05 – Cinemática Vetorial

Exercícios Resolvidos

Exercício resolvido 5.1

Determine o produto vetorial $\vec{V}=\vec{A}\times\vec{B}$, sendo $\vec{A}=10\vec{i}+40\vec{j}$ e $\vec{B}=30\vec{i}-50\vec{j}$ dois vetores pertencentes ao plano xy (pois as componentes z são nulas).

Resolução:

Por meio do determinante, temos:

$$\vec{V}=\vec{A}\times\vec{B}=\det\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 10 & 40 & 0\\ 30 & -50 & 0\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}40 & 0\\ -50 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\det\begin{vmatrix}10 & 0\\ 30 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\det\begin{vmatrix}10 & 40\\ 30 & -50\end{vmatrix}\vec{k}$$

Portanto,

$$\vec{V}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+\left(-500-1200\right)\vec{k}=-1700\vec{k}$$

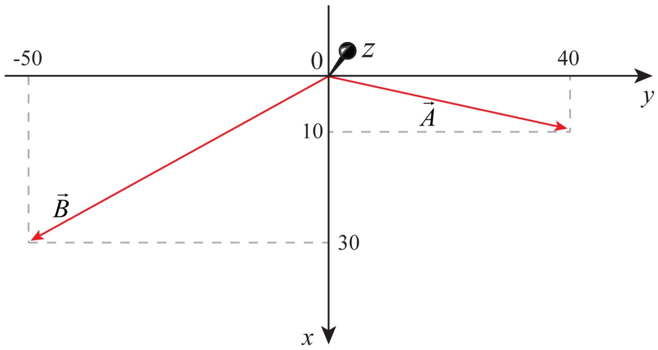

Figura 5.4: Vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ pertencentes ao plano xy. O eixo $0z$, nesse caso, está "saindo" do plano do papel e é perpendicular a ele.

O produto vetorial $\vec{V}=\vec{A}\times\vec{B}$ é ortogonal ao plano definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$; como eles estão contidos no plano xy, o vetor $\vec{V}$ tem a direção do eixo z. No caso, $\vec{V}=-1700\vec{k}$, ou seja, o seu módulo é 1 700 e o seu sentido, de acordo com o gráfico (Figura 5.4), é oposto ao sentido positivo do eixo $0z$ (portanto, "penetrando" na folha do papel).

Exercício resolvido 5.2

Dados os vetores $\vec{c}=5\vec{i}+6\vec{j}$ e $\vec{d}=8\vec{i}-5\vec{j}$, determine:
a) o produto escalar $\vec{c}\cdot\vec{d}$.
b) o ângulo θ entre $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

Resolução:

a) Efetuando a Multiplicação escalar dos vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$, tem-se:

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=\left(5\vec{i}+6\vec{j}\right)\cdot\left(8\vec{i}-5\vec{j}\right)$$
$$=5\vec{i}\cdot\left(8\vec{i}-5\vec{j}\right)+6\vec{j}\cdot\left(8\vec{i}-5\vec{j}\right)$$
$$=40\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+25\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+48\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)-30\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)$$

Mas, $\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)=\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)=1$, pois, além de $|i|=|j|$, o ângulo entre eles é 0° e cos0° = 1 $\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)=\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)=0$, pois o ângulo entre eles é 90° e cos90° = 0.

Portanto:

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=40\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+25\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+48\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)-30\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)=40\cdot1+25\cdot0+48\cdot0-30\cdot1=10$$
$$\vec{c}\cdot\vec{d}=10$$

b) Da definição de produto escalar

$$\vec{c}\bullet\vec{d}=c\cdot d\cos\theta$$

Segue que o ângulo entre dois vetores é dado pela expressão:

$$\cos\theta=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{c\cdot d}$$

De acordo com os dados do problema, temos $c=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ e que $d=\sqrt{8^2+(-5)^2}=\sqrt{89}$.

Donde obtemos, finalmente:

$$\cos\theta=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{c\cdot d}=\frac{10}{\left(\sqrt{61}\right)\left(\sqrt{89}\right)}=0{,}136\rightarrow\theta=\ \arccos(0{,}136)=82{,}2°$$

Exercício resolvido 5.3

Uma partícula em movimento num referencial cartesiano ocupa posições P(x, y, z) com $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. No caso em que as coordenadas variem com o tempo (em unidades do SI) de acordo com as expressões:

$$x(t)=t^2$$
$$y(t)=10-2t^2$$
$$z(t)=0$$

Determine:

a) vetor posição da partícula em função do tempo;

b) as posições e os vetores posições nos instantes t = 0,1, 2 e 3 s;

c) equação da trajetória da partícula.

d) o vetor velocidade a qualquer tempo

e) o módulo da velocidade no instante t = 0.

Resolução:

a) O vetor posição mais geral possível, é dado por

$$\vec{r}(t)\ =\ \left[x(t)\right]\vec{i}+\left[y(t)\right]\vec{j}+\left[z(t)\right]\vec{k}$$

Substituindo as coordenadas em função do tempo, obtemos:

$$\vec{r}(t)\ =\ [t^2]\vec{i}\ +\ [10\ -\ 2t^2]\vec{j}$$

Como $z(t)$ = 0, a partícula move-se no plano xy.

b) A tabela mostra os vetores posições e as posições P(x, y, z) para os instantes dados:

t	Vetor posição	Posição P
0	$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 10\vec{j} + 0\vec{k}$	$P_0(0, 10, 0)$
1	$\vec{r}(1) = 1\vec{i} + 8\vec{j} + 0\vec{k}$	$P_1(1, 8, 0)$
2	$\vec{r}(2) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$	$P_2(4, 2, 0)$
3	$\vec{r}(3) = 9\vec{i} - 8\vec{j} + 0\vec{k}$	$P_3(9, -8, 0)$

O gráfico abaixo esquematiza a trajetória num referencial cartesiano plano.

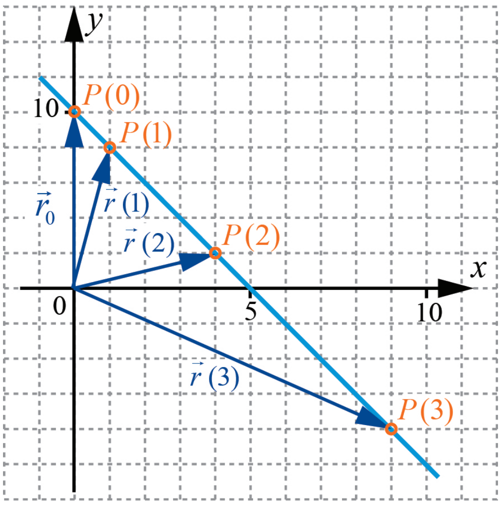

Figura 5.10: Vetor posição em diferentes instantes de tempo. O segmento em azul representa a trajetória da partícula.

Ele mostra que os pontos P que a partícula ocupa pertencem a uma reta, ou seja, que a trajetória da partícula é retilínea.

c) Nesse caso (movimento no plano), a equação da trajetória pode ser obtida eliminando-se o parâmetro "t" das equações $x = t^2$ e $y = 10 - 2t^2$. Como $t^2 = x$, substituindo-o em y temos:

$$y = 10 - 2(x),$$

que é a equação de uma reta no plano xy (Segmento em azul na Figura 5.10).

d) O vetor velocidade é obtido tomando-se a derivada de primeira ordem do vetor posição em relação ao tempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt}\vec{i} + \frac{d(10 - 2t^2)}{dt}\vec{j}$$

Portanto,

$$\vec{v}(t) = 2t\vec{i} + (-4t)\vec{j} = 2t\vec{i} - 4t\vec{j}$$

e) módulo do vetor velocidade instantânea

O módulo de um vetor cujas componentes sejam Vx, Vy e Vz pode ser determinado pela expressão: $V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2}$.

No caso em tela, $Vx = 2t$, $Vy = -4t$ e $Vz = 0$; logo,

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (-4t)^2}$$

Portanto,

$$V(t) = \left(\sqrt{20}\right)t \quad (s;\ m/s)$$

Donde se infere que para t = 0, a velocidade é v = 0.

Exercício resolvido 5.4

As expressões cartesianas dos vetores da base são dadas em 5.19. Notamos que os vetores da base polar ($\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$) são perpendiculares entre si. Com o movimento da partícula, o ângulo θ muda com o tempo. O mesmo ocorre com os vetores de base polares. Apesar de terem módulo igual a 1, as suas direções variam com o tempo, pois $\varphi = \varphi(t)$.

a) Mostre que

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\,.$$

b) E que

$$\frac{d\left(\vec{e}_\varphi\right)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho\,.$$

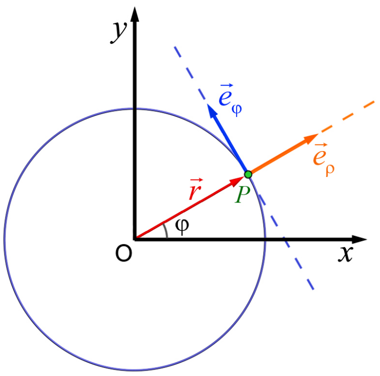

Figura 5.12: Vetores da base $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$ num ponto *P* do plano. Um deles é tangente a uma circunferência que passa pelo ponto *P*, enquanto que o outro é perpendicular a essa circunferência.

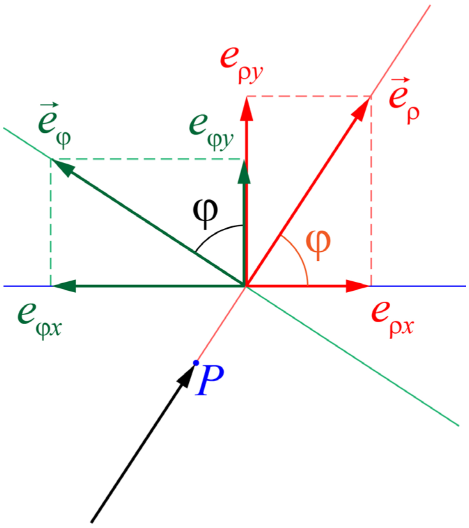

Figura 5.13: Projeções cartesianas dos vetores da base. O ângulo φ é uma das coordenadas esféricas.

Resolução:

Os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são constantes em relação ao tempo: $\dfrac{d\vec{i}}{dt} = \dfrac{d\vec{j}}{dt} = 0\,.$

O argumento das funções cosφ e senφ varia com o tempo; logo, as suas derivadas em relação ao tempo são expressas como o produto da derivada da função pela derivada do argumento. Assim,

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d(\cos\varphi)}{dt}\vec{i} + \frac{d(\operatorname{sen}\varphi)}{dt}\vec{j} = \frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\vec{i} + \frac{d(\operatorname{sen}\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\vec{j} =$$

$$\left[-\operatorname{sen}\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right]\vec{i} + \left[\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right]\vec{j} = \frac{d\varphi}{dt}\left[-\operatorname{sen}\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right]$$

O fator entre colchetes é a expressão cartesiana de $\vec{e}_\varphi$. Portanto, conclui-se que,

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Consideremos agora a derivada do versor $\vec{e}_\varphi$ em relação ao tempo. Com base na expressão 5.19 e lembrando que os versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são constantes no tempo, deduzimos que

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d(\operatorname{sen}\varphi)}{dt}\vec{i} + \frac{d(\cos\varphi)}{dt}\vec{j} = \frac{d\varphi}{dt}\left(-\cos\varphi\vec{i} - \operatorname{sen}\varphi\vec{j}\right)$$

O último termo, de acordo com 5.19, é $-\vec{e}_\rho$. Portanto,

$$\frac{d(\vec{e}_\varphi)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho$$

O vetor velocidade é sempre dado pela taxa com que o vetor posição muda com o tempo. Derivando a expressão: $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho$ com relação ao tempo e utilizando a regra da cadeia para a derivada do produto de funções, temos:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \qquad 5.34$$

Derivando $\vec{e}_\rho$ com relação ao tempo, utilizando o resultado do exemplo 06 e a expressão 5.34, vemos que:

$$\boxed{\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi} \qquad 5.35$$

Assim, as componentes do vetor velocidade em coordenadas polares são:

$$\boxed{v_\rho = \frac{d\rho}{dt} \qquad v_\varphi = \rho\frac{d\varphi}{dt}} \qquad 5.36$$

As expressões 5.36 ilustram, quando comparadas a 5.25, o fato de que vetores como a velocidade podem ter diferentes coordenadas em diferentes referenciais.

Exercício resolvido 5.5

O movimento de uma partícula é descrito, em coordenadas polares, pelas expressões:

$$\rho = 2 + \cos\varphi$$
$$\varphi = \pi.t$$

em unidades do SI. A partir dos dados acima, determine:

a) O vetor posição em coordenadas polares.

b) A velocidade em coordenadas polares.

c) Quais as componentes polares da velocidade?

Resolução:

a) Vetor posição
Como $\rho = 2 + \cos\varphi$ e $\varphi = \pi.t$, obtemos $\vec{r} = (2 + \cos \pi t)\vec{e}_\rho$.

b) Vetor velocidade em coordenadas polares.

Por definição a velocidade é dada por:

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\left[(2+\cos \pi t)\vec{e}_\rho\right] = \left[\frac{d}{dt}(2+\cos \pi t)\right]\vec{e}_\rho + (2+\cos \pi t)\frac{d}{dt}\left[\vec{e}_\rho\right]$$

Efetuando as derivadas e utilizando o resultado do Exemplo 06, e lembrando que $\varphi = \pi.t$, tem-se que

$$\vec{V} = (-\pi \operatorname{sen} \pi t)\vec{e}_\rho + (2\pi + \pi \cos \pi t)\vec{e}_\varphi$$

c) Componentes polares
De acordo com a definição das componentes polares, e da expressão acima, resulta que:

$$V_\rho = -\pi \operatorname{sen} \pi t$$
$$V_\varphi = 2\pi + \pi \cos \pi t$$

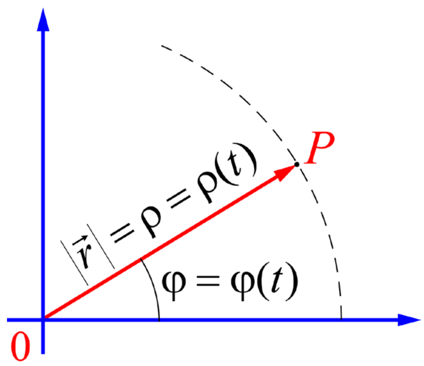

Figura 5.14: As coordenadas polares, bem como os vetores da base, variam com o tempo durante o movimento.

Exercício resolvido 5.6

Um satélite geoestacionário tem órbita circular de raio R concêntrica ao globo terrestre e tem período igual ao da Terra, ou seja, completa uma volta no plano que contém o equador terrestre em 24 horas.

Adotando um sistema de coordenadas polares (ρ, φ) e considerando $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ é a velocidade angular do satélite, determinar (em coordenadas polares):

a) O vetor posição $\vec{r}$
b) A velocidade $\vec{V}$
c) A aceleração $\vec{a}$

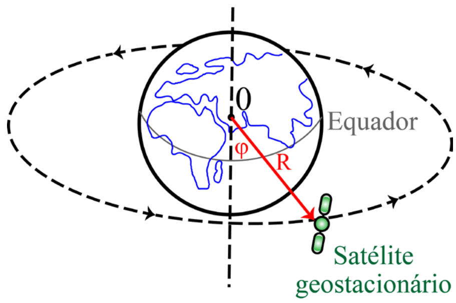

Figura 5.16: Uso do referencial polar na descrição de movimentos circulares adotando a origem do referencial de tal forma a fazê-lo coincidir com o centro da Terra.

Resolução:

O esquema da Figura 5.16 representa o movimento circular do satélite geoestacionário e as coordenadas polares. Na Figura 5.17 apresentamos o referencial polar, constituído de dois vetores característicos desse referencial.

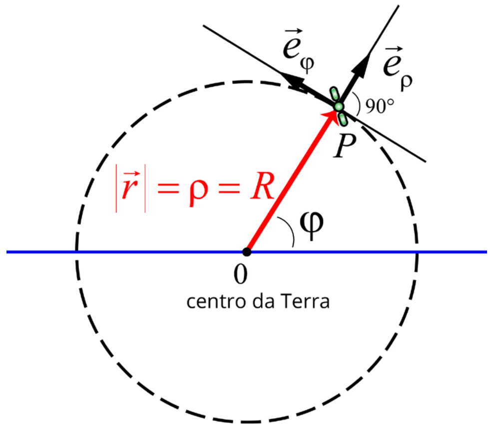

Figura 5.17: Referencial polar: definido pelas coordenadas polares e pelos vetores da base.

a) Para um movimento circular, de raio fixo ($\rho = R$), o vetor posição é dado por:

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho = R\vec{e}_\rho$$

Observe que $\vec{r}$ varia com o tempo, uma vez que o vetor da base $\vec{e}_\rho$ muda de direção no decorrer do movimento.

b) A velocidade é a taxa de variação instantânea do vetor posição. Portanto,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\vec{e}_\rho\right) = \frac{d(R)}{dt}\vec{e}_\rho + R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = 0 + R\cdot\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Como, nesse caso, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, obtemos que a velocidade é dada por:

$$\vec{v} = (\omega R)\vec{e}_\varphi$$

Por definição, o vetor da base $\vec{e}_\varphi$ é tangencial à órbita. O módulo de $\vec{V}$ é $V = \omega R$ sendo, portanto, constante, pois ω e R são invariáveis para o satélite geoestacionário.

c) A aceleração vetorial é a taxa de variação instantânea da velocidade:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\omega R\vec{e}_\varphi\right) = (\omega R)\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_\varphi\right) = (\omega R)\left[-\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho\right] = -\omega^2 R\vec{e}_\rho$$

Portanto, no movimento circular, a aceleração vetorial é dada por:

$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{e}_\rho\,.$$

Logo, o módulo da aceleração é $a = \omega^2 R$; sua direção é radial, ou seja, da reta que passa pelo centro da Terra e pelo satélite, e a aceleração é um vetor dirigido para o centro da órbita circular. Por isso, essa aceleração é também denominada aceleração centrípeta.