03 – Movimento: conceitos cinemáticos

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 3.1

Um motorista dirigindo o seu carro pela SP - 330 (Via Anhanguera) rumo ao interior do estado, às 11h cruza o marco *km* 42; e às 14h30 min ele estaciona o carro no marco *km* 315. Calcule a velocidade escalar média do carro.

Resolução:

A velocidade média é a taxa de média da variação do espaço percorrido em relação ao intervalo de tempo. Daí obtemos, nesse caso:

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{(315-42)\ km}{(14{,}5-11)\ h} = \frac{273\ km}{3{,}5\ h} = 78\ km/h$$

No SI a unidade de medida de espaço (comprimento) é o metro (m) e a do tempo é o segundo (s); assim, a unid $(\bar{v}) = m/s$. Neste exemplo: $(\bar{v}) = 78 km/h$. Essa velocidade pode ser expressa em m/s. Para isso, é necessário transformar $km \rightarrow m$ e $h \rightarrow s$:

$$\bar{v} = 78\ km/h = 78 \times \frac{1000\ m}{3600\ s} = [78/3{,}6]\ m/s \cong 21{,}7\ m/s$$

Observação: a velocidade média NÃO É a média das velocidades registradas pelo velocímetro do carro.

Exercício Resolvido 3.2

Ainda considerando os dados do Exemplo 2, na viagem de volta o tempo de retorno foi de 4 horas e 12 minutos. Calcule a velocidade escalar média no retorno.

Resolução:

Considerando a origem dos espaços na praça da Sé, os espaços coincidem com os marcos dos quilômetros da rodovia (origem no centro da cidade de São Paulo e crescente no sentido do interior do estado).

No retorno teremos:

- Δt = variação do tempo = $4\,h$ e $12\,min$ = $4{,}2\,h$.
- ΔS = variação do espaço = $(42 - 315)\,km = -273\,km$

Como se vê, dependendo do sentido do movimento em relação ao referencial adotado, a variação dos espaços ΔS pode ser negativa.

- $\Delta S > 0 \rightarrow$ Movimento progressivo $\rightarrow$ Movimento no sentido crescente dos espaços.
- $\Delta S < 0 \rightarrow$ Movimento retrógrado $\rightarrow$ Movimento no sentido decrescente dos espaços.

Portanto, no retorno, $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{-273\ km}{4,2\ h} = -65\ km/h$.

O sinal negativo não significa que o velocímetro se movimentou no sentido oposto, nem que o carro deu marcha ré. Trata-se de uma convenção matemática inerente à escolha da origem do referencial. $\Delta S < 0$ ou seja: $\bar{v} < 0 \rightarrow$ O movimento foi retrógrado.

Exercício Resolvido 3.3

Numa competição de Motocross concentramos nossa atenção em duas motos, designadas por A e B. Num determinado instante de tempo, o instante inicial (o qual adotamos como $t = 0$), constatamos que a moto A se encontra num ponto cuja coordenada espaço é $S_A = 20m$ e com velocidade escalar de $4\,m/s$. No mesmo instante, a moto B atinge um ponto cuja coordenada é $S_B = -20m$ e tem velocidade de $8\,m/s$.

Admitindo-se que as motos mantenham as suas velocidades instantâneas iguais àquelas do instante de tempo inicial, determine:

a) As equações horárias das posições de cada moto.

b) A distância entre as duas motos nos instantes $t = 2s$ e $t = 12s$.

c) A posição (e o respectivo instante de tempo) na qual a moto B ultrapassa a moto A. Indicar essa situação num gráfico cartesiano.

Resolução:

a) Equações horárias

Considerando-se que a velocidade escalar não muda com o tempo, as equações dos espaços para cada um dos móveis é uma função polinomial de grau um em relação ao tempo. Escrevemos, nesse caso:

$$S_A(t) = 20 + 4t$$
$$S_B(t) = -20 + 8t$$

b) A distância nos instantes $t = 2s$ e $t = 12s$.

De acordo com a expressão 3.2, a distância entre as duas motos como função de tempo será dada por:

$$d(t) = |S_B(t) - S_A(t)| = |-20 + 8t - (20 + 4t)| = |-40 + 4t|$$

Donde obtemos, para o instante de tempo $t = 2s$:

$$d(t=2) = |S_B(t=2) - S_A(t=2)| = |-40 + 4(2)| = |-32| = 32$$

Da expressão acima, concluímos que a distância entre elas é de 32 m. Para $t = 12s$, obtemos:

$$d(t=12) = |S_B(t=12) - S_A(t=12)| = |-40 + 4(12)| = |8| = 8$$

ou seja, nesse instante a distância é de 8 metros, com a moto B à frente da moto A.

c) Instante da ultrapassagem.

O momento da ultrapassagem ocorre quando os espaços das motos se igualam. Escrevemos assim:

$$S_B(t) = S_A(t)$$

o que nos leva à igualdade:

$$20 + 4t = -20 + 8t$$

Essa igualdade é válida para $t = 10s$. Assim, para instantes anteriores a 10 segundos ($t < 10s$), a moto A estará à frente da moto B, ao passo que, para instantes de tempo superiores a esse instante, a moto B estará à frente da moto A.

Essa análise é facilitada mediante o uso dos gráficos dos espaços de cada moto. Para tanto, veja o Gráfico 3.6.

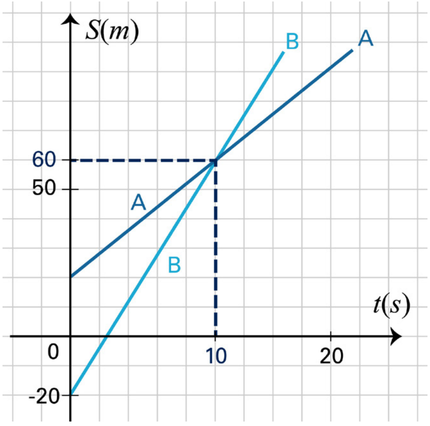

Gráfico 3.6: Gráfico dos espaços como função do tempo e o momento da ultrapassagem.

Exercício Resolvido 3.4

O movimento de uma partícula ao longo de uma curva predeterminada é regido pela seguinte equação horária:

$$S = 5 - 10t + t^2$$

Adotando-se as unidades do SI, e a partir desse dado:

a) Determine a equação horária da velocidade.

b) A partir do item anterior, determine a equação horária da aceleração.

c) Esboce os gráficos cartesianos da posição e da velocidade.

Resolução:

a) Velocidade Instantânea

A velocidade instantânea, ou velocidade num determinado instante de tempo, é a taxa de variação instantânea da coordenada espaço. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5 - 10t + 2t^2\right) = \frac{d}{dt}(5) + \frac{d}{dt}(-10t) + \frac{d}{dt}\left(2t^2\right) \\ &= 0 + (-10) + 4t = -10 + 4t \end{aligned}$$

Donde inferimos que:

$$v(t) = 4t - 10$$

b) A aceleração instantânea é obtida como a derivada da velocidade escalar. Obtemos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-10 + 4t) = \frac{d}{dt}(-10) + \frac{d}{dt}(4t) = 0 + 4$$

Portanto, no SI, a aceleração da partícula é constante e dada por:

$$a = 4m/s^2$$

c) Gráficos de $S = S(t)$ e $v = v(t)$.

Os Gráficos 3.6 e 3.7 ilustram melhor a dependência da coordenada espaço e da velocidade escalar em relação ao tempo.

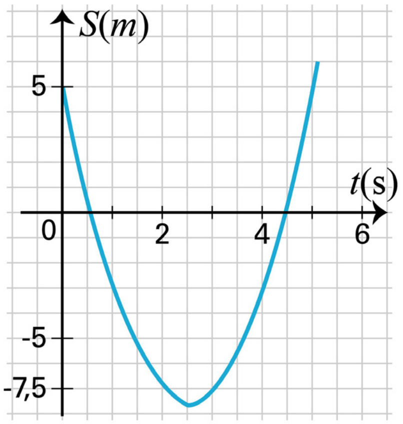

Gráfico $s = f(t)$

Gráfico 3.6: Coordenada espaço da partícula.

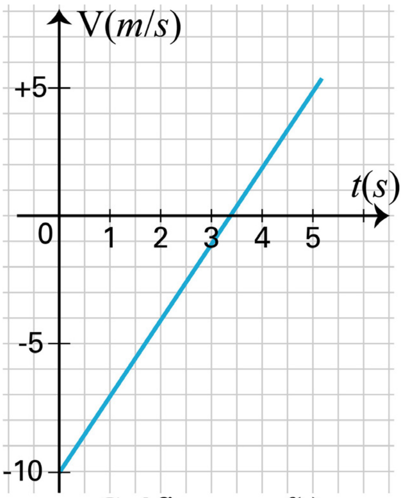

Gráfico $v = f(t)$

Gráfico 3.7: Velocidade da partícula.

O gráfico do espaço é uma parábola, pois $S = 5 - 10t + 2t^2$ é uma função polinomial de grau dois em relação ao tempo t. A sua derivada em relação ao tempo resulta uma polinomial de grau um (função afim). Nesse caso, a aceleração do movimento é constante ($a = 4\,m/s$).

Exercício Resolvido 3.5

Quando o movimento for retilíneo, utilizamos apenas uma coordenada cartesiana para descrevê-lo. Se uma partícula se move ao longo do eixo y, a equação horária é da forma

$$y = y(t)$$

Considere uma partícula movendo-se na direção vertical, em movimento retilíneo, de tal forma que a equação horária é dada por:

$$y = t^3 - 7{,}5t^2 + 12t$$

Considerando-se todos os dados no sistema SI, determine o intervalo de tempo para o qual o movimento é retrógrado.

Resolução:

O movimento é retrógado naqueles intervalos de tempo para os quais a velocidade escalar do móvel é negativa. Nessas circunstâncias, a coordenada espaço decrescerá em tempo.

Consideramos primeiramente a velocidade como função de tempo. Ela pode ser obtida a partir da derivada do espaço como função do tempo.

Nesse caso específico obtemos:

$$v_y \equiv \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 7{,}5t^2 + 12t\right) = 3t^2 - 15t + 12$$

A condição $v_y(t) < 0$, válida para os intervalos de tempo nos quais a coordenada decresce (movimento retrógrado), leva-nos à inequação:

$$3t^2 - 15t + 12 < 0$$

Nos instantes para os quais a velocidade é positiva, válida para os instantes nos quais a coordenada cresce com o tempo (movimento), são aqueles que satisfazem a inequação:

$$3t^2 - 15t + 12 > 0$$

Assim, para determinar os tempos para os quais a velocidade muda de sinal (onde a partícula "para" instantaneamente), devemos encontrar as raízes da equação

$$3t^2 - 15t + 12 = 0$$

As raízes dessa função são os tempos

$$t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(3)(12)}}{2(3)} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{15 \pm 9}{6}$$

cujos valores são $t' = 1s$ *e* $t'' = 4s$. Para valores de t nesse intervalo o movimento é retrógrado, pois nesse intervalo a velocidade do móvel é negativa.

O Gráfico 3.9 fornece a velocidade. Nele indicamos os pontos nos quais o gráfico da função $v = 3t^2 - 15t + 12$ (que é uma parábola) cruza o eixo da variável independente t.

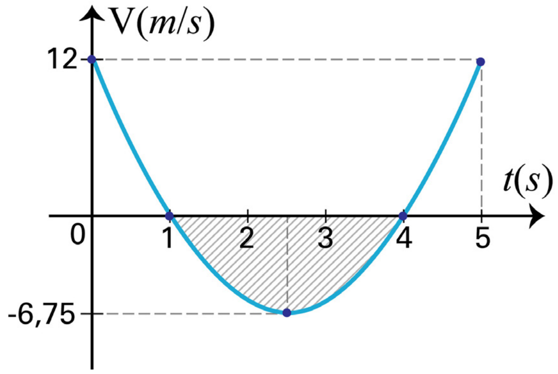

Gráfico 3.9: A parte hachurada do gráfico mostra o intervalo no qual a velocidade é negativa e o movimento, retrógrado.

Exercício Resolvido 3.6

Uma esfera é abandonada do topo de um plano inclinado (o ponto A da Figura 3.16) e constatamos que depois de $0{,}6\,s$ ela atinge a parte mais baixa desse plano (o ponto B indicado na Figura 3.16).

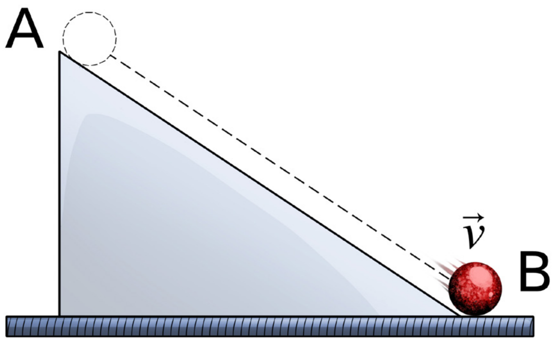

Figura 3.16: Esfera rolando em um plano inclinado.

Constata-se que o movimento da esfera é uniformemente variado (ou seja, tem aceleração constante). Se AB = 0,72 m, determine:

a) a aceleração da esfera.

b) a velocidade com que a esfera atinge B.

Resolução:

Num movimento uniformemente variado a equação horária da coordenada espaço é, genericamente, $S = S_0 + v_0 t + \left(at^2\right)/2$, onde S_0 e v_0 se referem ao espaço e à velocidade no instante $t = 0$.Vamos considerar a origem dos espaços coindidindo com o ponto A, no qual a esfera é solta (em repouso), no instante $t = 0$. De acordo com esses dados, S_0 e v_0 são nulos. Logo, a equação horária do espaço do movimento da esfera plano abaixo é bem simples:

$$S = \frac{at^2}{2}$$

Sabemos que para $t = 0{,}6s$ a esfera atinge o ponto B que se situa a 0,72 m de A. Logo,

$$a/2 = S/t^2 = 0,72m/\left(0,6s\right)^2 = 0,72m/0,36s^2 = 2m/s^2$$

Donde inferimos que a aceleração é dada por $a = 4\,m/s^2$.

A derivada, em relação ao tempo, da equação horária do espaço, é a velocidade, ou seja,

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{at^2}{2}\right) = at$$

como $a = 4\,m/s^2$, inferimos que

$$v = 4t.$$

Como a esfera atinge o ponto B no instante $t_B = 0{,}6s$, concluímos que sua velocidade nesse ponto é:

$$v_B = 4\left(0,6\right) = 2,4m/s$$