

13 – Forças de Inércia

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 13.1

Para entendermos melhor o que foi dito, vamos estudar um caso concreto. Consideremos uma nave espacial em queda livre, movendo-se em direção à Terra. Dentro da nave o astronauta abandona um livro. Analisemos o movimento do livro, à luz da dinâmica, visto da Terra e da nave, que está acelerada em relação à Terra (neste caso, com aceleração g).



Figura 13.4 - Queda livre analisada a partir de dois referenciais.

Visto da Terra escrevemos, para o movimento (acelerado) do livro,

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = m \vec{g}. \quad 13.8$$

Ou seja, como resultado da força da gravitacional o livro se encontra acelerado com aceleração g , a aceleração da gravidade.

Analisado por um observador (o astronauta) no interior da nave a situação é diferente. O astronauta verá o livro flutuar (essa situação é às vezes descrita como zero g). Ou seja, a despeito da força da gravidade, o livro estará em repouso em relação à nave. O astronauta escreverá a equação de movimento assim:

$$m \frac{d^2 \vec{r}'(t)}{dt^2} = 0. \quad 13.9$$

Como é possível a aceleração ser nula no sistema da nave, quando sabemos que o livro experimenta uma força gravitacional?

A equação (13.9) só pode ser entendida quando nos lembramos que no sistema não inercial (acelerado) surge a força de inércia sob a forma (13.7). Nesse caso:

$$\vec{F}^{\text{inércia}} = -m\vec{g}.$$

Portanto, a equação de Newton no referencial do astronauta é:

$$m \frac{d^2 \vec{r}'(t)}{dt^2} = m\vec{g} - m\vec{a}_0 = m\vec{g} - m\vec{g} = 0, \quad 13.10$$

demonstrando assim, que as descrições são absolutamente coerentes e compatíveis entre si, desde que acrescentemos as forças de inércia no referencial não inercial.

Exemplo 13.2

Analise a dinâmica do movimento circular uniforme, considerando-se para tal o exemplo de uma bola que se movimenta sobre uma plataforma que gira com velocidade angular constante, quando este é analisado de dois referenciais distintos, sendo um deles não inercial (que se movimenta junto com a bola) e determine a força centrífuga. Expresse o resultado em função da velocidade angular constante ω_0 e o a distância da bola até o centro da plataforma. (vide figura 13.7)

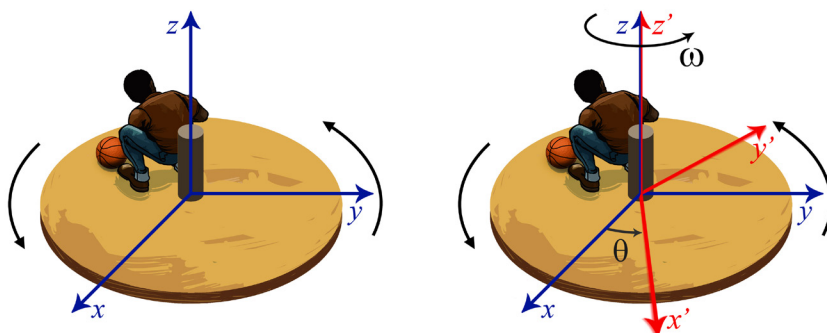


Figura 13.7. É importante decidir sobre qual tipo de referencial vamos utilizar na descrição do movimento. Essa descrição é diferente para os referenciais azul, fixo, e o vermelho, cujos eixos giram junto com a plataforma.

Resolução

O que dissemos anteriormente em relação ao movimento ao longo de uma curva pode ser facilmente entendido a partir da análise do movimento circular. Nesse caso, as forças normal e da gravidade se anulam. Analisaremos apenas o movimento no plano. Note-se que neste caso, o módulo do vetor posição é constante e é igual ao raio da circunferência osculadora, que é sempre a mesma para qualquer ponto ao longo da circunferência.

Analisado do referencial fixo (em azul na figura 13.7), obteremos para a velocidade:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{t} \left(\frac{dS}{dt} \right) = \vec{t} (R\dot{\theta}) = \vec{t} (R\omega_0) \quad (13.22)$$

E a aceleração da bola, por outro lado é sua aceleração centrípeta e dada por:

$$\vec{a} = \frac{\vec{n}}{R} (v)^2 = \frac{\vec{n}}{R} (R\omega)^2 \quad (13.23)$$

Assim, para manter a bola em movimento circular uniforme, devemos aplicar uma força de módulo constante designada T. Ela é aplicada na direção normal, no sentido do centro da circunferência e é necessária para evitar que a bola saia pela tangente. No exemplo ilustrado na figura (13.7) essa força é aplicada pela mão de quem segura a bola. A equação dinâmica é, portanto, nesse caso:

$$\vec{T} = \vec{n}T = m\vec{a} = \frac{\vec{n}}{R} (v)^2 = \frac{\vec{n}}{R} (R\omega)^2 \quad (13.24)$$

Ou, levando em conta apenas essa componente, a componente normal;

$$T = m \frac{(v)^2}{R} = mR(\omega)^2 \quad (13.25)$$

A dinâmica no referencial vermelho e que está em rotação, pois está preso à plataforma que gira, é diferente. Sabemos que a única força no plano que atua sobre a bola é $\vec{T}$. Nesse referencial a aceleração da bola é nula. Assim, escrevemos:

$$\vec{T} + \vec{F}^{inércia} = 0$$

De acordo com a expressão (13.21) a força de inércia é igual à força centrífuga, e tem apenas a componente normal. Sua expressão é;

$$\vec{F}^{(inércia)} = -\vec{n} \left(m \frac{v^2}{R} \right) = -\vec{n} (mR\omega_0^2) \quad (13.26)$$

Obtem-se assim, um resultado análogo àquele encontrado no referencial fixo. Ou seja, nesse referencial escrevemos:

$$\vec{T} - \vec{n} (mR\omega_0^2) = 0 \quad (13.27)$$

Percebe-se assim a total compatibilidade na descrição do movimento da bola a partir de referenciais distintos. Requerendo, no entanto, a adição de forças de inércia. Elas, por outro lado, são forças reais que se fazem sentir no referencial não inercial.

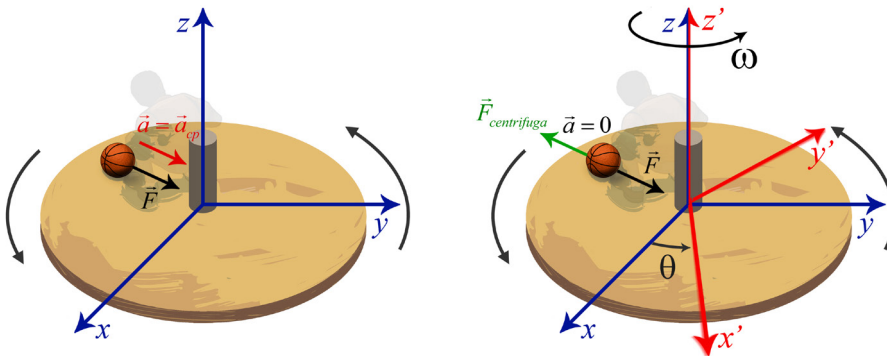


Figura 13.8 - Resumo da dinâmica quando a bola se encontra em repouso sobre a plataforma. No primeiro referencial a bola está acelerada, no segundo não. Para compatibilizar as duas descrições, devemos adicionar a força centrífuga que, ademais, podemos sentir ao segurar a bola aplicado uma força T para equilibrá-la.

Exemplo 13.3

Escreva uma expressão para a velocidade de um ponto na Superfície Terrestre e, a partir dela, determine a força centrífuga como função da latitude.

Resolução

Visto de um sistema inercial, um ponto na superfície da Terra, cujo vetor de posição é $\vec{r}$, é dotado de duas velocidades distintas.

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}' \quad 13.34$$

Onde $\vec{V}'$ é a velocidade da partícula no sistema não inercial. Isto é quando devidamente transformada para este sistema. Para ela escrevemos

$$V' = R_z(\theta) \left(\frac{dr'}{dt} \right) \quad 13.35$$

O primeiro termo do lado direito de 13.44 varia com a latitude (primeiramente utilizaremos o ângulo θ das coordenadas esféricas). Assim, utilizando coordenadas esféricas, escrevemos a velocidade angular como função do ângulo θ assim:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \omega (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad 13.36$$

E, portanto, a velocidade varia com a esse ângulo de acordo com a expressão:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (r\omega \sin\theta) \vec{e}_\phi. \quad 13.37$$

Para um ponto na superfície terrestre temos $r = R$. O módulo da velocidade depende, portanto, do raio da Terra (R), da sua velocidade angular e da latitude. No entanto, a direção e o sentido dessa velocidade dependem da longitude:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (R\omega \sin\theta) \vec{e}_\phi. \quad 13.38$$

Assim sendo, a força centrífuga é dada por:

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -(mR\omega^2 \sin\theta) \vec{k} \times \vec{e}_\phi = -(mR\omega^2 \sin\theta) (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \times \vec{e}_\phi. \quad 13.39$$

De (13.39) constatamos que a força centrífuga atinge o valor máximo nos pontos localizados sobre o Equador. Nesse plano (caracterizado por $\theta = \pi/2$), obtemos:

$$\vec{F}_{centrifuga} = (mR\omega^2) (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) = (mR\omega^2) \vec{e}_r = (mR\omega^2) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (13.40)$$

Ela aponta, portanto, para fora do centro da Terra. Nos polos ela se anula. Para outros pontos o seu efeito é o de introduzir uma redução e mudança de orientação da força peso. Ou seja, ela leva a uma força aparente que depende da Latitude e da longitude.

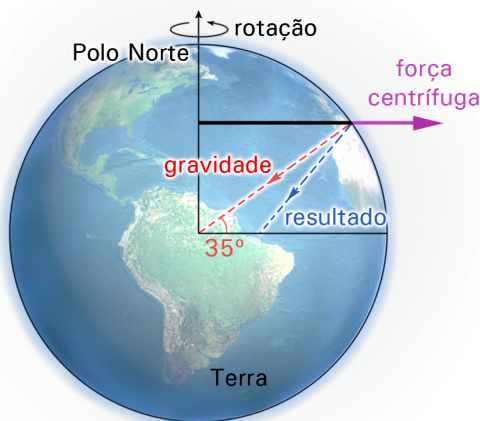


Figura 13.10 - Direção da força centrífuga na superfície terrestre e a alteração da força peso aparente daí resultante.

Para transformarmos as expressões acima em termos da latitude, devemos utilizar a relação:

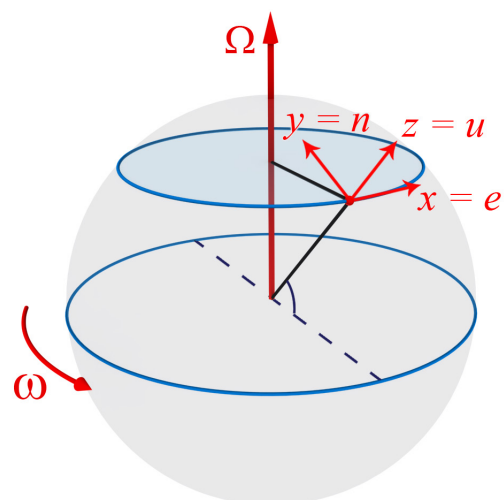
$$\theta = \pi/2 - \lambda \quad (13.41)$$

onde λ é a latitude.

Exemplo 13.4

Utilizando um sistema de coordenadas locais (vide figura 13.11), analise a deflexão de um objeto que se mova dos polos para o equador (movimentos norte-sul), de leste para oeste e do oeste para o leste (movimentos leste-oeste).

Figura 13.11 - Sistema de coordenadas locais. O eixo z aponta para o Zênite (acima da nossa cabeça). O outro eixo, n , aponta para o norte a partir de onde estamos. Finalmente, o eixo leste aponta nessa direção.



Resolução

Consideremos agora o efeito da força de Coriolis analisando-o a partir de um referencial local estabelecido num ponto cuja latitude é λ . Um referencial local é aquele para o qual a origem do sistema se localiza no ponto em apreço, o eixo x tem uma direção tangente à superfície terrestre e orientação do eixo no sentido leste, o eixo y é igualmente tangente à superfície e orientado no sentido norte enquanto que o eixo z é perpendicular à superfície e orientado para cima, vide figura 13.9.

No sistema de coordenadas locais, as coordenadas do vetor velocidade angular, e da velocidade de uma partícula que se move na superfície terrestre têm coordenadas locais dadas pelas expressões:

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_e \\ v_n \\ v_u \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_C = 2\omega \begin{pmatrix} v_n \sin \lambda - v_u \cos \lambda \\ -v_e \sin \lambda \\ v_e \cos \lambda \end{pmatrix}, \quad (13.42)$$

Onde v_e , v_n e v_u são as componentes da velocidade no referencial local. De 13.42 deduzimos que a aceleração de Coriolis, tem componentes dadas por:

$$\vec{a}_C = 2\omega \begin{pmatrix} v_n \sin \lambda - v_u \cos \lambda \\ -v_e \sin \lambda \\ v_e \cos \lambda \end{pmatrix}, \quad (13.43)$$

Considerando os movimentos importantes na atmosfera terrestre, como aqueles associados a massas de ar ou aqueles associados a correntes marítimas, percebemos que a componente vertical da velocidade é pequena e, para efeitos práticos, pode ser desprezada. Fazemos assim, $v_u = 0$.

Ademais, a componente vertical da aceleração de Coriolis é, para esses movimentos de massas, muito menor do que a aceleração da gravidade. Por isso consideramos, dentro de boa aproximação, o movimento ocorrendo apenas no sentido leste-oeste e norte-sul. Para tais movimentos bidimensionais, restritos ao plano horizontal do referencial local, valem as expressões simplificadas, obtidas de para a velocidade e aceleração de Coriolis:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_e \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_C = f \begin{pmatrix} v_n \\ -v_e \end{pmatrix}, \quad (13.44)$$

onde o parâmetro f dado por:

$$f = m\omega \sin \lambda. \quad (13.45)$$

É conhecido como parâmetro de Coriolis. Ele depende de forma significativa da latitude.

A análise da dinâmica atmosférica e marítima se simplifica enormemente quando fazemos uso das expressões 13.44 e 13.45. Dessas expressões podemos inferir que movimentos na direção leste levam a forças de Coriolis na direção sul (pois a componente norte da aceleração de Coriolis é negativa e dada por $-f v_e$), enquanto que um movimento na direção norte induz forças de Coriolis na direção leste (Nesse caso a componente leste da aceleração de Coriolis é positiva e dada por $f v_n$). Ou seja, massas de ar em movimento serão defletidas em direções diferentes quando vão do polo norte para o equador, ou do equador para o polo norte. O mesmo acontecendo com movimentos no sentido oeste para leste e do leste para oeste. Essa situação é ilustrada na figura (13.12) e (13.13).

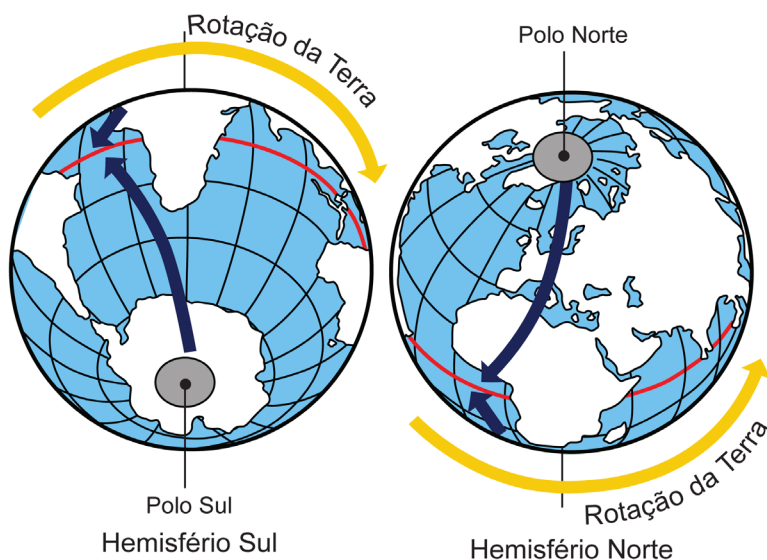


Figura 13.12 - Como resultado da força de Coriolis, massas em movimento serão defletidas de forma distinta quando se movimentam do Polo Sul para o Equador ou do Polo Norte para o Equador.

Assim, as forças de Coriolis desempenham um papel central no entendimento da formação de furacões. Para isso, basta observar o esboço da circulação de massas vindas de diferentes direções e que convergiriam, não fora pela força de Coriolis, num determinado ponto. Elas afetam de forma significativa a circulação de massas na atmosfera terrestre. Isso é ilustrado pelas figuras (13.13)

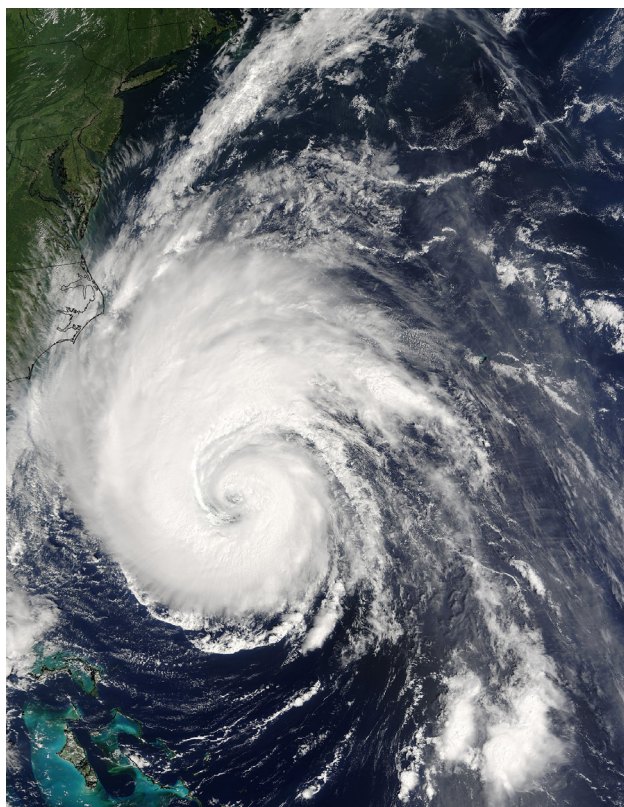


Figura 13.13 - Esboço da circulação de massas como resultado da força de Coriolis e sua observação. Furacão Isabel NASA Earth Observatory.