércia das várias fatias do cilindro e seu eixo de simetria, o eixo z.

Resolução

O momento de inércia de um dos discos de altura dz e dado por:

$$dI = dm\frac{R^2}{2}$$

Com:

$$dm = \left[\pi R^2 dz\right] = \frac{M}{\pi R^2 L}\left(\pi R^2\right)dz = M\frac{dz}{L}$$

Portanto:

$$dI = \frac{M}{L}\left(\frac{R^2}{2}\right)dz$$

Consequentemente:

$$dI = \frac{MR^2}{2}\left[\frac{dz}{L}\right]$$

Donde inferimos que:

$$I = \frac{MR^2}{2}\frac{1}{L}\int_o^L dz = \frac{MR^2}{2}\left(\frac{L}{L}\right)$$

Portanto:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

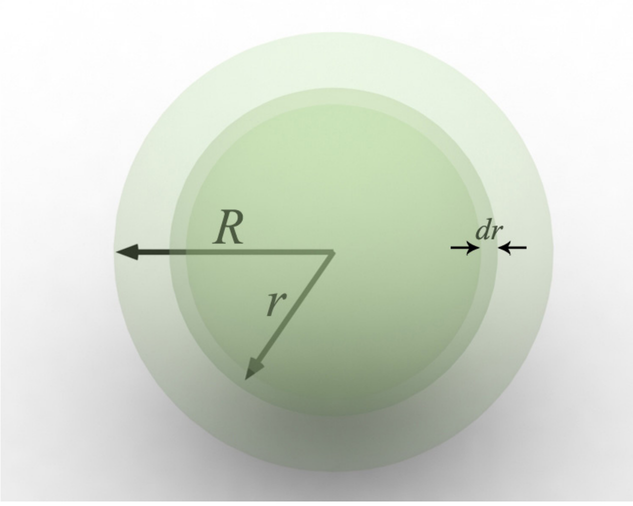
Exercício resolvido 16.3

Determine o momento de inércia de uma esfera de massa M e Raio R, sabendo-se que o momento de inércia de uma casca de espessura dr (vide figura) é dado por:

$$dI = dm\frac{2}{3}r^2$$

onde o elemento infinitesimal de massa é:

$$dm = \rho\left[4\pi r^2 dr\right]$$



Resolução

O momento de inércia infinitesimal associado a uma casca de espessura dr é dado, em função da densidade, por:

$$dI = \rho\left[4\pi r^2 dr\right]\frac{2}{3}r^2$$

Para uma densidade uniforme, temos:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

Portanto,

$$dI = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}\frac{8\pi}{3}r^4 dr = \frac{2M}{R^3}r^4 dr$$

Donde inferimos que o momento de inércia é a soma dos momentos de inércia das cascas de espessura dr. O resultado é a integral:

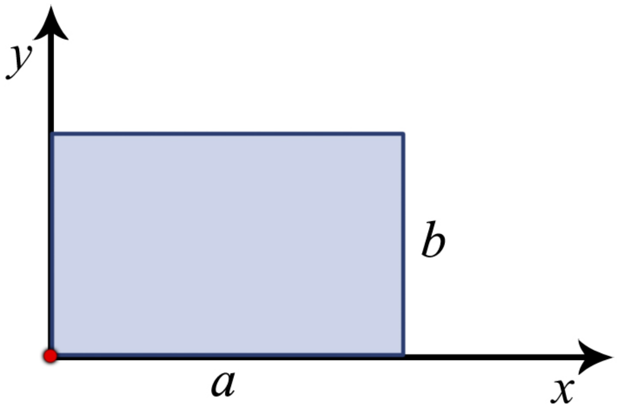
$$I = \frac{2M}{R^3}\int_o^R r^4 dr = \frac{2M}{R^3}\frac{R^5}{5}$$

Ou seja:

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Exercício Resolvido 16.4

Considere uma placa retangular de lados a e b de espessura desprezível de massa M uniformemente ao longo da superfície. Determine as componentes do momento de inércia quando consideramos a origem um dos vértices da placa (vide figura).



Resolução

Nesse caso, consideramos os momentos de inércia de um corpo caracterizado por uma densidade superficial constante dada pela expressão:

$$\sigma = \frac{M}{ab} = \frac{M}{A}$$

Os seis momentos de inércia são:

$$I_{11} = \sigma \int_o^a dx \int_o^b dy \left(y^2 + 0\right) = \frac{\sigma a b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

$$I_{22} = \sigma \int_o^a dx \int_o^b dy \left(x^2 + 0\right) = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_{33} = \sigma \int dx \int dy \left(x^2 + y^2\right) = I_{11} + I_{22} = \frac{M}{3}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sigma \int_o^a \int_o^b xydxdy = -\sigma \frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2} = -\frac{Mab}{4}$$

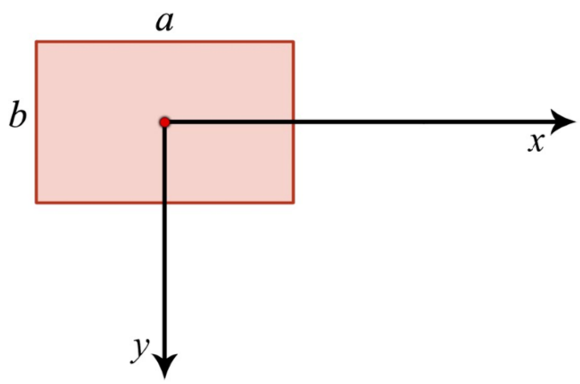
$$I_{13} = I_{31} = 0 \text{ pois } z = 0$$

Portanto:

$$I = M \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvido 16.5

A partir do resultado do exercício resolvido (16.4) determine, utilizando o teorema dos eixos paralelos, o tensor de inércia de uma placa retangular de massa M e de lados a e b no referencial passando pelo centro de massa e cujos eixos são paralelos aos anteriores.



O centro da massa da placa se localiza no centro da placa retangular. De fato, se tomarmos esse mesmo preferencial encontraremos:

$$X_{CM} = \frac{\sigma}{M}\int_o^a dx\int_o^b dyx = \frac{\sigma}{M} b\int_o^a dxx = \frac{\sigma}{M}\frac{ba^2}{2}$$

$$Y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\int_o^a dx\int_o^b dyy = \frac{\sigma}{M} a\int_o^a dyyx = \frac{\sigma}{M}\frac{ba^2}{2}$$

Portanto,

$$X_{CM} = \frac{\sigma ba^2}{2M} = \frac{ba^2}{2ba} = \frac{a}{2}$$

$$Y_{CM} = \frac{\sigma ba^2}{2M} = \frac{ba^2}{2ba} = \frac{b}{2}$$

De acordo com o teorema dos eixos paralelos:

$$\left(I_{ij}\right)_{CM} = I_{ij} - \left(A^2\delta_{ij} - A_i A_j\right)$$

No caso, o vetor $\vec{A}$ tem componentes:

$$\vec{A} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Portanto:

$$\left(I_{11}\right)_{CM} = I_{11} - \frac{Mb^2}{4} = \frac{Mb^2}{3} - \frac{Mb^2}{4} = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\left(I_{22}\right)_{CM} = I_2 - \frac{Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{3} - \frac{Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\left(I_{33}\right)_{CM} = I_{33} - \frac{Ma^2}{4} - \frac{Mb^2}{4} = \frac{M\left(b^2 + a^2\right)}{12}$$

$$\left(I_{xy}\right)_{CM} = -\frac{Mab}{4} + \frac{Mab}{4} = 0$$

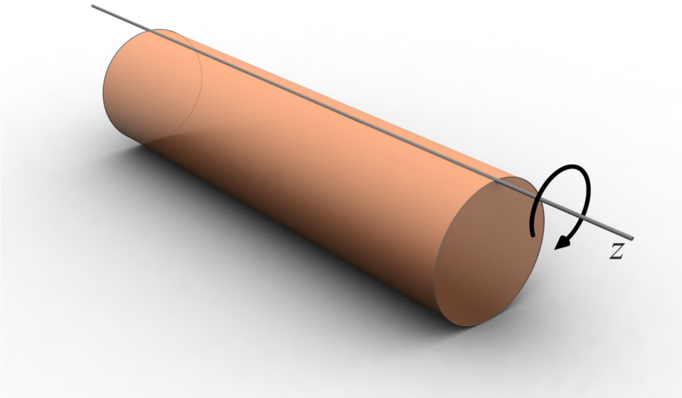
$$\left(I_{yx}\right)_{CM} = 0$$

$$\left(I_{xz}\right)_{CM} = 0$$

$$\left(I_{yz}\right)_{CM} = 0$$

Exercício Resolvido 16.6

Utilizando o teorema dos eixos paralelos mostre que o momento de Inércia de um cilindro de massa M e raio R, quando experimenta um movimento de rotação em torno de um eixo que passa pela superfície de cilindro (vide figura), e dado por:



Resolução

De acordo com o teorema dos eixos paralelos,

$$I = I_{CM} + MR^2$$

Tendo em vista que:

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

Obtemos:

$$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = 3\frac{MR^2}{2}$$

Exemplo Resolvido 16.7

Uma placa retangular quadrada de massa M e lado L.

$$I = \begin{bmatrix} \frac{ML^2}{3} & -\frac{ML^2}{4} & 0 \\ -\frac{ML^2}{4} & \frac{ML^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ML^2}{3} \end{bmatrix}$$

A equação para os momentos principais de inércia é, nesse caso,

$$\det\begin{bmatrix} \frac{ML^2}{3} - I & -\frac{ML^2}{4} & 0 \\ -\frac{ML^2}{4} & \frac{ML^2}{3} - I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ML^2}{3} - I \end{bmatrix} = 0$$

A equação para os valores procurados:

$$\left(\frac{2ML^2}{3}-I\right)\left\{\left(\frac{ML^2}{3}-I\right)^2-\left(\frac{ML^2}{4}\right)^2\right\}$$

Daí resultando:

$$I_3=\frac{2ML^2}{3}$$

E duas raízes, dadas por:

$$I=\frac{ML^2}{3}\pm\frac{ML^2}{4}$$

Donde obtemos:

$$I_1=\frac{ML^2}{3}+\frac{ML^2}{4}=\frac{7ML^2}{12}$$
$$I_2=\frac{ML^2}{3}-\frac{ML^2}{4}=\frac{ML^2}{12}$$

Exercício Resolvido 16.8

Determine as energias cinética e potencial de uma bola de massa M e raio R que desce um rolando num plano inclinado sem deslizamento. O plano tem um ângulo de elevação dado pelo ângulo α.

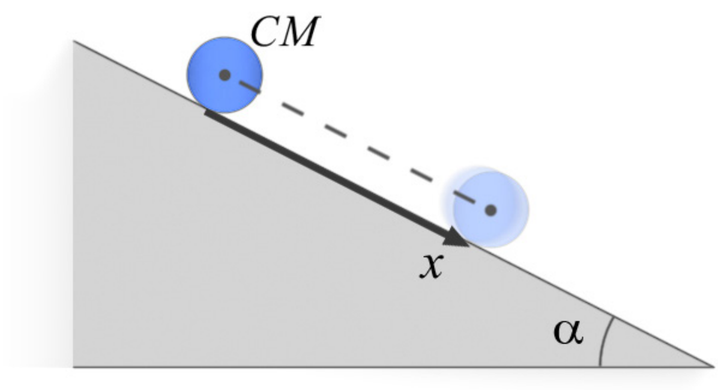


Figura 16.23. A energia cinética é composta por dois termos associados aos dois movimentos: translação (energia cinética do centro de massa) e rotação.

Resolução

A energia cinética é composta por dois termos, a saber, a energia cinética de rotação em torno do centro de massa:

$$E_{CM}^{rota\c{c}ao}=\frac{1}{2}MI\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}MI\omega^2$$

Onde, de acordo com o problema resolvido 16.3, nesse caso temos:

$$I=\frac{2}{5}MR^2$$

O outro termo é associado ao movimento de translação do centro de massa:

$$E_C^{trans} = \frac{MV_{CM}^2}{2}$$

A condição de não deslizamento, implica que a coordenada se relaciona ao ângulo de acordo com a expressão:

$$X_{CM} = R\theta$$

Assim,

$$V^{CM} = R\dot{\theta} = R\omega$$

Logo, a energia cinética é dada pela soma dos dois termos, levando ao resultado:

$$E_C = \frac{M}{2}\left(I + R^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{M}{2}\left(\frac{7}{5}\right)R^2\dot{\theta}^2 = \frac{7}{10}MR^2\omega^2$$

A energia potencial, por outro lado é dada pela energia potencial do centro de massa:

$$U\left(h_{CM}\right) = Mgh_{CM}$$

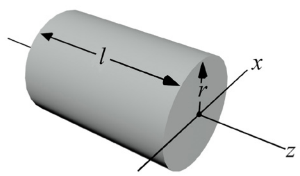
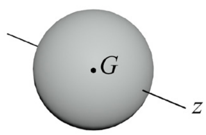
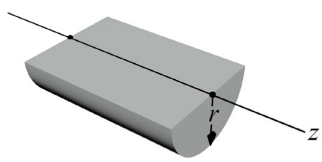
Utilizando argumentos de geometria bastantes simples constatamos que a altura do centro de massa, h_{CM}, é dada por dois termos. A saber:

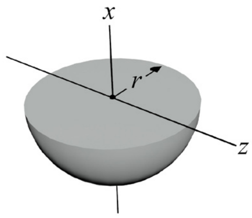
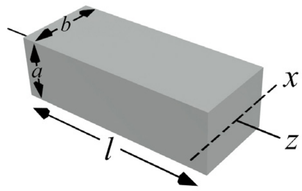
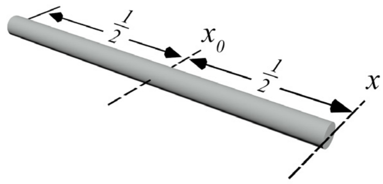
$$h_{CM} = \left[R\cos\alpha + \left(L - x\right)sen\alpha\right]$$

Onde L é a distância percorrida pelo centro de massa, ao longo do eixo x, até o cilindro atingir o ponto mais baiso do pleno inclinado. Portanto, a energia potencial é dada por:

$$U\left(h_{CM}\right) = Mg\left[R\cos\alpha + \left(L - x\right)sen\alpha\right]$$

Abaixo apresentamos uma tabela de valores de momentos de inércia.

Momentos de Inércia (m = massa do sólido)	
Cilindro de pé $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ Cilindro deitado $I_{xx} = \frac{1}{2}m\left(3r^2 + 4l^2\right)$	
Esfera $I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$	
Metade de um cilindro $I_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 2mr^2\right)$ $= \frac{1}{2}mr^2$	

Hemisfério $I_z = I_z = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \times 2mr^2\right)$ $= \frac{2}{5} mr^2$	
Paralelepípedo Retangular $I_z = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$ $I_z = \frac{1}{12} m\left(4l^2 + a^2\right)$	
Barra Uniforme pela extremidade $I_z = \frac{1}{3} ml^2$ Pelo Centro $I_z = \frac{1}{12} ml^2$	
Cone de pé $I_z = \frac{3}{10} mr^2$