12 – Cinemática das Rotações

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 12.1

Considere uma rotação ao longo do eixo z por um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ no sentido anti-horário. Nesse caso:

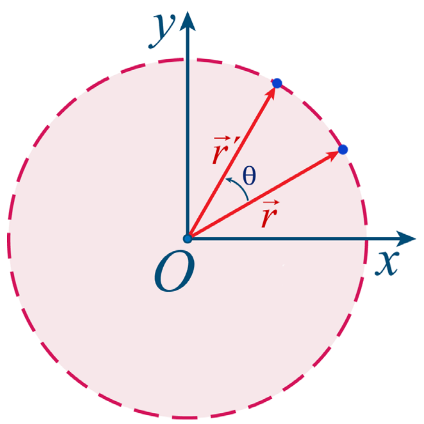
a) Determine a matriz de rotação.

b) Escreva a matriz transposta e verifique que:

$$R^T\left(\frac{\pi}{6}\right) = R^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

c) Quais são as novas coordenadas do ponto $P(0,1,2)$?

d) Verifique que a distância desse ponto até a origem se mantém constante. Adote o Sistema internacional de medidas.



Resolução

a) A matriz de rotação por um ângulo θ em torno do eixo z para uma rotação contrária ao ponteiro dos relógios é:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, para o ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ temos:

$$R_z\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & sen\frac{\pi}{6} & 0 \\ -sen\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Tomando o produto de matrizes é fácil verificar que

$$R_z\left(\frac{\pi}{6}\right)R_z\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) Sob essa rotação, as componentes cartesianas do ponto   se transformam assim:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=R_z\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

Portanto, as novas coordenadas do ponto, são:

$$x'=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad y'=\frac{1}{2}\qquad z'=2$$

d) É fácil constatar que numa rotação o módulo do vetor se preserva;

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}=\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}$$

Nesse caso, temos

$$\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+4}=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$$

Exercício Resolvido 12.2

Considere pontos da terra ao longo da linha do equador (vide figura).

a) Escreva o vetor posição de um ponto na linha do equador

b) Escreva uma expressão para a velocidade de um ponto situado ao longo dessa linha

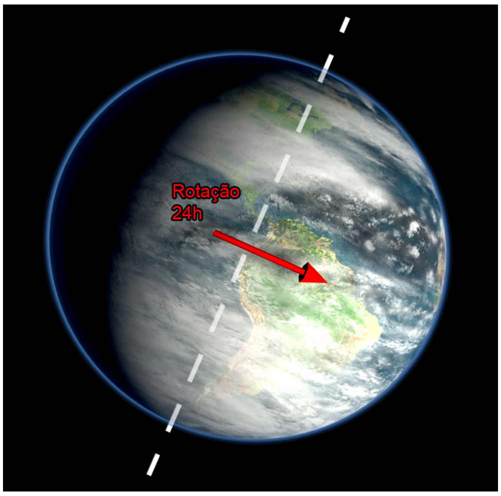


Figura 13.5 – A velocidade de um ponto qualquer ao longo da linha do equador é tangencial a ela.

a) Considerando-se que o raio da Terra seja R, e que o eixo z é tomado como sendo o eixo de rotação da terra, um ponto sobre essa linha tem coordenada $z = 0$. Assim, o vetor posição se escreve de duas formas equivalentes:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+0\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{j}=R\left(\cos\varphi\vec{i}+\mathrm{sen}\varphi\vec{j}\right)=R\vec{e}_\rho$$

Na primeira, utilizamos coordenadas cartesianas. Na segunda utilizamos coordenas polares. Assim, a coordenada φ pode ser identificada, num referencial que gira com a Terra, pela longitude desse ponto.

b) Sobre a linha do equador, a velocidade de qualquer ponto nela situada é dada por:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Tendo em vista que:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$$

E, portanto,

$$\vec{V} = \omega \vec{k} \times \left(R \vec{e}_\rho \right) = \omega R \left(\vec{k} \times \vec{e}_\rho \right) = \omega R \vec{e}_\varphi$$

Onde $\vec{e}_\varphi$ é um versor tangente à linha do equador. Portanto:

$$\left| \vec{V} \right| = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$$

Onde, R é o raio da terra e T é o período de rotação da terra de 24 horas. Portanto,

$$T = 24.3600 s = 86.400 s$$

Admitindo o raio da Terra como sendo R = 6.400 km (6,4.10^6 m) obtemos:

$$\left| \vec{V} \right| = \frac{2\pi}{T} R = \frac{2\pi}{86,4} 6.400 \ m/s = 465,4 \ m/s$$

A velocidade esse módulo e a direção tangente à linha do equador.

Exercício Resolvido 12.3

O ângulo associado a um ponto localizado sobre uma roda de bicicleta girando em torno do eixo z, é uma função do tempo dada por:

$$\theta(t) = a + bt^2 - ct^3$$

onde a, b e c são constantes positivas tais que se t for dado em segundos, θ é determinado em radianos.

a) Calcule a aceleração angular da roda em função do tempo.

b) Em que instantes a velocidade angular instantânea da roda é nula?

Resolução

a) $$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\left(a + bt^2 - ct^2\right)}{dt}$$

Daí obtendo,

$$\omega(t) = 2bt - 2ct^2$$

A aceleração angular é, portanto,

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = 2b - 6ct$$

b) $$\omega(t) = 0 \Rightarrow 2bt - 3ct^2 = 0$$

Temos portanto, duas soluções:

$$t = 0 \text{ ou } 2b - 3ct = 0$$

Adotando-se tempos positivos, ou seja, tempos posteriores ao início do movimento, encontramos:

$$t = \frac{2b}{3c}$$