08 – Movimento dos Projéteis

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 8.1

A figura ilustra a situação na qual em um determinado instante um projétil de massa $m = 20\,kg$ sai da "boca" de um canhão. As condições iniciais são especificadas na Figura 8.5. O referencial cartesiano é também apresentado nessa figura. Adotaremos, ademais, o instante inicial igual a zero $t_0 = 0$.

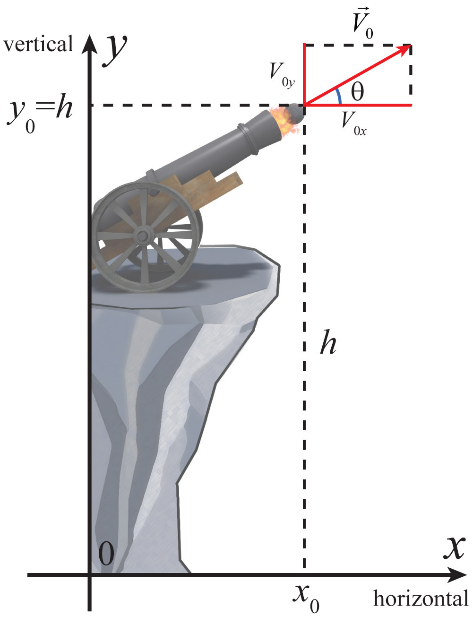

Figura 8.5: Exemplo de condições iniciais.

a) Escrever as componentes das acelerações a_x e a_y do projétil.

b) Quais as condições iniciais do movimento deste projétil?

c) Escrever as equações horárias das componentes do vetor velocidade e do vetor posição.

d) Qual a posição, ou seja as coordenadas x e y, e a velocidade do projétil (ou suas componentes) no instante $t = 24\,s$?

Resolução

a) Considerando desprezível a resistência do ar e $g = 10\,m/s^2$, as componentes da aceleração do projétil são: $a_x = 0$ e $a_y = -g = 10\,m/s^2$.

b) Conforme as equações 8.24, considerando-se o referencial adotado e os dados fornecidos, as condições iniciais são:

- $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \left[300\cos(53°)\right]\vec{i} + \left[300\,\text{sen}(53°)\right]\vec{j} = 180\vec{i} + 240.\vec{j} \qquad (\text{m/s})$
- $\vec{r}(t_0) = 0\vec{i} + h\vec{j} = 765\vec{j}$

c) Adotando-se o sistema internacional de unidades, as equações horárias do movimento do projétil para as condições iniciais dadas acima são:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10m/s^2$
$v_x = 180m/s$	$v_y = 240 - 10t$
$x(t) = 180t$	$y(t) = 765 + 240t - 5t^2$

d) Utilizando as equações horárias do movimento já estabelecidas no item anterior, obtemos para os valores das coordenadas, no instante de tempo $t = 24\,s$:

$$x(t = 24\ s) = 180 \times 24 = 4.320m$$

$$y(t = 24\ s) = 765 + (240 \times 24) - 5(24)^2 = 3.645m$$

e para as componentes da velocidade:

$$v_x(t = 24s) = 180m/s$$

$$v_y(t = 24s) = 240 - (10 \times 24) = 0$$

Observe que, sendo $v_y(t = 24\,s) = 0$, a velocidade do projétil nesse instante é:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 180\vec{i}$$

Ou seja, sua velocidade é na direção horizontal, nesse instante de tempo.

Exercício Resolvido 8.2:

Considere o movimento do projétil do Exercício resolvido 01. Escreva a equação da trajetória e esboce o respectivo gráfico.

Resolução

Conforme sintetizado nas equações 8.24, uma forma de se obter a equação da trajetória é eliminar a variável "t" nas equações das abscissas $x(t)$ e substituí-la nas ordenadas $y(t)$ do movimento. Assim, do item (c) do Exercício resolvido 01, temos:

$$x(t) = 180t$$

$$y(t) = 765 + 240t - 5t^2$$

Da primeira equação temos $t = (x / 180)$ que, substituído na segunda, resulta:

$$y(x) = 765 + \left(\frac{4}{3}\right)x - \left(\frac{1}{6.480}\right)x^2$$

Para esboçar o gráfico, é interessante saber em quais pontos a trajetória do projétil cruza o eixo das abscissas. Isso corresponde a determinar as raízes de um polinômio do segundo grau. Fazendo $y(x) = 0$ na equação acima, obtemos:

$$-\left(\frac{1}{6.480}\right)x^2 + \left(\frac{4}{3}\right)x + 765 = 0$$

Levando-se em conta que:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4/3)^2 - 4\left(-\frac{1}{6.480}\right)(765) = 2,25$$

E, lembrando a expressão das raízes de um polinômio do segundo grau, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(\frac{4}{3}\right) \pm \sqrt{2,25}}{2\left(-\frac{1}{6.480}\right)} = \frac{-\left(\frac{4}{3}\right) \pm 1,5}{-\frac{1}{3.240}} = 4.320 \mp 4.860$$

Portanto, temos duas soluções: $x' = 4.320 - 4.860 = -540m$ e $x'' = 9.180m$.

Ademais, o coeficiente de x^2 é negativo, o que implica que a concavidade da parábola é voltada para baixo. O conhecimento das raízes e da concavidade da parábola facilita o esboço da trajetória no plano *xy*. O resultado é apresentado na Figura 8.6.

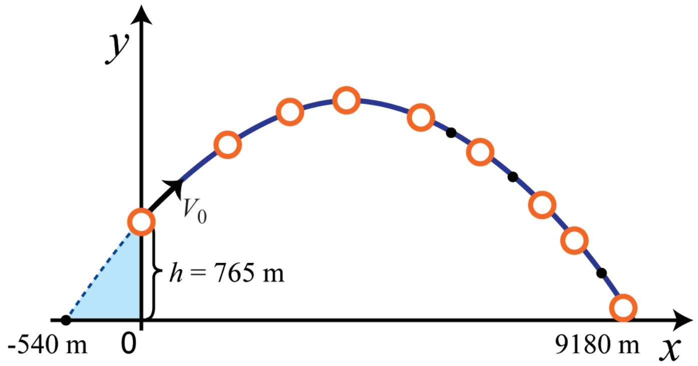

Figura 8.6: Trajetória do projétil no plano que contem a órbita.

Sabemos que um polinômio de segundo grau tem, como nesse caso, duas raízes. No entanto, em determinados problemas, devemos descartar uma delas. Nesse caso específico, a raiz $x = -540\,m$ não tem significado físico, pois a bola é lançada do ponto $(0; 765\,m)$. Assim, a trajetória real só leva em conta os pontos do espaço tais que suas coordenadas são positivas, isto é: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Exercício Resolvido 8.3:

Considere o movimento do projétil do Exercício resolvido 01. Determine as coordenadas do ponto de altura máxima alcançada pelo projétil.

Resolução

A altura máxima pode ser determinada a partir da equação 8.26. E isso requer o conhecimento dos valores de y_0 e v_{0y} (uma vez que g é uma grandeza conhecida).

De acordo com os dados, $v_0 = 300\,m/s$ e $\theta = 53°$; logo, a componente vertical da velocidade inicial é $v_{0y} = v_0 sen(\theta) = 300 \times 0,8 = 240m/s$.

A ordenada, no ato de lançamento e conforme o enunciado, é $y_0 = 765\,m$. Logo, de acordo com 8.26, a altura máxima é dada por:

$$h_{\max} = y_0 + \frac{(v_{0y})^2}{2g} = 765\ m + \frac{(240\ m/s)^2}{2 \times 10\ m/s^2} = 765\ m + 2.880\ m = 3.645\ m$$

Podemos determinar ambas as coordenadas associadas à altura máxima. Para tal, devemos começar pela determinação do tempo para o qual a componente vertical da velocidade do projétil é nula. Ou seja, $v_y = v_{0y} - gt_m = 0$. Desta condição, determinamos t_m:

$$0 = 240 - 10(t_m) \quad \Rightarrow \quad t_m = 24s$$

Substituindo esse valor em $y(t) = 765 + 240t - 5t^2$, determinamos $y_{\max} = h_{\max}$.

$$h_{\max} = 765 + 240(24) - 5(24)^2 = 3.645m.$$

Este valor corresponde à coordenada y do ponto de altura máxima. Para o valor da coordenada x devemos substituir o valor $t_m = 24\,s$ em $x(t) = 180\,t$; determinamos com isso a abscissa do ponto de altura máxima, ou seja, $x_m = 180(24) = 4.320\,m$.

Portanto, o ponto cujas coordenadas são $(4.320\,m, 3.645\,m)$ é o ponto de altura máxima do projétil.

A Figura 8.7 ilustra o ponto de altura máxima e de outras características do movimento estudado. Atente para a característica desse ponto, de ter velocidade vertical nula: $v_y = 0$.

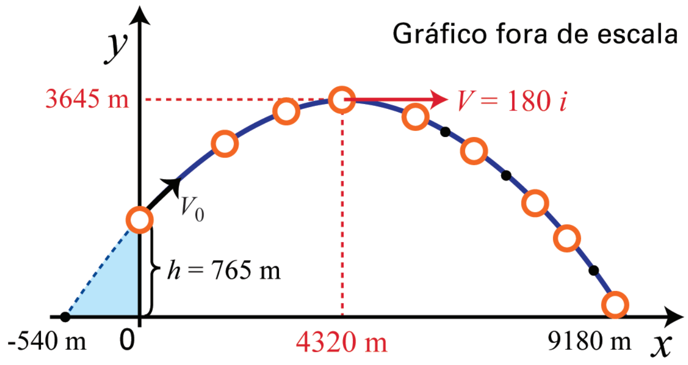

Figura 8.7: Valores de alguns parâmetros relevantes no movimento estudado.

Exercício Resolvido 8.4:

Considere o movimento do projétil do Exercício resolvido 01. A partir dos dados, determinar:

a) O tempo de voo (que, nesse caso, é o tempo de queda) do projétil;

b) O alcance do projétil;

c) O módulo da velocidade quando do impacto contra o solo.

Resolução

A Figura 8.10 ilustra a trajetória parabólica e o ponto de impacto do projétil contra o solo.

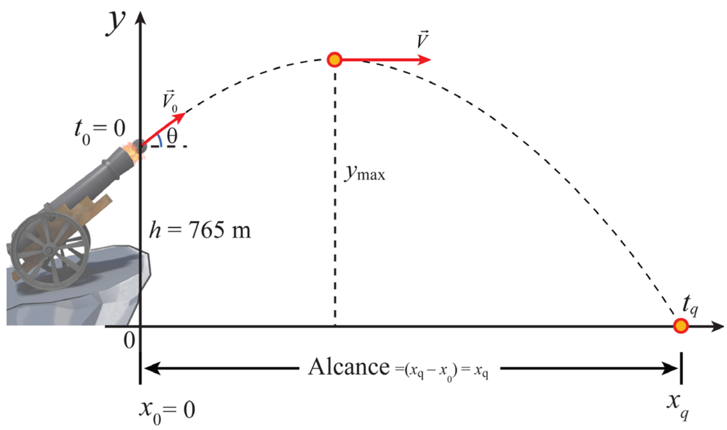

Figura 8.10: Tempo de voo, ou de queda, e o alcance.

As equações básicas deste problema foram determinadas no Exemplo 01. O quadro abaixo apresenta um resumo das equações horárias para esse caso:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10m/s^2$
$v_x = 180m/s$	$v_y = 240 - 10t$
$x(t) = 180t$	$y(t) = 765 + 240t - 5t^2$

a) Determinação do tempo de voo ou de queda.

O tempo de voo ou tempo de queda é o instante $t_q = t_{voo}$, no qual o projétil atinge o solo, ou seja, quando $y(t_q) = 0$. Portanto, recaímos no problema de determinar as raízes do polinômio de segundo grau:

$$0 = 765 + 240(t_q) - 5(t_q)^2$$

O tempo de queda, é uma das raízes da equação do segundo grau acima. Assim, sendo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (240)^2 - 4(-5)(765) = 72.900$$

A rigor, obtemos duas raízes dadas por:

$$t_q = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240 \mp 270}{-10}$$

Donde, aparentemente, temos duas possíveis soluções: $t_q^{'} = -3s$ e $t_q^{''} = 51s$. No entanto, adotando-se o instante de tempo inicial igual a zero, a única solução possível é aquela de sinal positivo. Assim, devemos escolher $t_q^{''} = 51s$. A raiz negativa não faz sentido, uma vez que estamos descrevendo o movimento para tempos posteriores ao do lançamento. Devemos, pois, considerar o tempo sempre positivo. Portanto, adotando o instante inicial nulo, temos:

$$t_q = t_{voo} = 51s.$$

b) Determinação do alcance.

O alcance é a distância que o projétil percorre, ao longo da horizontal, desde o instante de lançamento até o instante de queda. De acordo com (8.33):

$$\text{Alcance} = x_q - x_0$$

Como, neste exemplo, $x_0 = 0$, o alcance corresponde à abscissa do ponto de impacto do projétil contra o solo. Assim,

$$a = x_q = 180(51) = 9.180m$$

c) Determinação do módulo da velocidade de impacto.

As componentes da velocidade do projétil, em qualquer ponto de sua trajetória, em função do tempo, são:

$$v_x = 180m/s$$
$$v_y = 240 - 10t$$

Logo, para $t = 51\,s$ (instante em que o projétil impacta o solo), as componentes têm os valores:

$$v_x = 180m/s$$
$$v_y = 240 - 10(51) = -270m/s$$

O sinal negativo de v_y indica que o sentido do movimento ao atingir o solo, e ao longo do eixo y, é para baixo. O módulo da velocidade nesse instante de tempo $t = 51\,s$, é:

$$v = \sqrt{(180)^2 + (-270)^2} \cong 324{,}5 \;\; m/s.$$

Exercício Resolvido 8.5:

Um jogador lança uma bola diretamente para cima (vide Figura 8.12), a partir de uma altura $h = 1{,}55\,m$, com velocidade inicial de $15\,m/s$. Considerando-se o instante inicial $t_0 = 0$, e adotando-se o referencial de acordo com a Figura 8.12, determinar:

a) As equações horárias e gerais do movimento;

b) O instante em que a bola atinge a altura máxima;

c) A altura máxima (h_{max});

d) O tempo de voo da bola.

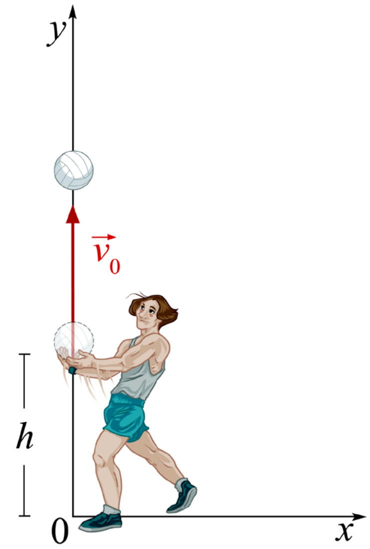

Figura 8.12: Lançamento vertical para cima.

Resolução

a) Trata-se de um lançamento vertical para cima, ou seja, o ângulo de tiro é. $\theta = 90°$ A sua característica é $v_{0x} = 0$. O movimento da bola, em relação ao referencial adotado, é unidimensional, vertical e para cima. Note que, neste caso, $h = y_0 = 1{,}55\,m$. As equações horárias, nessas circunstâncias, são:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10 m/s^2$
$v_x = v_{0x} = v_0 \cos 90° = 0$	$v_y = 15 - 10t$
$x(t) = x_0 = 0$	$y(t) = 1{,}55 + 15t - 5t^2$

b) No instante (t_m) em que a bola atinge a altura máxima, sua velocidade é nula. Impondo $v_y = 0$, determinamos o valor desse instante t_m. Assim,

$$0 = 15 - 10t_m \quad \Rightarrow \quad t_m = 1{,}5s$$

c) Tendo em vista que a bola atinge a altura máxima no instante $t = t_m = 1{,}5\,s$, basta substituir este valor na equação da coordenada y, e obtemos:

$$h_{\max} = 1{,}55 + 15(1{,}5) - 5(1{,}5)^2 = 12{,}8m$$

d) O tempo de voo é o intervalo de tempo em que a bola fica no ar desde o seu lançamento até atingir o solo. Logo, impondo a condição $y(t_{voo}) = 0$, e resolvendo a equação resultante, determinamos $t = t_{voo}$. Assim,

$$0 = 1{,}55 + 15t_{voo} - 5(t_{voo})^2$$

cuja solução pode levar a dois resultados: $t'_{voo} = 3{,}1s$ e $t''_{voo} = -0{,}1s$. Fisicamente, a resposta certa é $t'_{voo} = 3{,}1s$. A solução $t''_{voo} = -0{,}1s$ deve ser descartada, pois, a partir do lançamento, o tempo é sempre positivo. Portanto, a bola colide com o solo $3{,}1\,s$ após o seu lançamento.

Exercício Resolvido 8.6:

Um macaco lança um coco do alto de uma palmeira com velocidade $v_0 = 5\,m/s$, verticalmente para baixo, de uma altura $h = 25{,}2\,m$. Considerando o sistema de referência adotado na figura (8.14), determinar:

a) O tempo de queda do fruto;
b) A velocidade com que o fruto atinge o solo.

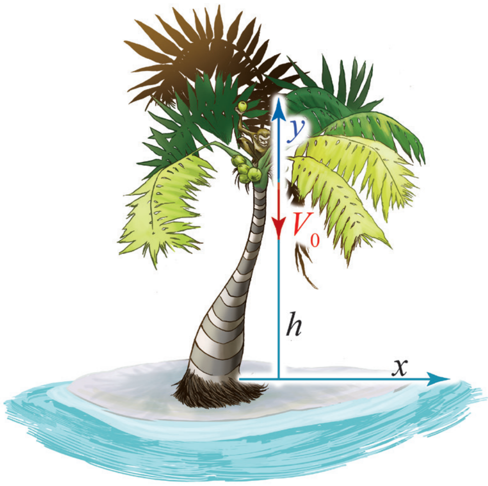

Figura 8.14: Exemplo de lançamento vertical para baixo

Resolução

As condições iniciais do movimento (admitindo-se $t_0 = 0$) são:

$$y_0 = h = 25{,}2m \quad \text{e} \quad x_0 = 0$$
$$v_{0y} = -5m/s \quad \text{e} \quad v_{0x} = 0$$

Nessas circunstâncias, as equações do movimento são:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10m/s^2$
$v_x = v_{0x} = v_0\cos 90° = 0$	$v_y = 5 - 10t$
$x(t) = x_0 = 0$	$y(t) = 25{,}2 - 5t - 5t^2$

a) O tempo de queda é determinado impondo a condição $y(t_0) = 0$. Isso nos leva a determinar as raízes do polinômio resultante. Tal polinômio do segundo grau é:

$$25{,}2 - 5(t_q) - 5(t_q)^2 = 0$$

uma vez que Δ é positivo, ou seja;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-5)(25{,}2) = 25 + 504 = 529$$

Obtemos duas raízes reais e dadas por:

$$t_q = \frac{-(-5) \pm \sqrt{529}}{2(-5)} = \frac{5 \pm 23}{-10}$$

Donde, $t'_q = -\frac{28}{10} = -2{,}8\ s$ e $t''_q = \frac{-18}{-10} = 1{,}8\ s$.

Como o tempo de queda é contado a partir do lançamento, sendo, portanto, sempre positivo, a solução procurada é $t'' = 1{,}8s$, o que nos leva a concluir que o fruto atinge o solo $1{,}8s$ após ser lançado.

b) A componente vertical da velocidade pode ser determinada substituindo-se o tempo de queda $t = 1{,}8s$, na equação horária da velocidade. Obtemos:

$$v_y = -5 - 10(1{,}8) = -23m/s\,(\approx -83km/h)$$

Exercício resolvido 8.7:

Consta que Galileu Galilei abandonou duas balas de canhão de massas diferentes, da sacada de um dos últimos andares da Torre de Pisa (Itália), para demonstrar que a velocidade de queda era independente da massa das bolas. Se as bolas foram abandonadas de uma altura h = 45 metros, determinar:

a) O tempo de queda;

b) A velocidade quando do impacto da bola contra o solo.

Resolução

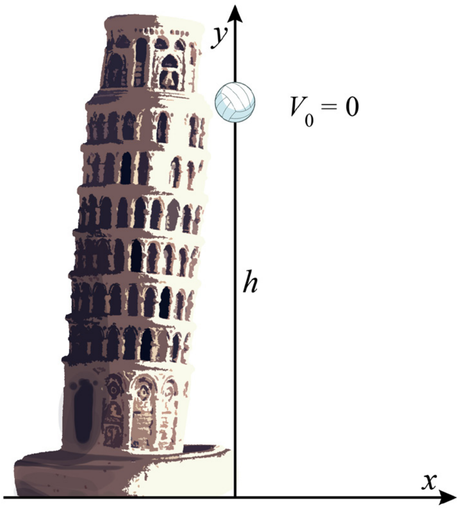

Figura 8.16: Queda livre da torre de Pisa.

Adotando-se os eixos cartesianos, conforme ilustra a Figura 8.16, considerando nula a resistência do ar, usando $g = 10\,m/s^2$, e considerando $t_0 = 0$, as equações fundamentais podem ser assim escritas:

$$a_y = -10\ m/s^2$$
$$v_y(t) = -10t \qquad (m/s)$$
$$y(t) = 45 - 5t^2 \qquad (m)$$

a) O tempo de queda t_q pode ser obtido por meio da equação $y(t_q) = 0$, pois, quando a bola atinge o solo, a coordenada y é nula. Assim,

$$0 = 45 - 5(t_q)^2 \rightarrow t_q = \pm\sqrt{9} = \pm 3\ \text{s}$$

Sendo $t \geq 0$, descartamos a solução associada ao tempo negativo. Portanto, em queda livre, a bola atinge o solo depois de 3 segundos.

b) Para a previsão da velocidade de impacto contra o solo, usamos a equação da velocidade. Nela substituímos $t = t_q = 3\,s$. Assim:

$$v_y = -10(3) = -30\,m/s \quad (-108\,km/h)$$

O sinal negativo indica que o movimento é no sentido oposto ao da orientação do eixo $0y$. Para baixo, como era de se esperar.

Exercício resolvido 8.8:

Considere o caso em que a bola da Figura 8.17 escapa do tampo da mesa de uma altura $h = 1{,}8\,m$ do piso com velocidade horizontal $v_0 = 2\,m/s$. Determinar:

a) O tempo de queda;
b) As componentes x e y da velocidade no ponto de impacto;
c) O alcance.

Resolução

Primeiramente, vamos adotar um sistema de referência cartesiano e identificar as condições iniciais do movimento da bola. Consideraremos nula a resistência do ar e $g = 10\,m/s^2$.

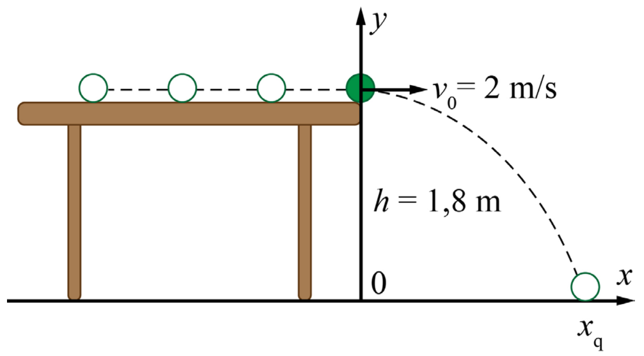

Figura 8.18: Lançamento horizontal com condições iniciais especificadas.

A Figura 8.18 ilustra a situação em que, no instante $t_0 = 0$, a bola escapa da mesa. As condições iniciais são:

$$v_{ox} = 2m/s$$
$$v_{0y} = 0$$
$$x_0 = 0$$
$$y_0 = h = 1{,}8m$$

Nesse caso, adotando-se o sistema SI, as equações horárias são:

$v_x = v_{0x} = 2m/s$ $x = 2t$	$v_y = -10t$ $y = 1{,}8 - 5t^2$

a) No instante $t = t_q$ a bola atinge o solo. Tal instante é determinado pela condição $y(t_q) = 0$. Igualando a zero a equação da coordenada y e considerando apenas a raiz positiva, obtemos:

$$0 = 1{,}8 - 5\left(t_q\right)^2 \rightarrow t_q = \sqrt{\frac{1{,}8}{5}} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6 \text{ s}$$

b) Para determinar as componentes x e y da velocidade, devemos substituir $t = t_q = 0{,}6\,s$ nas respectivas equações horárias. Obtemos:

$$v_x = 2m/s$$
$$v_y = -10(0{,}6) = -6m/s$$

O sinal negativo indica que o movimento é no sentido descendente, já que foi adotado o referencial no qual o eixo y é orientado para cima.

c) O alcance é a distância que a bola percorre na direção horizontal. Conhecendo-se as abscissas do ponto de queda e do ponto inicial, o alcance é dado pela diferença:

$$a = x_{queda} - x_0$$

A abscissa do ponto de queda é obtida substituindo-se $t = t_q = 0{,}6\,s$ na equação para a abscissa $x = 2t$. Assim, $x_q = 2(0{,}6) = 1{,}2\,m$. Portanto, como $x = 0$, o alcance assume o mesmo valor: $1{,}2\,m$.

Exercício resolvido 8.9:

Uma bola de futebol, em repouso no gramado a uma grande distância do gol, é chutada de forma a adquirir uma velocidade de lançamento $v_0 = 25\,m/s$ e ângulo de tiro $\theta = 37$. Considerando nula a influência do ar e a aceleração da gravidade $g = 10\,m/s^2$. Determine, a partir dos dados:

a) O alcance da bola;

b) A altura máxima que ela atinge.

Dados: $\cos 37^o = 0{,}80$ e $sen 37^o = 0{,}60$.

Resolução

Primeiramente, vamos adotar um referencial cartesiano com o eixo $0x$ horizontal acompanhando o gramado e o eixo $0y$ no ponto onde a bola se encontra em repouso (vide Figura 8.19).

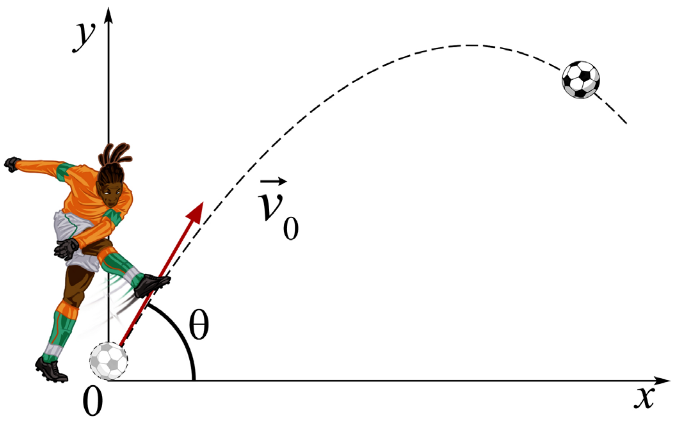

Figura 8.19: Lançamento a partir do solo.

Assim, as condições iniciais ($t_0 = 0$) e as equações fundamentais são:

$x_0 = 0$ $v_{0x} = 25\cos\theta = 25\times 0{,}8 = 20m/s$ $x(t) = 20t$	$y_0 = 0$ $v_{0y} = 25sen\theta = 25\times 0{,}6 = 15m/s$ $y(t) = 15t - 5t^2$ $v_y(t) = 15 - 10t$

Conhecidas as equações horárias, podemos responder facilmente aos quesitos solicitados.

a) Como nesse caso $x_0 = 0$, alcance é o valor de x para $t = t_q$. O tempo de queda é obtido impondo a condição $y(t_q) = 0$. Portanto:

$$0 = 15t_q - 5(t_q)^2$$

Donde inferimos que existem duas soluções, a saber: $t'_q = 0$ e $t''_q = 3s$.

A primeira raiz refere-se à posição da bola no instante $t_0 = 0$; a segunda é o tempo de queda, que estamos procurando. Assim, o alcance é:

$$x_q = 20t_q = 20(3) = 60m$$

b) No ponto de altura máxima ($y_{max} = h_{max}$), a componente da velocidade na direção $0x$ é nula. Assim, fazendo $v_y = 0$, determinamos t_m, ou seja,

$$0 = 15 - 10t_m \quad \Rightarrow \quad t_m = 1{,}5\ s$$

Substituindo esse valor do tempo na equação horária para $y(t)$, obtemos:

$$y_{max} = h_{max} = 15(1{,}5) - 5(1{,}5)^2 = 11{,}25m$$