15 – Colisões

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 15.1

Verifica-se que depois de 5 colisões de uma bola com o solo, todas ocorrendo num movimento na vertical, sua altura (h_5) se reduz a 20% da altura quando a bola foi solta antes da primeira colisão (altura H). Qual é o coeficiente de restituição elástica?

Resolução

A expressão $\lambda = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}$ indica que altura atingida na primeira colisão (h_1) é dada, em função do coeficiente de restituição elástico, por:

$$\frac{h_1}{H} = \lambda^2$$

Portanto, na segunda colisão a altura atingida será:

$$\frac{h_2}{H} = \left(\lambda^2\right)\frac{h_1}{H} = \left(\lambda^2\right)^2$$

Assim, depois de 5 colisões:

$$\frac{h_5}{H} = \left(\alpha^2\right)^5$$

De acordo com os dados temos que $h_5 = 0{,}2\,H$.

Portanto:

$$0,2 = \lambda^{10} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(0,2\right)^{1/10}$$

Ou seja:

$$\alpha = 0,85$$

Exercício Resolvido 15.2

Duas bolas de bilhar têm o mesmo raio e mesma massas M. Admita que a bola vermelha esteja em repouso e que num determinado instante ela seja atingida pela bola branca, dotada de velocidade $\vec{V}$. Admita, ademais, que o choque seja elástico.

Verifica-se que a bola branca (a bola 1) levou uma fração x da energia cinética total.

Determine os ângulos θ_1 e θ_2 com que saem cada uma das bolas.

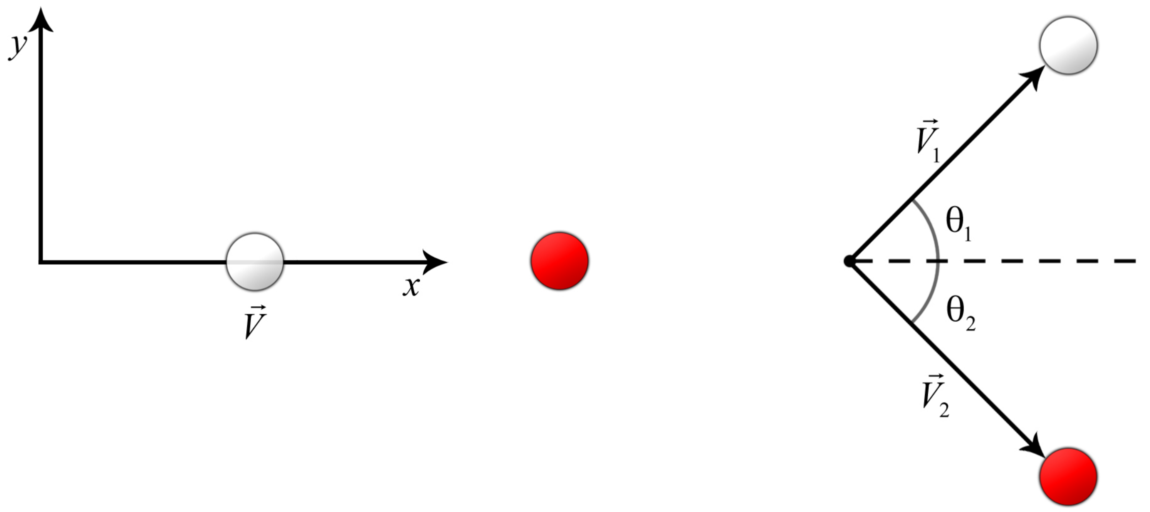


Figura 15.14 - Colisão de duas bolas de bilhar. Admitindo-se que a colisão seja elástica, temos uma equação a mais à nossa disposição.

Resolução

Sendo o movimento restrito ao plano, devemos utilizar três equações. Duas delas, envolvendo a conservação do momento linear total, se escrevem como:

$$M\vec{V} = M\vec{V}_1' + M\vec{V}_2'$$

Adotando-se o eixo x na direção e no sentido da velocidade $\vec{V}$ (vide figura 15.14), temos:

$$V = V_{1x} + V_{2x}$$
$$V_{1y} + V_{2y} = 0$$

Ademais, sendo o choque elástico, temos:

$$\frac{M\vec{V}^2}{2} = \frac{M\vec{V}_1^2}{2} + \frac{M\vec{V}_2^2}{2}$$

Sejam θ_1 e θ_2 os ângulo com que saem as partículas. Temos:

$$V = V_1 \cos\theta_1 + V_2 \cos\theta_2$$
$$V_1 sen\theta_1 = -V_2 sen\theta_2$$

De acordo com os dados do problema, valem as seguintes relações:

$$V_1^2 = xV^2$$
$$V_2^2 = (1-x)V^2$$

Onde x é a fração da energia cinética da bola 1 (a bola branca) antes dela colidir.
Ademais, segue dos dados e das primeiras expressões:

$$1 = \sqrt{x}\cos\theta_1 + \sqrt{1-x}\cos\theta_2$$
$$\sqrt{x}\ sen\theta_1 = -\sqrt{1-x}\ sen\theta_2$$

E, portanto,

$$sen\theta_1 = \frac{-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\ sen\theta_2$$

Logo, dessa equação podemos concluir que os ângulos θ_1 e θ_2 são relacionados;

$$1-\cos^2\theta_1 = 1-\frac{1-x}{x}\left(1-\cos^2\theta_2\right) \Rightarrow \cos^2\theta_1 = \left(\frac{1-x}{x}\right)\left(1-\cos^2\theta_2\right)$$

Ou seja, são relacionados de uma forma que depende da fração x:

$$\cos\theta_1 = \pm\sqrt{\frac{(1-x)}{x}(1-\cos^2\theta_2)}$$

Utilizando essa expressão na equação dos cossenos, obtemos:

$$1-\sqrt{1-x}\cos\theta_2 = \pm\sqrt{(1-x)(1-\cos^2\theta_2)}$$

Elevando ao quadrado, ambos os termos acima, encontramos o ângulo

$$1-2\sqrt{1-x}\cos\theta_2 + (1-x)\cos^2\theta_2 = (1-x)\cos^2\theta_2$$

Ou seja,

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\cos\theta_1 = \pm\sqrt{\frac{(1-x)}{x}(1-\frac{1}{4(1-x)})} = \pm\sqrt{\frac{3-4x}{4(1-x)}}$$

Exercício Resolvido 15.3

Considere o caso mais geral possível de colisão de duas bolas de massas m_1 e m_2 na qual consideramos o choque, ou colisão, como sendo frontal e elástica. Analise três casos distintos de colisões elásticas e frontais:

$$m_1 > m_2 \qquad m_1 = m_2 \quad \text{e} \quad m_1 < m_2$$

Considere o caso simples no qual a bola 2 está inicialmente em repouso.

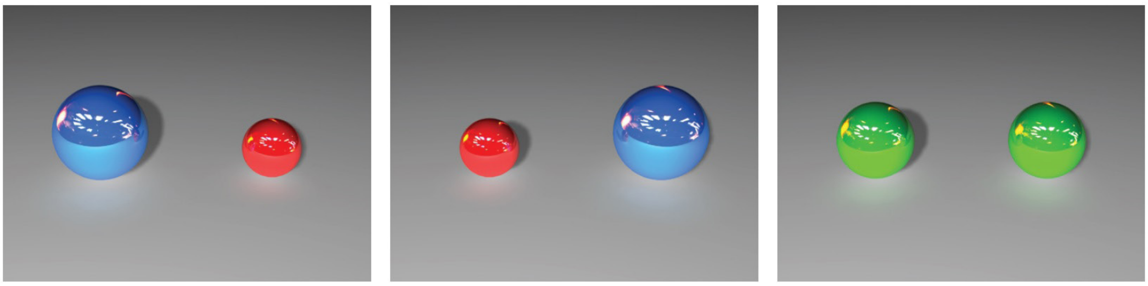


Figura 15.19. Os três casos distintos analisados no problema. Em cada caso a bola à direita está em repouso.

Resolução

As equações envolvendo choques frontais e elásticos são duas apenas:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}$$

No caso de bola 2 em repouso a bola 1 com velocidade v, temos:

$$m_1v = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$m_1v^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2$$

Em termos dos momentos de cada uma delas essas equações são

$$p = p_1^{'} + p_2^{'} \Rightarrow p_1^{'} = p - p_2^{'}$$

$$\frac{p^2}{m_1} = \frac{p_1^{'2}}{m_1} + \frac{p_2^{'2}}{m_2}$$

Utilizando a primeira na segunda, temos

$$\frac{p^2}{m_1} = \frac{\left(p - p_2^{'}\right)^2}{m_1} + \frac{p_2^{'2}}{m_2}$$

O que nos leva à equação:

$$p_2^{'}\left(-\frac{2p}{m_1} + p_2^{'}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\right) = 0$$

Assim, o momento da partícula 2 fica determinado

$$p_2^{'} = p\frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

Em termos das velocidades, temos

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_2^{'} &= v \quad \text{se} \quad m_1 = m_2 \\ v_2^{'} &< v \quad \text{se} \quad m_2 > m_1 \\ v_2^{'} &> v \quad \text{se} \quad m_1 > m_2 \end{aligned}$$

O momento final da partícula 1 é

$$p_1^{'} = p - p_2' = p\left[1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right] = p\left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right]$$

Em termos as velocidades temos:

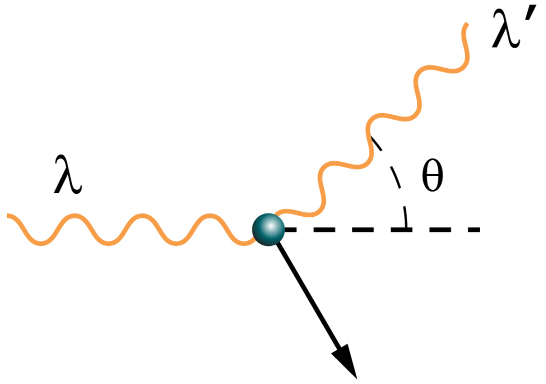
$$v_1' = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right]v$$

Donde inferimos que

$$\begin{aligned} v_0^{'} &= v \quad \text{se} \quad m_1 = m_2 \\ v_1^{'} &< 0 \quad \text{se} \quad m_2 > m_1 \\ v_1^{'} &> 0 \quad \text{se} \quad m_1 > m_2 \end{aligned}$$

Exemplo 15.4: O efeito Compton

O efeito Compton resulta do tratamento relativístico da colisão de um fóton com um elétron localizado no átomo. Tendo em vista que a velocidade da luz é muito maior do que aquela do elétron, este será tratado como estando em repouso. Nessas circunstancias o efeito da colisão será proporcionar um recuo para o elétron. A colisão se dá em duas etapas. Na primeira o elétron será absorvido pelo elétron o qual a seguir emitirá outro fóton o qual sairá formando um ângulo θ com a horizontal.



O resultado é que o novo fóton emergirá da colisão formando um ângulo θ em relação à sua direção de incidência.

Mostre que, utilizando a cinemática relativística, o comprimento de onda do novo fóton (ou onda no caso), λ', é tal que ele se relaciona com o comprimento de onda associado ao fótons antes da colisão de tal forma que:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1-\cos\theta\right)$$

Onde m_e é a massa do elétron, m é a velocidade da lua no vácuo e h é a constante de Planck.

Resolução

As relações entre as energias dos fótons, antes e depois da colisão, e a frequência da luz por eles composta são dadas, de acordo com a teoria corpuscular da luz pelas relações:

$$E = h\nu = \hbar\omega$$
$$E' = h\nu' = \hbar\omega'$$

Os momenta dos fótons (o fóton inicial e o fóton final) são relacionados com os respectivos vetores de onda, $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ de acordo com a teoria de Einstein por meio de uma relação linear:

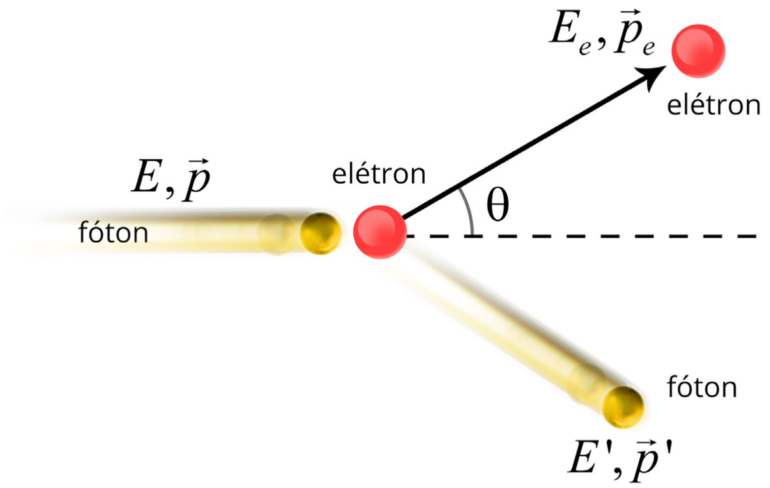
$$\vec{p}_i = \hbar\vec{k}$$
$$\vec{p}'_f = \hbar\vec{k}'$$

Onde $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. Assim, considerando-se as energias do fóton antes e depois da colisão, escrevemos:

$$\left(E, \vec{p}\right)_{fóton} = \left(h\nu, \hbar\vec{k}\right)$$
$$\left(E', \vec{p}'\right)_{fóton} = \left(h\nu', \hbar\vec{k}'\right)$$

O elétron, por outro lado, tem energia e momento dados pelas expressões apropriadas no regime relativístico. Ou seja, para o elétron valem as expressões relativística.

$$\left(E, \vec{p}\right)_{elétron} = \left(m_e c^2, 0\right)$$
$$\left(E', \vec{p}'\right)_{elétron} = \left(E_e', \vec{p}_e'\right) = \left(\sqrt{\left(\vec{p}_e' c\right)^2 + \left(m_e c^2\right)^2}, \vec{p}_e'\right)$$



Da conservação de energia segue que:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{\left(\vec{p}_e{}'c\right)^2 + \left(m_e c^2\right)^2}$$

Donde inferimos que:

$$\left(\vec{p}_e{}'c\right)^2 = \left(h\nu - h\nu' + m_e c^2\right)^2 - \left(m_e c^2\right)^2$$

Da conservação do momento segue a relção:

$$\vec{p}_e' = \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}' = \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$$

Desta última equação inferimos que:

$$\vec{p}_e'^2 = \hbar^2(\vec{k}^2 - \vec{k}'^2 - 2kk'\cos\theta)$$

Lembrando a relação entre energia e momento dos fótons:

$$E_f = cp_f = h\nu = c\hbar k$$

Obtem-se que:

$$\hbar k = \frac{h\nu}{c}$$

Assim, a expressão envolvendo a conservação da energia pode ser escrita como:

$$\vec{p}_e{}^2 c^2 = h^2(\nu^2 - \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta)$$

E isso leva, depois de utilizar a conservação do momento total do sistema, a seguinte relação entre as frequências:

$$\left(h\nu - h\nu' + m_e c^2\right)^2 - \left(m_e c^2\right)^2 = h^2(\nu^2 - \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta)$$

A qual pode ser escrita como:

$$m_e c^2(\nu - \nu') = h\nu\nu'(1 - \cos\theta)$$

Dividindo-se a expressão acima por $m_e c^2 \nu\nu'$ obtemos

$$\left(\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu}\right) = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

A qual, quando expressa em termos do comprimento de onda assume a forma:

$$(\lambda' - \lambda) = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Essa foi a conclusão de Compton, em seu trabalho de 1922 que lhe rendeu o prêmio Nobel em 1927. Foi uma comprovação experimental tanto da natureza corpuscular da luz quando da teoria da Relatividade restrita. Uma dupla vitória para Einstein.