

01 – Referenciais e Coordenadas Cartesianas

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 1.1

Considere um quadrado ABCD e um referencial cartesiano no plano (x, y) como ilustrado na Figura 1.13. Cada quadrado que subdivide o plano tem dimensões $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ (Figura 1.13). Cada lado do quadrado ABCD tem, portanto, 120 cm .

a) Escreva, em notação cartesiana, a posição de cada vértice do quadrado, do ponto E (centro do quadrado) e da origem O do referencial.

b) Quais seriam as novas coordenadas dos pontos mencionados no item (a) após a origem do sistema de referência ser transladada para a quina B do quadrado? (Vide Fig. 1.15)

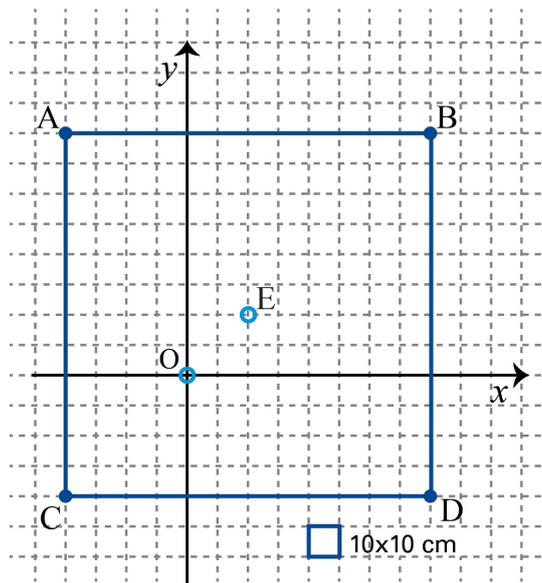


Figura 1.13: Os pontos de um quadrado e um possível referencial.

Resolução:

a) Cada ponto de um sistema de referência cartesiano no plano é identificado por um par ordenado de valores x e y , denominados, respectivamente, abscissa (x) e ordenada (y). Os eixos cartesianos dividem os pontos do plano em 4 regiões denominadas “quadrantes” (Vide Fig.1.14).

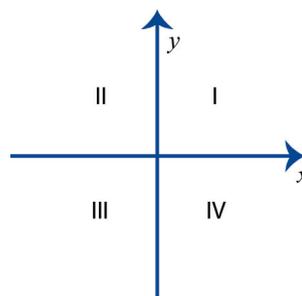


Figura 1.14: Os quadrantes.

Pontos equidistantes do eixo y têm abscissas iguais. Ao passo que pontos equidistantes do eixo x têm ordenadas iguais. Para distâncias medidas em centímetros, as coordenadas dos pontos ilustrados na Figura (1.13) que complementa o enunciado, são apresentadas na tabela a seguir.

	Abscissa	Ordenada	Notação cartesiana
A	- 40	80	A (- 40, 80)
B	80	80	B (80, 80)
C	- 40	- 40	C (- 40, - 40)
D	80	- 40	D (80, - 40)
E	20	20	E (20, 20)
O	0	0	O (0, 0)

b) A origem do sistema de referência transladada para a quina, ou vértice, B do quadrado está representada na Figura 1.15.

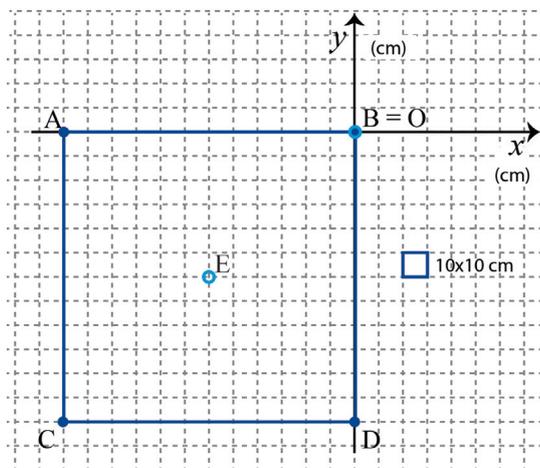


Figura 1.15: Os pontos no novo referencial.

As novas coordenadas dos pontos mencionados no item (a) são apresentadas na tabela a seguir.

	Abscissa	Ordenada	Notação cartesiana
A	- 120	0	A (- 120, 0)
B	0	0	B (0, 0)
C	- 120	- 120	C (- 120, - 120)
D	0	- 120	D (0, - 120)
E	- 60	- 60	E (- 60, - 60)
O	0	0	O (0, 0)

Exercício Resolvido 1.2

A caixa da Figura (1.16) tem dimensões $10\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 40\text{ cm}$. Um sistema de referência cartesiano tridimensional é adotado tomando o plano xz coincidente com um dos lados da caixa (arestas do paralelogramo ou arestas do poliedro) e a origem em uma das quinas (vértices).

a. Determinar as coordenadas cartesianas de cada quina (vértice) da caixa.

b. Se a origem do sistema de coordenadas for transladada para a quina F, quais as novas coordenadas de cada quina? A Figura 1.18(b) ilustra a nova posição do referencial.

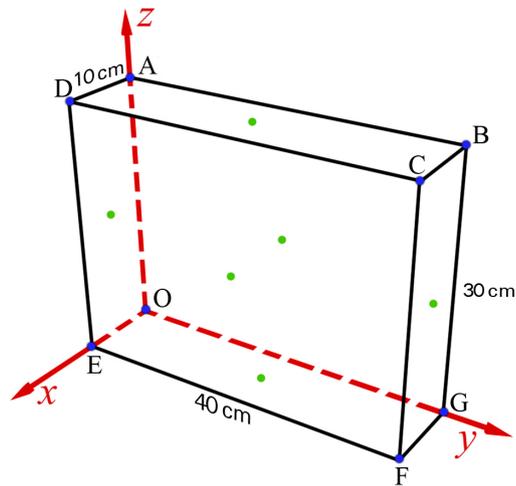


Figura 1.16: Uma caixa e um possível referencial.

Resolução:

a) Um ponto no espaço é caracterizado por 3 coordenadas.

A representação de um ponto P no espaço, na notação cartesiana, é $P(x, y, z)$.

Cada par de eixos define um plano (Figura 1.17 (a)). Temos, assim, três planos.

As coordenadas cartesianas de um ponto P são dadas, com exceção de sinal, pela distância a esses planos.

- $x = \pm$ distância do ponto P até o plano yz
- $y = \pm$ distância do ponto P até o plano xz
- $z = \pm$ distância do ponto P até o plano xy

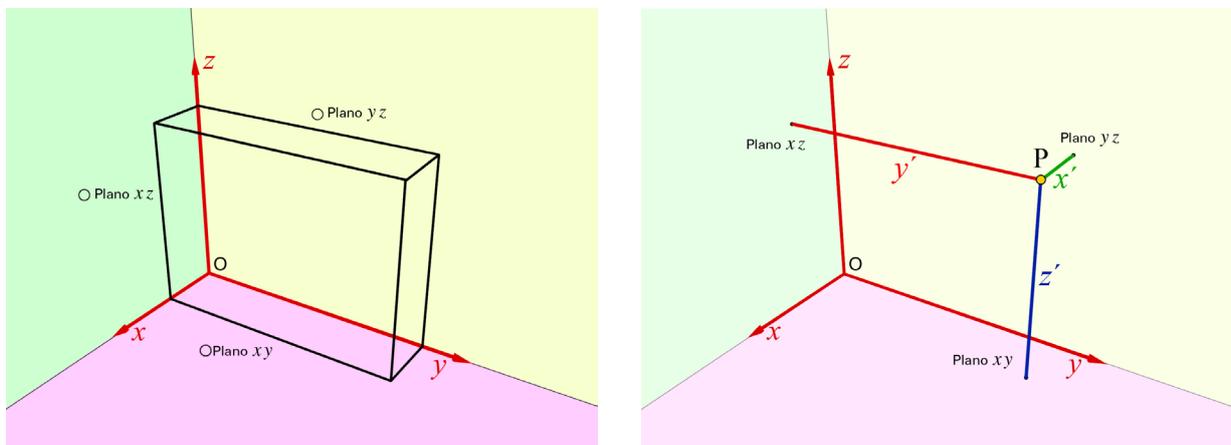


Figura 1.17

Eixos	Plano definido
$x; y$	xy
$x; z$	xz
$y; z$	yz

Pontos no plano yz	$x = 0$
Pontos no plano xz	$y = 0$
Pontos no plano xy	$z = 0$
yz	yz

a) Os eixos x e z definem o semiplano xz (verde); os eixos x e y definem o semiplano xy (rosa) e os eixos y e z definem o semiplano yz (amarelo).

b) A coordenada x' do ponto P é determinada pela distância (verde) do ponto P ao plano yz ; a coordenada y' pela distância (vermelho) do ponto P ao plano xz e a coordenada z' é definida pela distância (azul) do ponto P ao plano xy .

De acordo com a definição, as coordenadas das quinas da caixa são expressas na unidade *cm*. Utilizando a notação cartesiana $P(x, y, z)$, as coordenadas dos pontos são:

- $A(0, 0, 30)$, • $E(10, 0, 0)$, • $B(0, 40, 30)$, • $F(10, 40, 0)$, • $C(10, 40, 30)$, • $G(0, 40, 0)$, • $D(10, 0, 30)$, • $O(0, 0, 0)$

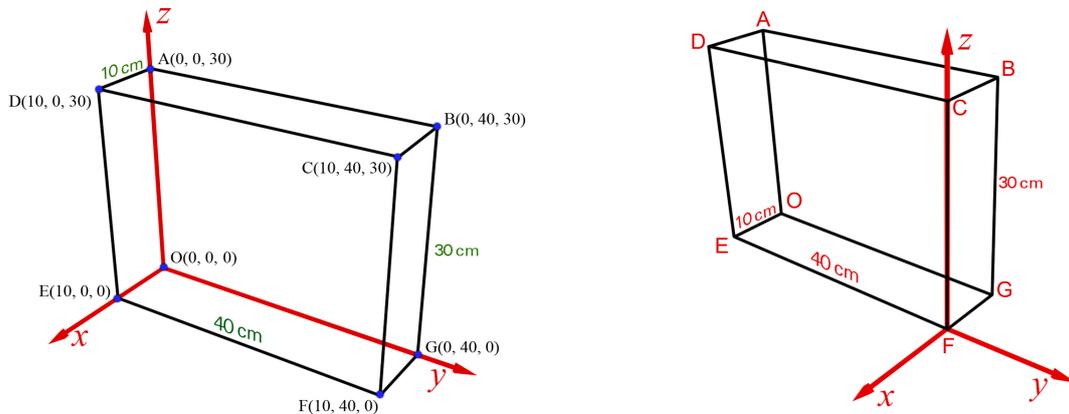


Figura 1.18: (a) Oito pontos no espaço e suas coordenadas cartesianas e (b) A origem do novo referencial na quina F.

b) Em relação ao novo referencial:

1. A, B, C e D posicionam-se a 30 cm do plano xy . Considerando-se a orientação do eixo z , eles têm coordenadas $z = 30\text{ cm}$.
2. A, B, O e G posicionam-se a 10 cm do plano zy . Levando-se em conta a orientação do eixo x , têm coordenadas $x = -10\text{ cm}$.
3. A, D, E e O posicionam-se a 40 cm do plano xz . Todos têm coordenadas $y = -40\text{ cm}$.
4. E, F (origem), G e O pertencem ao plano xy ; têm coordenadas $z = 0$.
5. C, B, G e F pertencem ao plano xz ; têm coordenadas $y = 0$.
6. D, C, E e F pertencem ao plano yz ; têm coordenadas $x = 0$.

Resumindo, com coordenadas expressas em centímetros, temos:

A (-10, -40, 30)	C (0, 0, 30)	E (-0, -40, 0)	G (-10, 0, 0)
B (-10, 0, 30)	D (0, -40, 30)	F (0, 0, 0)	O (-10, -40, 0)

Exercício resolvido 1.3

Considere o caso de um segmento de reta AB, cujas extremidades têm coordenadas $A(-80\text{ cm}, 40\text{ cm})$ e $B(80\text{ cm}, 160\text{ cm})$. Trace o segmento de reta num referencial cartesiano (x, y) e calcule a distância AB.

Resolução:

A Figura 1.20 ilustra o referencial cartesiano, os pontos A e B e o segmento de reta AB.

O resultado pode ser obtido a partir de $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, que permite determinar a distância entre dois pontos A e B. Neste exemplo, como $z_A = z_B = 0$, a relação se reduz a:

$$\text{Distância AB} = \sqrt{[x_B - x_A]^2 + [y_B - y_A]^2}$$

Substituindo-se os valores das ordenadas e abscissas de cada ponto, tem-se:

$$\text{Distância AB} = \sqrt{160^2 + 120^2} = 200\text{ cm}$$

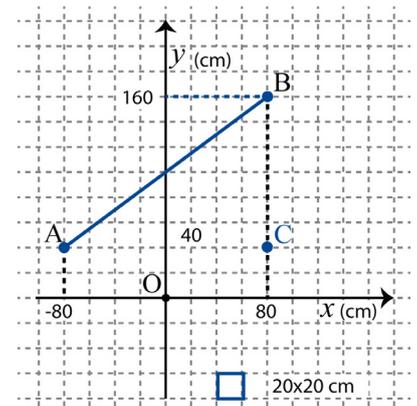


Figura 1.20: Esquema do segmento AB no referencial xy .