11 – Trabalho e Variação da Energia Elétrica

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 11.1

Uma força depende das coordenadas de acordo com a seguinte expressão:

$$\vec{F} = ax^2 z\vec{i} + by^2 x\vec{j} + cz^2\vec{k}$$

Onde a, b e c são constantes adequadas. Essa força é conservativa?

Resolução

Nesse caso, as componentes da força são:

$$F_x = ax^2 z \quad F_y = by^2 x \quad F_z = cz^2$$

Obtemos os seguintes resultados

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = ax^2 - 0 = ax^2$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = by^2 - 0 = by^2$$

Portanto, essa força não é conservativa. Não há a necessidade de efetuar integrais para concluir isso.

Exercício Resolvido 11.2

Determine a energia potencial associada a uma força constante a qual será escrita sob a forma:

$$\vec{F}_0 = F_{0x}\vec{i} + F_{0y}\vec{j} + F_{0z}\vec{k}$$

onde F_{0x}, F_{0y} e F_{0z} são constantes associadas às componentes da força.

Aplique o resultado para a força gravitacional quando admitida constante.

Resolução

A solução é simples, mas bastante ilustrativa. A questão pode ser colocada como o problema de determinar uma função $U(x, y, z)$ de tal forma que:

$$F_{0x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_{0y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_{0y} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

É muito fácil constatar, por meio de uma derivação muito simples, que a função definida por:

$$U(x, y, z) = -F_{0x}x - F_{0y}y - F_{0z}z$$

é a energia potencial associada à força constante.

Consideremos o caso da energia potencial gravitacional. Adotando-se o eixo z no sentido contrário ao da força gravitacional, a força gravitacional, se escreve:

$$\vec{F}_0 = -mg\vec{k}$$

O que nos leva, utilizando (11.6), à seguinte expressão para a energia potencial gravitacional:

$$U(z) = mgz.$$

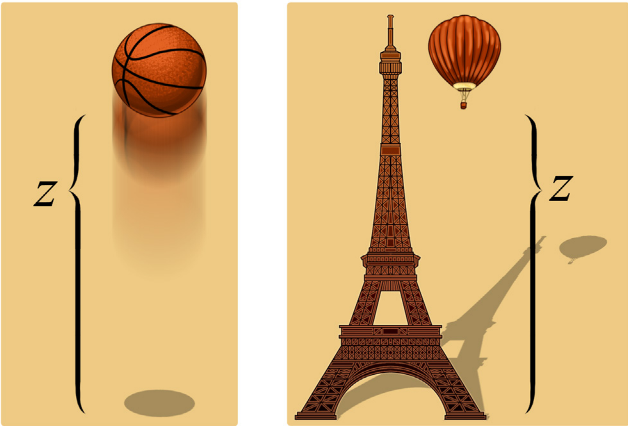

Figura 11.3 - A energia potencial gravitacional depende da altura calculada a partir do solo.

Exercício Resolvido 11.3

A Figura 11.8 ilustra um bate-estaca em operação: o martelo de massa 1 tonelada é erguido, inicialmente, a 4 metros acima do topo da estaca. Uma vez solto, o martelo cai e atinge o topo da estaca. Descreva as transformações de energia até o martelo colidir com a estaca. Considerar $g = 10\,N/kg$.

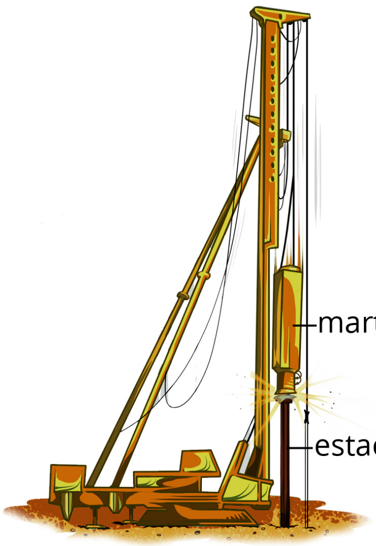

Figura 11.8 - Um bate-estaca converte energia potencial em energia cinética e essa pode ser facilmente utilizada.

Resolução

O martelo tem energia potencial, quando ele se encontra no ponto mais alto, em relação ao topo da estaca,

$$E_p = mgz = (1.000kg)(10N/kg)(4m) = 40kJ.$$

A partir do momento em que o martelo entra em queda livre sua energia potencial gravitacional diminui e a sua energia cinética aumenta na mesma proporção. Durante a queda, a energia mecânica é constante e dada por:

$$Ec + Ep = E = 40kJ.$$

Ao colidir com o topo da estaca, a energia cinética do martelo é $Ec = 40\,kJ$. Essa energia é transferida quase que integralmente para a estaca que inicia o seu movimento permitindo-a penetrar no solo. Ela é, assim, responsável pela penetração da estaca no solo. A outra parte da energia, não transformada em energia cinética da estaca, é transformada em outras formas (energias térmica e sonora, por exemplo).

Exercício Resolvido 11.4

Sabe-se que a energia mínima de um elétron no átomo de hidrogênio é igual a $-13{,}6\,eV$. Adotando um modelo de órbitas circulares (vide figura 11.10), determine o valor da máxima aproximação que o elétron pode chegar do núcleo.

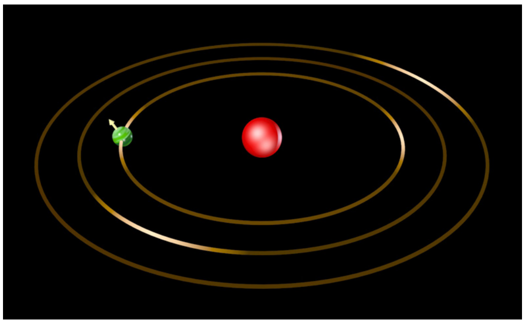

Figura 11.10. A energia potencial elétrica tem o mesmo comportamento, com respeito à distância, que a energia potencial gravitacional.

Resolução

A questão da energia do átomo de hidrogênio foi muito analisada pelos físicos desde o final do século XIX. A existência desse valor da energia e o fato do átomo ter uma energia mínima só vieram a ser entendidos a partir da mecânica quântica. Esse problema tem, portanto, um grande interesse histórico.

No caso do átomo de hidrogênio, um elétron dotado de carga $Q = -e$ (onde $e = 1{,}610^{-19}$) interage com o núcleo, nesse caso um próton, que tem uma carga oposta a esta. A carga e, é a unidade elementar de carga elétrica. De acordo com a expressão (11.52), a energia potencial do elétron é negativa e dada por:

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

Assim, a energia mecânica do elétron em movimento em torno do núcleo é dada por:

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

onde $m_e = 9{,}1.10^{-31}\,kg$ é a massa do elétron.

A unidade de energia eV é definida como a energia necessária para acelerar um elétron quando ele se encontra sob uma diferença de potencial de 1 Volt. Portanto,

$$1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$$

Para órbitas circulares, aceleração centrípeta vezes a massa é igual à componente radial da força. Escrevemos, de acordo com a lei de Newton:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

E, portanto, a energia cinética do elétron, é a metade da sua energia potencial :

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)$$

Portanto a energia do elétron, admitidas órbitas circulares, é negativa e dada por:

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right),$$

Portanto, a aproximação máxima $a_{\max}$(que é, a rigor a distância mínima até o núcleo) é aquela associada à energia mínima, e dada pela expressão

$$a_{\max} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E_{\min}}\right),$$

Substituindo os valores dados na expressão acima e lembrando que no SI $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 910^9$, obtemos:

$$a_{\max} = 5,3\cdot 10^{-11}m = 0,53A^0$$

O valor acima é conhecido como raio de Bohr do átomo de hidrogênio.

Exercício Resolvido 11.5

Um carrinho com massa m = 200 kg é solto da posição A de uma "montanha russa" conforme esquema. Considerar y_A = 12,25 m, y_C = 9,25 m, y_B = 1,0 m. Adotar g = 10 N/kg e inexistência de atritos.

a) Determinar a velocidade do corpo ao passar pelo ponto C.

b) Se R = 25 m for o raio de curvatura da trajetória no ponto B, determinar a força de reação normal da pista sobre o carrinho.

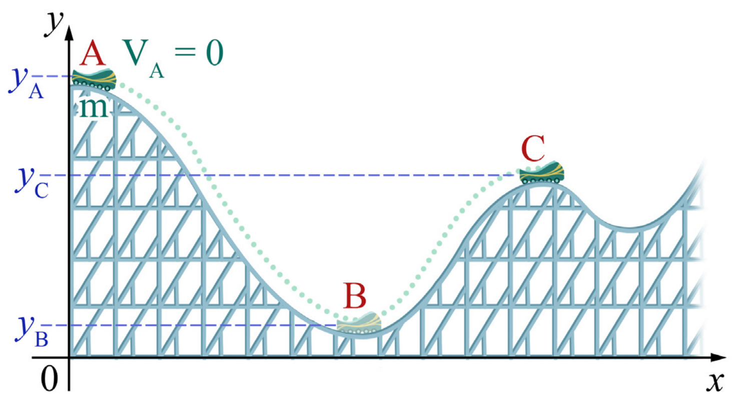

Figura 11.11 - Aplicação da mecânica na montanha russa.

Resolução

Primeiramente vamos adotar o referencial sugerido na figura 11.11. Durante o movimento do carrinho – considerado como ponto material – atuam duas forças: a reação normal da pista e a força gravitacional (a força peso). Pelo fato dos deslocamentos elementares serem ortogonais à direção de $\vec{N}$, o seu trabalho é nulo. Assim, na ausência da força de atrito, podemos aplicar a Lei da Conservação da Energia Mecânica.

a) Velocidade do carrinho no ponto C.

Aplicando a Lei da Conservação da Energia Mecânica no movimento nos pontos A e C, escrevemos:

$$\frac{m(v_A)^2}{2} + mgy_A = \frac{m(v_c)^2}{2} + mgy_C$$

Substituindo, $v_A = 0$; $y_A = 12{,}25\,m$, $y_C = 9{,}25\,m$, $m = 200\,kg$ e $g = 10\,N/kg$ na equação acima tem-se:

$$0 + 200 \times 10 \times 12,25 = \frac{20\left(v_C\right)^2}{2} + 200 \times 10 \times 9,25$$

Obtemos, portanto,

$$v_C = \sqrt{60}m/s \cong 7,74m/s.$$

O sinal pode ser interpretado como sendo a velocidade no sentido do movimento do carrinho. Nesse caso vamos adotá-lo o positivo.

b) Reação normal da pista sobre o carrinho no ponto B.

Considere o DCL no ponto B.

Para determinar a reação normal devemos recorrer a Lei de Newton aplicada ao movimento curvilíneo. Nesse caso, sabemos que a componente normal das forças resultantes é igual ao produto da massa vezes a aceleração centrípeta. O DCL indica, na ausência de força de atrito, as duas forças que atuam na partícula.

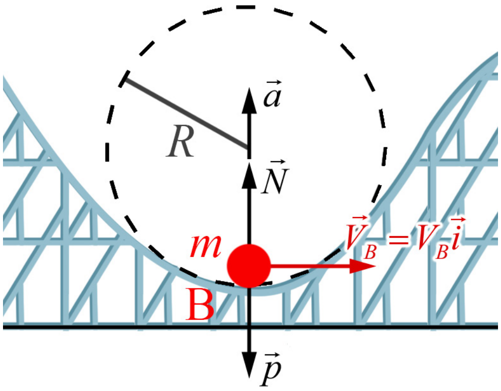

Figura 11.12 DCL da partícula no ponto B.

O trecho da trajetória em torno do ponto B é um arco de uma circunferência de raio R. Essa circunferência recebe o nome de circunferência osculadora. Neste ponto as forças sobre a partícula são:

$$\vec{N} = N\vec{j}$$

que é a reação do apoio sobre a partícula e, a segunda força, é a sua força peso;

$$\vec{P} = -\left(mg\right)\vec{j}$$

Em virtude do fato de que um pequeno elemento da curva em torno do ponto B, ainda pertence à circunferência, a partícula fica sujeita à aceleração centrípeta a qual aponta para o centro da circunferência osculadora. Portanto, a segunda lei de Newton se escreve assim:

$$\vec{N} + \vec{p} = m.\vec{a}_{centr}$$

O vetor aceleração centrípeta $\vec{a}_{centr}$ tem modulo $\frac{\left(v_B\right)^2}{R}$ e dirigida para o centro, logo,

$$\vec{a}_{centr} = \frac{\left(v_B\right)^2}{R}\vec{j}$$

e, consequentemente,

$$N - \left(mg\right) = m\frac{\left(v_B\right)^2}{R}$$

Donde inferimos que a força normal é dada pela expressão:

$$N = m\frac{(v_B)^2}{R} + mg = m\left[g + \frac{(v_B)^2}{R}\right]$$

Sabemos, ademais, pela conservação da energia, que a seguinte expressão é sempre válida, independentemente dos pontos ,

$$m\frac{(v_A)^2}{2} + mgy_A = m\frac{(v_B)^2}{2} + mgy_B$$

Substituindo as grandezas conhecidas, $m = 200\,kg$, $g = 10\,N/kg = 10\,m/s^2$, e $R = 25\,m$, concluímos que:

$$(v_B)^2 = 2g(y_A - y_B) = 225(m/s^2)$$

Portanto, a força normal nesse ponto é:

$$N = m\left[g + \frac{(v_B)^2}{R}\right] = 200kg\left[10m/s^2 + (225m^2/s^2)/(25m)\right] = 3.800N$$

Exercício Resolvido 11.06

Mostre que o trabalho realizado pela força de atrito depende do comprimento do arco da curva interligando dois pontos (a distância percorrida entre esses pontos). Portanto, não são forças conservativas.

Resolução

Para que possamos calcular o trabalho, devemos encontrar uma expressão vetorial para a força de atrito. Escrevemos, levando em conta seu módulo, direção e sentido:

$$\vec{F}_{at} = -\mu N\frac{\vec{v}}{v} \quad \text{se} \quad v \neq 0$$

Ou seja, ela tem um sentido contrário ao do movimento e tem a mesma direção dele. Assim, a rigor, ela não depende das coordenadas e o teste usual para forças conservativas não se aplica. Quando em movimento o trabalho realizado por essa força quando de um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ é:

$$dW = \vec{F}_{at}.d\vec{l} = -\mu N\frac{\vec{v}}{v}.d\vec{l}$$

No entanto, $d\vec{l}$ tem a mesma direção e sentido da velocidade. Escrevemos:

$$d\vec{l} = \frac{\vec{v}}{v}.dl = \vec{t}dl$$

Onde dl é o elemento de comprimento de arco da curva associada à trajetória. Portanto:

$$dW = -\mu N\frac{\vec{v}}{v}.\frac{\vec{v}}{v}dl = -\mu N dl$$

Logo, o trabalho realizado pela força de atrito é:

$$W = -\mu N\int dl = -\mu NL$$

Onde L é o comprimento do arco da curva interligando os pontos A e B. Assim, o trabalho realizado depende da curva e, consequentemente, a força de atrito não é conservativa.

Exercício Resolvido 11.7

Um bloco de massa M desliza sobre uma superfície dotada, inicialmente, de velocidade $\vec{V}$. Depois de percorrer uma distância d ele para. Essa é uma manifestação bastante comum da força de atrito.

Determine o coeficiente de atrito entre as superfícies a partir dos dados do enunciado e da aceleração da gravidade.

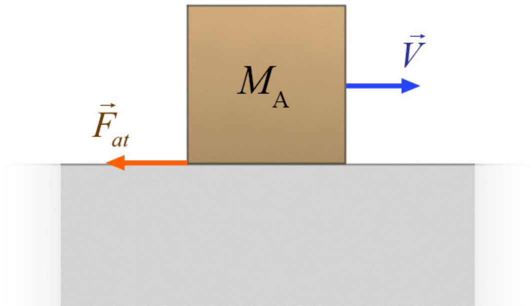

Figura 11.13 - Forças de atrito reduzem a velocidade de um corpo levando-o ao repouso. A distância percorrida depende do coeficiente de atrito.

Resolução

O trabalho realizado pela força de atrito é responsável pela variação da energia cinética do bloco. Escrevemos:

$$W_A^B = \int_A^V \vec{F}_{at}.d\vec{l} = \frac{MV_B^2}{2} - \frac{MV_A^2}{2}$$

No caso em apreço,

$$V_B = 0 \text{ e } V_A = V = \left|\vec{V}\right|$$

Portanto:

$$\int_0^B \vec{F}_{at}.d\vec{l} = -\frac{MV^2}{2}$$

Ou seja, a força de atrito leva à perda da energia cinética do bloco. Tendo em vista o resultado do exercício resolvido 11.9 podemos escrever:

$$\int_A^B \vec{F}_{at}.d\vec{l} = -\mu N d_{AB} = -\mu N d$$

Donde inferimos que:

$$\mu N d = \frac{MV^2}{2}$$

No entanto, a componente vertical da força normal se iguala à força peso,

$$N = Mg$$

Levando-nos ao resultado:

$$\mu = \frac{V^2}{2gd}$$