# 04 – Grandezas Escalares e Vetoriais

## Exercícios Resolvidos

### Exercício resolvido 4.1

O vetor $\vec{A}$ tem módulo igual a $A$ = 100 unidades e encontra-se no 2º quadrante do sistema de referência cartesiano plano, fazendo um ângulo de $\varphi = 37°$ com o eixo $0y$, conforme Figura 4.6.

Quais são as componentes $A_x$ e $A_y$ de $\vec{A}$?

#### Resolução:

A componente $A_x$ encontra-se no lado negativo do eixo 0x e deve, assim, receber sinal negativo. Isto pode ser feito automaticamente se medirmos o ângulo $\theta$, como é costume fazer na trigonometria, a partir do eixo $0x$ positivo e no sentido anti-horário.

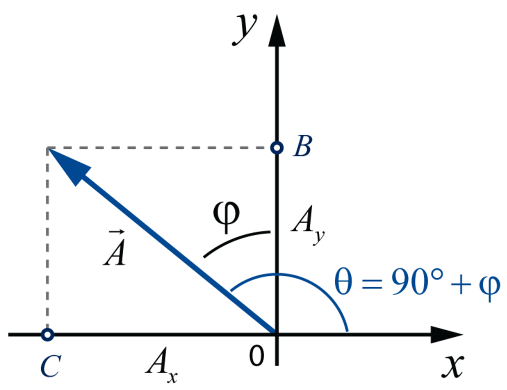


Figura 4.6: Componentes de um vetor.

Assim, nesse caso, $\theta = 90° + \varphi = 90° + 37° = 127°$. As projeções serão:

$$A_x = 100\cos(127°) = 100(-0,6) = -60 \text{ unidades.}$$

$$A_y = 100 sen(127°) = 100(0,8) = +80 \text{ unidades.}$$

### Exercício resolvido 4.2

As componentes de um vetor $\vec{D}$ num determinado referencial cartesiano são $D_x$ = 300 unidades e $D_y$ = –400 unidades. Determinar o módulo do vetor $\vec{D}$ e o ângulo que ele forma com o eixo $x$.

#### Resolução:

Conforme visto no Exemplo 1, as componentes $x$ e $y$ de um vetor correspondem aos catetos de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o módulo do vetor. Assim, aplicando-se o Teorema de Pitágoras, temos:

$$D^2 = (D_x)^2 + (D_y)^2$$

Substituindo-se os valores conhecidos, temos:

$$D = \pm\sqrt{300^2 + (-400)^2} = \pm 500 \text{ unidades}$$

Como se trata do vetor (não de componentes), o resultado é $D$ = 500 unidades. Resta agora determinar o ângulo θ que o vetor faz com o eixo 0$x$. De 4.3 segue-se que $\tan\theta = D_y / D_x = -400/300 = -1{,}33$.

Utilizando-se uma tabela trigonométrica (ou uma máquina de calcular científica), determina-se que $\arctan(-1{,}33) = \varphi = -53^\circ$ ou $307^\circ$.

Não se trata de dois ângulos diferentes: é o mesmo ângulo, porém, medido a partir do eixo 0x no sentido anti-horário (307°) ou medido no sentido horário (−53°).

Portanto, $\vec{D}$ é um vetor de módulo $D$ = 500 unidades, fazendo com o eixo 0$x$ um ângulo $\varphi = 307°$.

## Exercício resolvido 4.3

Duas forças, representadas pelos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, solicitam um pitão preso numa parede vertical. Seus módulos e direções em relação à horizontal estão indicados na Figura 4.13. Determine o vetor resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ quando θ = 30°.

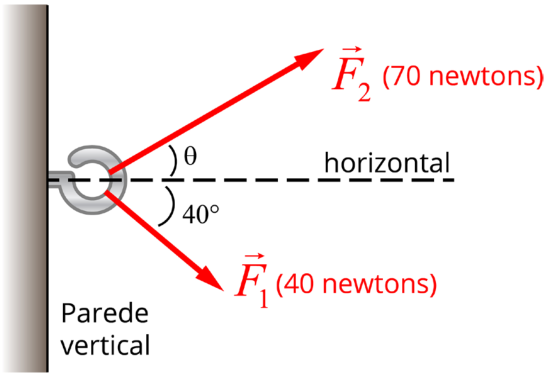


Figura 4.13: Duas forças agindo sobre um pitão.

### Resolução:

A resultante pode ser obtida pela Regra do Paralelogramo. E este é obtido desenhando-se os vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ a partir de uma origem comum, levando em conta o ângulo φ = 40° + 30° = 70° entre os vetores.

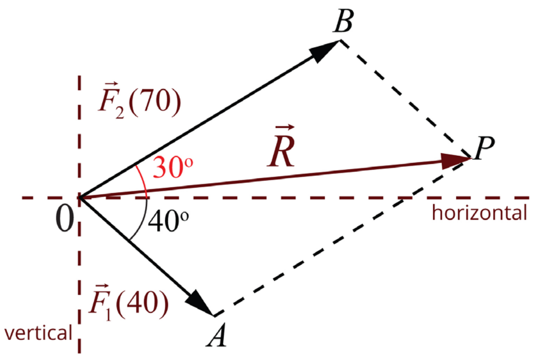


Figura 4.14: Vetor resultante de acordo com a Regra do Paralelogramo.

• Determinação do módulo de $\vec{R}$:

Pela Regra do Paralelogramo:

$$R^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + 2(F_1)(F_2)\cos\varphi =$$
$$= 40^2 + 70^2 + 2(40)(70)\cos 70^\circ$$

Como $\cos 70°$ = 0,342 obtemos: $R$ = 91,7 newtons.

Determinação da direção de $\vec{R}$ em relação à de $\vec{F}_1$:
Considere o triângulo em verde da Figura 4.15; de acordo com a Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen}\beta}{\text{AP}} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{OA}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{OP}}$$

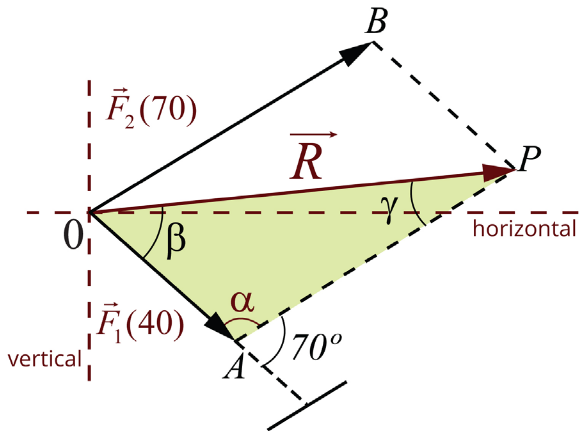


Figura 4.15: Força resultante sobre o pitão.

Sendo $AP = F_2$, $OA = F_1$ e $OP = R$, temos:

$$\frac{\text{sen}\beta}{F_2} = \frac{\text{sen}\gamma}{F_1} = \frac{\text{sen}\alpha}{R}$$

Como α = 110° (180° − 70°), o ângulo β é assim determinado:

$$\frac{\text{sen}\beta}{F_2} = \frac{\text{sen}\alpha}{R} \rightarrow \text{sen}\beta = \frac{F_2 \,\text{sen}\,\alpha}{R} = 0,717 \therefore \beta = 45,8°$$

Portanto, o vetor resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ é um vetor de módulo R = 91,7 N, que faz com $\vec{F}_1$ um ângulo β = 45,8°. Como $\vec{F}_1$ faz um ângulo de 40° com a horizontal, a resultante $\vec{R}$ faz um ângulo de 5,8° com a horizontal (acima da horizontal).

## Exercício resolvido 4.4

Considere o sistema de forças atuando no pitão de acordo com o exercício resolvido 4.3. Determinar a resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ pelo método das componentes cartesianas.

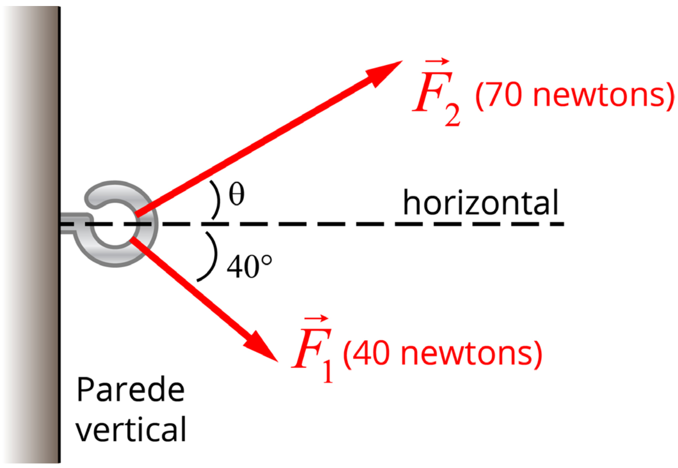


Figura 4.16: Esquema das duas forças agindo sobre o pitão.

## Resolução:

Transportemos o sistema de forças para um referencial cartesiano no plano que contenha as duas forças.

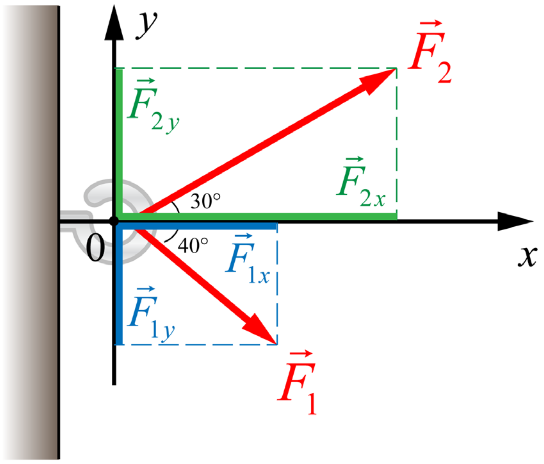


Figura 4.17: Componentes de $\vec{F}_2$ em verde e as de $\vec{F}_1$ em azul.

No esquema da Figura 4.17 temos as componentes de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ nas direções $0x$ e $0y$. Os seus valores algébricos constam da tabela a seguir:

| Vetor | Módulo | $\varphi$ | $F_x = F.\cos\varphi$ | $F_y = F.\text{sen}\,\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{F}_1$ | 40 | 320° (ou −40°) | 30,6 | −25,7 |
| $\vec{F}_2$ | 70 | 30° | 60,6 | 35 |

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 30,6 + 34,6 = 91,2 \text{ newtons}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = (-25,7) + 35 = 9,3 \text{ newtons}$$

Conhecidas as componentes de $\vec{R}$, podemos determinar o seu módulo e o ângulo $\theta_{\vec{R}}$ que a resultante faz com o eixo $0x$. Para o módulo, temos:

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(91,2)^2 + (9,3)^2} = 91,7 \text{ newtons}$$

A direção e o sentido de $\vec{R}$ são identificados pelo ângulo $\theta_{\vec{R}}$, sempre medido do eixo $0x$ até o vetor. Enquanto que a direção é dada pelo ângulo $\theta_{\vec{R}}$, tal que:

$$\tan\theta_{\vec{R}} = R_y / R_x = 9,3/91,2 = 0,102 \rightarrow \theta_{\vec{R}} = \arctan(0,102) = 5,8° \,.$$

A figura (4.18) ilustra a resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, a força única cuja ação equivale à ação conjunta e simultânea de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. O módulo e a direção do vetor resultante são também indicados nessa figura.

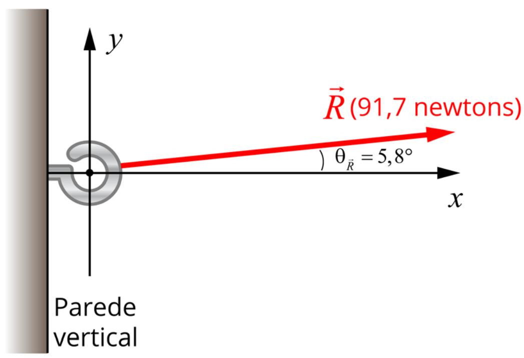


Figura 4.18 O módulo e a direção do vetor resultante da soma de duas forças.

## Exercício resolvido 4.5

Considere os vetores $\vec{F}_1$ (módulo de 100 newtons); $\vec{F}_2$ (módulo de 140 newtons) e $\vec{F}_3$ (módulo de 80 newtons), que representam 3 forças agindo sobre uma partícula, conforme ilustrado na Figura 4.21. Use as aproximações: $sen(53°) = 0,80$ e $\cos(53°) = 0,60$.

a) Usando o método das componentes cartesianas, determine $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

b) Quais os atributos de um vetor $\vec{F}_4$ que, ao ser somado aos outros vetores, tenha como efeito produzir uma resultante nula?

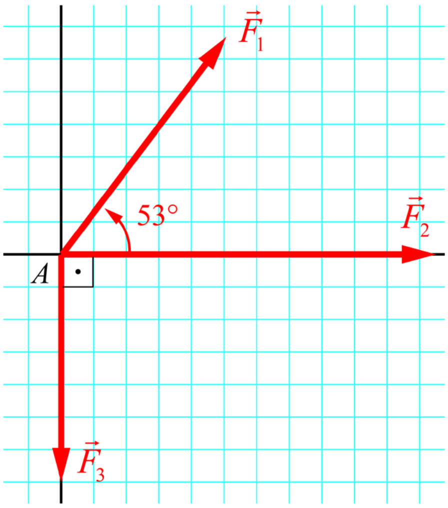


Figura 4.21: Três forças e um referencial conveniente.

### Resolução:

a) Primeiramente, é necessário determinar as componentes cartesianas de cada vetor. Veja a tabela a seguir, onde θ é o ângulo (medido do eixo 0*x* até o vetor) que situa o vetor no referencial cartesiano 0*xy*.

| Vetor | Módulo do vetor | θ | $F_x = F.\cos\varphi$ | $F_y = F.\text{sen}\,\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{F}_1$ | 100 newtons | 53° | +60 | +80 |
| $\vec{F}_2$ | 140 newtons | 0 | +140 | 0 |
| $\vec{F}_3$ | 80 newtons | 270° | 0 | −80 |

$$R_x = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}) = (+60 + 140 + 0) = +200 \text{ newtons}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}) = (+80 + 0 - 80) = 0$$

$$\therefore \quad R^2 = R^2_{\ x} + R^2_{\ y} \rightarrow R = \sqrt{(200^2 + 0^2)} = 200 \text{ newtons; sentido positivo do eixo } 0x.$$

b) A solução consiste em encontrar o vetor $\vec{F}_4$ de modo que:

$$\vec{F}_4 + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = 0$$

Mas $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{R}$; logo, podemos escrever: $\vec{F}_4 + \vec{R} = 0 \rightarrow \vec{F}_4 = -\vec{R}$; isto significa que o vetor $\vec{F}_4$ é oposto ao vetor $\vec{R}$, porém, com módulo igual, ou seja, $|\vec{F}_4| = |\vec{R}|$. Sendo $R$ = 200 newtons e sentido coincidente com o sentido positivo do eixo 0*x*, o vetor $\vec{F}_4$ terá módulo $F_4 = R$ = 200 newtons, sentido negativo do eixo 0*x*.

## Exercício resolvido 4.6

Uma força $\vec{F}$ (módulo de 150 Newtons) atua sobre uma partícula de tal sorte que o vetor deslocamento da partícula ($\vec{d}$), quando esta se desloca entre dois pontos A e B , tem módulo $2\,m$. Esse vetor deslocamento mantém o ângulo constante (θ = 120°) com a força ao longo de todo o deslocamento.

a) Calcule o trabalho ($W$) realizado pela força, sabendo-se que o trabalho é definido pelo produto escalar.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

b) Quando o produto escalar será nulo?

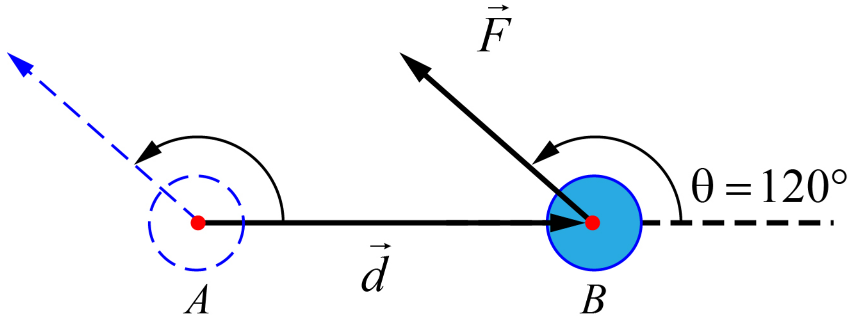


Figura 4.23: Trabalho de uma força quando a partícula se desloca do ponto A até um ponto B. O módulo do vetor deslocamento é igual à distância entre eles.

### Resolução:

a) Trabalho realizado pela força.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right| \cos\theta = (150\ newtons).(2m).(-0,5) = -150(newtons)(m)$$

b) $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right| \cos\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 0$, ou seja, θ = 90°.

Se o ângulo entre os dois vetores for um ângulo reto (90°), o produto escalar será nulo. Dizemos que os dois vetores são ortogonais entre si.