

2 As Origens da Mecânica Quântica

2.1 A Radiação do Corpo Negro

Sólidos aquecidos emitem a chamada radiação térmica. Isso pode ser facilmente observado numa lâmpada incandescente de bulbo transparente, quando aumentamos lentamente a tensão aplicada no filamento. Inicialmente, para baixas tensões (e temperaturas do filamento), não podemos ver nenhuma modificação aparente no aspecto do filamento, mas colocando-se a mão próximo ao bulbo, teremos uma sensação térmica indicando a maior temperatura do filamento. Depois, o filamento começa a ficar avermelhado e continuamente, à medida que aumentamos a tensão, vai ficando mais claro, até que atinja a tensão nominal de operação quando o filamento emite luz branca. Se dispersarmos essa radiação por um prisma ou outro tipo de espectrógrafo, veremos que o espectro de frequências da radiação emitida é contínuo.

Há vários outros tipos de radiação emitidos pela matéria. Gases e vapores ionizados podem emitir uma radiação característica de cada material, cujo espectro, no entanto, é constituído de frequências discretas. Raios X são emitidos por sólidos, quando bombardeados por elétrons ou outras partículas carregadas em altas energias. Estes têm um espectro discreto, mas são sempre acompanhados por outros, de espectro contínuo, emitidos na desaceleração rápida dos elétrons, dentro do sólido onde incidem.

Certos sólidos ou líquidos podem ainda emitir uma radiação característica, quando iluminados (excitados). Este fenômeno é chamado fluorescência, quando a emissão de radiação cessa imediatamente após removida a fonte de luz excitadora e de fosforescência, se a emissão de radiação persiste após retirada a fonte excitadora.

Os raios gamas, um outro tipo de radiação eletromagnética, de frequência ainda maior que os raios X, são emitidos pelos núcleos atômicos em processos de desintegração radioativa (decaimento radioativo). Neste capítulo, entretanto, nos restringiremos à descrição das propriedades da radiação térmica.

O espectro de frequências da radiação térmica emitida por um corpo à temperatura T é especificada pela radiança espectral $R_T(\nu)$ definida de modo que $R_T(\nu)d\nu$ corresponda à energia, por unidade de área e por unidade de tempo, emitida pela radiação térmica de frequência entre ν e $\nu + d\nu$ por um corpo à temperatura T . $R_T(\nu)$ é portanto proporcional à função de distribuição de energia em função das frequências, da radiação térmica. A radiança, R_T corresponde à energia total, por unidade de tempo e de área do emissor é definida como:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu)d\nu$$

2 As Origens da Mecânica Quântica

Observa-se experimentalmente, que as características de $R_T(\nu)$ dependem muito pouco da constituição do corpo que emite a radiação. $R_T(\nu)$ é basicamente uma função da temperatura do corpo. Na verdade, corpos muito reflexivos ou muito transparentes, se comportam quantitativamente muito diferentes dos corpos opacos e pouco reflexivos. Corpos como esses podem ainda ser caracterizados pelo coeficiente de absorção de energia térmica. O coeficiente de absorção a corresponde à fração de energia térmica incidente no corpo que é absorvido, o restante sendo portanto refletido. Sendo r o coeficiente de reflexão, temos portanto:

$$a + r = 1$$

Não consideramos aqui, os corpos translúcidos, para os quais teríamos ainda uma parte da radiação térmica transmitida pelo corpo. Para os corpos opacos, o coeficiente de transmissão é nulo. Um corpo, para o qual $r=0$ e portanto $a=1$, é chamado corpo negro, um absorvedor perfeito de radiação. Corpos de quaisquer materiais, cuja superfície é pintada com uma tinta preta e fosca (como por exemplo fuligem) são boas aproximações de corpos negros. Experimentalmente, a realização mais próxima de um corpo negro, é obtida com um orifício pequeno, num corpo sólido qualquer, no qual há uma ampla cavidade interna, que se comunica com o exterior somente pelo orifício. O orifício se comporta como um absorvedor ideal de radiação térmica. Como se vê na figura 2.1, a radiação incidente nele entra na cavidade e é em parte absorvida pelas paredes da cavidade e parte refletida para outros pontos da cavidade e (especialmente se as paredes da cavidade tiverem um coeficiente de absorção grande) apenas uma fração muito pequena escapa pelo orifício. Se compararmos a radiança R_T da radiação emitida pelo orifício de um corpo negro a uma temperatura T , com a de qualquer outro corpo, na mesma temperatura, veremos que a radiança do corpo negro é sempre maior. Podemos definir o coeficiente de emissão de radiação de um corpo, à temperatura T , pela razão da radiança desse corpo em relação à de um corpo negro, na mesma temperatura:

$$e = \frac{R_T}{R_T^{cn}}$$

Para superfícies em geral, em equilíbrio térmico, a taxa de absorção deve ser igual à de emissão. Desse modo, temos $a = e$ para qualquer corpo. Como por definição $a = 1$ para um corpo negro, ele é também um emissor perfeito de radiação térmica ($e = 1$).

2.1.1 Lei de Stefan-Boltzmann e Deslocamento de Wien

Em 1879, Stefan, com base em dados experimentais, observou que a radiança de um corpo negro à temperatura T é proporcional a T elevado à quarta potência:

$$R_T^{cn} = \sigma T^4$$

Posteriormente Boltzmann demonstrou, aplicando as leis da termodinâmica à radiação eletromagnética (como num ciclo de Carnot), a validade da expressão acima, conhecida

2.1 A Radiação do Corpo Negro

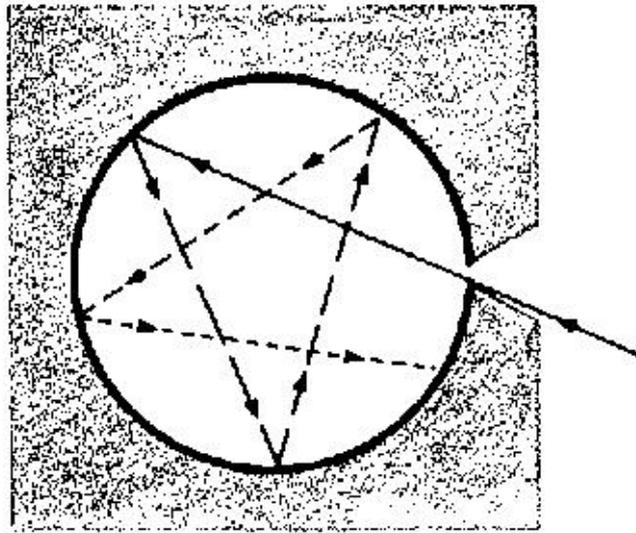


Figura 2.1: Corpo Negro construído como orifício numa cavidade metálica.

como lei de Stefan-Boltzmann. A constante de Stefan-Boltzmann é $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$.

Observando as curvas $R_T(\lambda)$ como as mostrada na figura 2.2, podemos verificar que o comprimento de onda para o qual $R_T(\lambda)$ é máximo, diminui à medida em que a temperatura em que a curva foi medida aumenta, obtendo-se a relação:

$$\lambda_m T = cte. = 2.90 \cdot 10^{-3} mK$$

onde λ_m corresponde ao comprimento de onda onde $R_T(\lambda)$ é máximo. Esta relação é conhecida como a *lei do deslocamento de Wien*. Esta relação mostra que as curvas $R_T(\lambda)$ têm a seguinte característica: Se graficarmos várias curvas $R_T(\lambda)$ para temperatura diferentes, não como função de T , mas em função do produto λT , os valores de $R_T(\lambda)$ máximos para todas as curvas, estarão alinhados na mesma posição do eixo das abscissas, λT , correspondendo ao valor $\lambda_m T$. Os valores dos máximos serão obviamente diferentes, com valores maiores para temperaturas maiores. Entretanto, se graficarmos no eixo vertical não o valor de $R_T(\lambda)$, mas o da razão $\frac{R_T(\lambda)}{T^5}$, em função de λT , então todas as curvas se superpõem perfeitamente, conforme visto na figura abaixo. Este resultado mostra que a razão $\frac{R_T(\lambda)}{T^5}$ é uma função universal $f(\lambda T)$. O fato de termos sempre o produto λT na dependência de f , mostra que a curva R para qualquer temperatura, terá as mesmas propriedades para mesmos valores de λT , ou seja, para $\lambda_2 T_2$. Isso quer dizer por exemplo que se λ_1 for o comprimento de onda para qual R_{T_1} tem o valor igual à metade de $R_{T_1}^{max}$, então se elevarmos o corpo negro à temperatura T_2 , então R_{T_2} terá valor igual à metade do novo valor máximo $R_{T_2}^{max}$, para o comprimento de onda λ_2 , dado por $\lambda_2 T_2 = \lambda_1 T_1$.

$$R_T(\lambda) = CT^5 F(\lambda T) = C \frac{(\lambda T)^5}{\lambda^5} F(\lambda T) = C \lambda^{-5} f(\lambda T)$$

2 As Origens da Mecânica Quântica

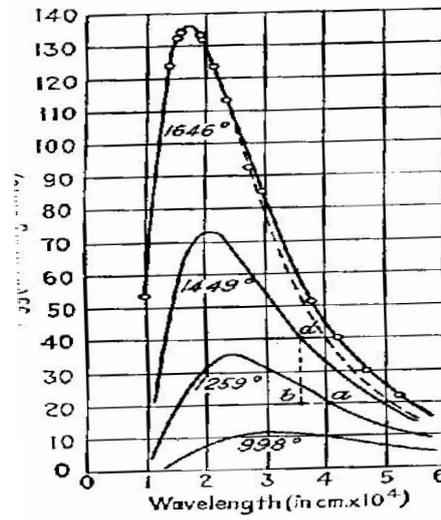


Figura 2.2: Distribuição espectral

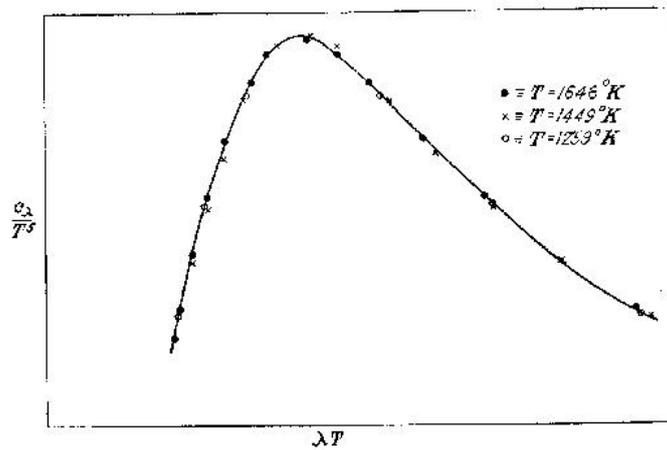


Figura 2.3: Verificação experimental da lei de deslocamento generalizada de Wien.

2.1 A Radiação do Corpo Negro

Onde $f(\lambda T) = (\lambda T)^5 F(\lambda T)$. Esta relação pode ser obtida a partir dos conceitos da termodinâmica e da mecânica estatística e é o máximo que se pode obter na explicação da radiação do corpo negro, com a física clássica. Como veremos a seguir, a tentativa de se obter $f(\lambda T)$ com base na física clássica falha completamente.

2.1.2 Aplicações e Exemplos: O Efeito Estufa

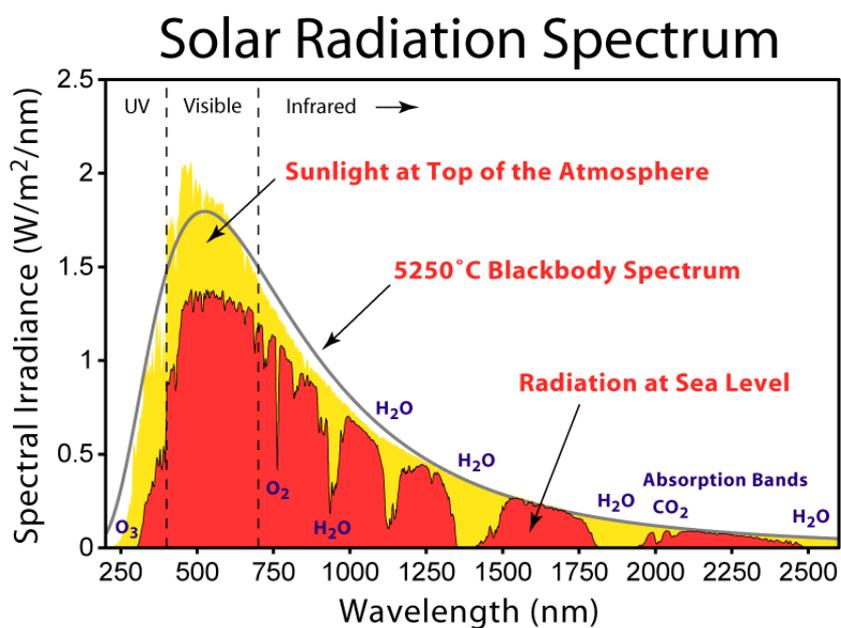


Figura 2.4: Espectro da radiação solar que atinge a Terra



Figura 2.5: Radiação infravermelho emitida pelo corpo humano (direita). Na figura da esquerda a mesma cena registrada com luz visível.

2 As Origens da Mecânica Quântica

Uma aplicação bastante atual dos conceitos de corpo negro, corresponde ao cálculo (que faremos em primeira aproximação), da temperatura média na superfície da Terra e do efeito estufa causado pela atmosfera terrestre. Constituída majoritariamente de nitrogênio (N₂) e oxigênio (O₂), há também na atmosfera outros componentes em quantidades bem menores, como H₂, O₃ (ozônio), vapor d'água, CO₂, NH₄, etc. São essas moléculas tri-atômicas as principais responsáveis pelo efeito estufa. A terra recebe energia solar na região do visível e reemite essa radiação na faixa do infra-vermelho. Como a atmosfera é relativamente transparente para a radiação incidente, mas bastante opaca para a radiação infra-vermelha emitida da Terra, temos então o que é chamado *Efeito Estufa*. Os espectros da radiação solar incidente, da radiação emitida pela Terra e de absorção pela atmosfera terrestre são vistos na figura 2.6.

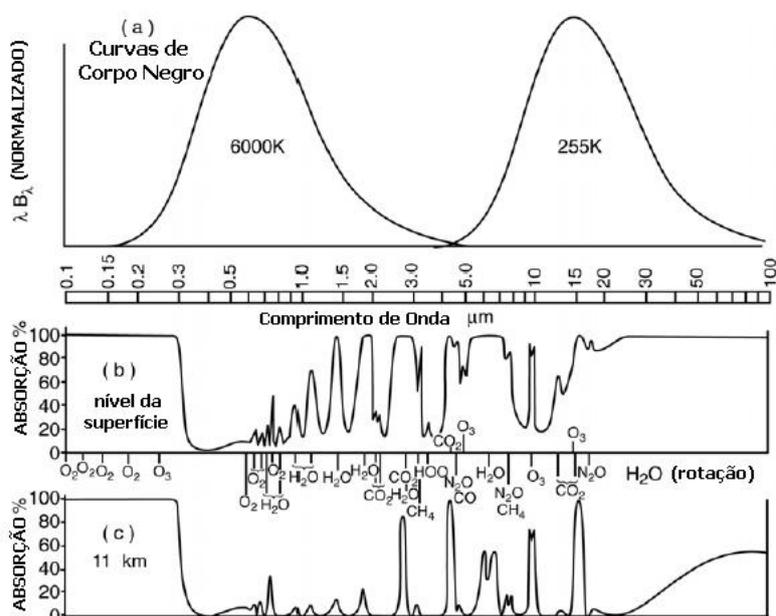


Figura 2.6: (a) Espectro de emissão de corpo negro para o Sol (6000 K) e para a Terra (255 K), (b) absorção da superfície até o topo, e (c) a radiação absorvida da tropopausa até o topo (Goody e Yung, “Atmospheric Radiation”, Oxford Univ. Press, 1989).

Vamos considerar a situação mais simples, com a atmosfera totalmente transparente, de modo que não há nenhum efeito estufa. Chamando de S a constante solar (radiação média que atinge o topo da atmosfera da Terra, por metro quadrado) e T_e a temperatura média da Terra nessas condições, e considerando a Terra como um corpo negro, temos:

$$S(1 - \alpha) = \sigma T_e^4 \Rightarrow T_e = \sqrt[4]{S(1 - \alpha)/\sigma}$$

Onde α é o albedo terrestre, ou seja a fração da energia incidente que é refletida de volta para o espaço. Tomando $S = 340\text{W/m}^2$, e $\alpha = 0,3$, obtem-se $T_e = 255\text{K}$, ou seja

2.1 A Radiação do Corpo Negro

-18C. Portanto, o efeito estufa causado pela atmosfera é fundamental para a vida no Planeta, elevando esta temperatura para cerca de +15C. Vamos agora considerar um modelo simples para a atmosfera, como sendo uma camada que é totalmente transparente para a radiação solar incidente (faixa do visível, também chamada de ondas curtas), mas que seja relativamente opaca para a radiação infravermelha. A radiação solar que atinge a superfície da Terra ($S(1 - \alpha)$) é absorvida pelo solo e reemitida, na forma de radiação de corpo negro à temperatura T_s (temperatura da superfície da Terra). Parte dessa energia é então absorvida pela atmosfera, que então terá uma temperatura de equilíbrio T_a . Considerando também a atmosfera como um corpo negro, ela irradiará σT_a^4) tanto em direção ao solo quanto para o espaço. Chamando ϵ o coeficiente de absorção da atmosfera, temos as seguintes equações de balanço radiativo (ver figura 2.7):

$$\begin{cases} S(1 - \alpha) = R(1 - \epsilon) + A \text{ (topo)} \\ S(1 - \alpha) + A = R \text{ (superfície)} \end{cases}$$

Onde $R = \sigma T_s^4$. Somando-se as duas equações, obtém-se:

$$2S(1 - \alpha) = R(2 - \epsilon)$$

Tomando $S(1 - \alpha) = \sigma T_e^4$, temos então:

$$2\sigma T_e^4 = \sigma T_s^4(2 - \epsilon) \Rightarrow T_s = \left(\frac{2}{2 - \epsilon}\right)^{1/4} T_e$$

para $\epsilon = 0$ temos a situação de atmosfera transparente e portanto $T_s = T_e$. Se imaginarmos a atmosfera totalmente opaca para o infravermelho (baixas frequências), então teremos o efeito estufa máximo. Neste caso, a temperatura média da superfície da Terra será:

$$T_s = 2^{1/4} T_e = 1,19 T_e = 303K$$

Isso corresponde a 30C de temperatura média, o dobro dos 15C atuais. Para obtermos a temperatura média atual, devemos considerar um fator de absorção da atmosfera $\epsilon \simeq 0,75$).

2 As Origens da Mecânica Quântica

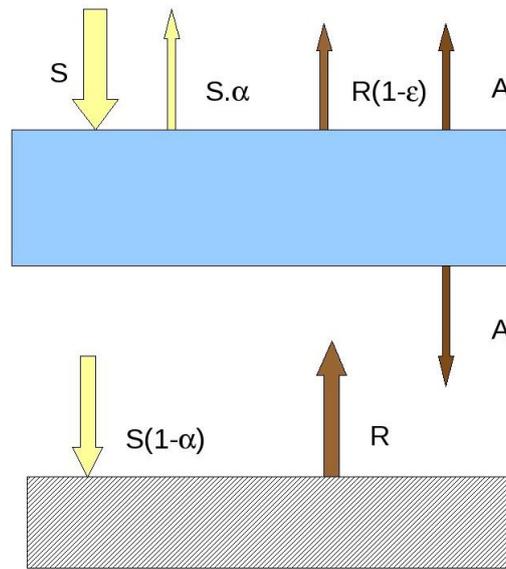


Figura 2.7: Balanço energético Terra-Atmosfera

Para uma estimativa mais realista da temperatura média da superfície (e parte inferior da atmosfera), deve-se considerar um grande número de camadas na atmosfera, fazendo-se o balanço energético em cada uma, bem com ter em conta outras formas de transferência de energia, como correntes na atmosfera, efeito de chuvas, etc.

2.1.3 A Lei de Rayleigh-Jeans

No interior da cavidade de um corpo negro, temos uma certa distribuição espectral de radiação eletromagnética em equilíbrio termodinâmico com as paredes da cavidade. Essas ondas são produzidas por osciladores (p. ex. elétrons em agitação térmica) nas paredes da cavidade. Nas paredes de uma cavidade metálica há sempre elétrons e outras cargas elétricas em constante vibração devido a energia térmica, e portanto gerando essas ondas. Não precisamos saber como essas ondas são geradas, mas sabemos que devem ser geradas de alguma forma. Isso é o que também sabiam os físicos do século XIX, quando estudavam esse problema. As ondas na cavidade, para se manterem em equilíbrio, devem corresponder a ondas estacionárias. Como as ondas eletromagnéticas correspondem a campos elétricos oscilantes na direção perpendicular à direção de propagação, nas posições extremas (isto é nas paredes), essas ondas devem ter amplitude sempre nula, pois o campo elétrico paralelo à superfície de um metal não pode ser diferente, sendo sempre cancelado pela mobilidade das cargas elétricas nos metais. Vamos a seguir obter a função que descreve a densidade de energia eletromagnética no interior de uma cavidade, $\rho_T(\lambda) = d^2U/dVd\lambda$. A Quantidade $R(\lambda)$ corresponde à potência irradiada pela cavidade, por unidade de área e de comprimento de onda: $R_T(\lambda) = d^3U^{irr}/dAd\lambda dt$. Pode-se mostrar que $R(\lambda) = \frac{c}{4}\rho_T(\lambda)$.

Usando a teoria cinética clássica, podemos calcular a função de distribuição de energia

2.1 A Radiação do Corpo Negro

das ondas na cavidade. Para isso, devemos conhecer o número total de graus de liberdade das ondas na cavidade, ou seja o número de ondas por intervalo de frequências entre ν e $\nu + d\nu$ ou comprimentos de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$. Para obter esta função, vejamos antes um caso mais simples, unidimensional, como o da corda de um violão. A condição de ondas estacionárias numa corda de violão de comprimento L implica na amplitude nula das ondas nas extremidades de fixação da corda. Portanto as ondas estacionárias poderão ter comprimentos de onda $\lambda_1 = 2L, \lambda_2 = L, \lambda_3 = \frac{2L}{3}, \dots$, ou de um modo geral: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. Como $\nu = c/\lambda$, as frequências possíveis correspondentes são dadas por $\nu = \frac{c}{2L}n$ ou $n = \frac{2L}{c}\nu$.

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

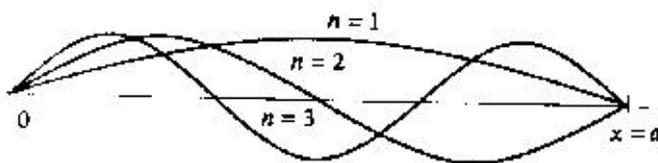


Figura 2.8: Modos de vibração de uma corda de violão

No caso da radiação do corpo negro, estamos interessados principalmente na faixa de frequências acima do infravermelho. Como os comprimentos de onda da radiação eletromagnética nessa região são menores que $10^{-6}m$, com cavidades de dimensões da ordem de alguns cm, os n correspondentes são 10^4 ou maiores. Portanto, faz sentido, para esses valores, aproximar n por uma variável contínua e perguntarmos pelo número de ondas estacionárias $dn = N(\nu)d\nu$ com frequências entre ν e $\nu + d\nu$. Da expressão acima para n em função de ν , temos: $N(\nu)d\nu = \frac{2L}{c}d\nu$. Ou seja, temos uma densidade uniforme de ondas por unidade de frequência. No caso tridimensional da cavidade, devemos considerar uma onda propagando-se numa direção arbitrária, fazendo um ângulo α com a direção do eixo x, β com a do eixo y e γ com a do eixo z. Uma onda eletromagnética tri-dimensional como essa, tem seu campo elétrico dado pela relação:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

onde

$$E_x = E_{ox} \sin(2\pi x/\lambda_x) \sin(2\pi \nu t)$$

e expressões semelhantes para E_y e E_z . Para uma cavidade cúbica de lado L, a condição para ondas estacionárias (componente de E paralelo à parede deve ser sempre nulo) é dada por: $2L/\lambda_x = n_x, 2L/\lambda_y = n_y$ e $2L/\lambda_z = n_z$, com n_x, n_y, n_z números inteiros. Conforme visto na figura bidimensional abaixo, as relações entre λ e λ_x, λ_y e n_z são dadas por: $\lambda = \lambda_x \cos \alpha = \lambda_y \cos \beta = \lambda_z \cos \gamma$, onde γ é o ângulo formado com a direção de propagação da onda, com o eixo z, não mostrado na figura. Portanto temos as equações:

2 As Origens da Mecânica Quântica

$$\frac{2L}{\lambda} \cos \alpha = n_x; \quad \frac{2L}{\lambda} \cos \beta = n_y; \quad \frac{2L}{\lambda} \cos \gamma = n_z$$

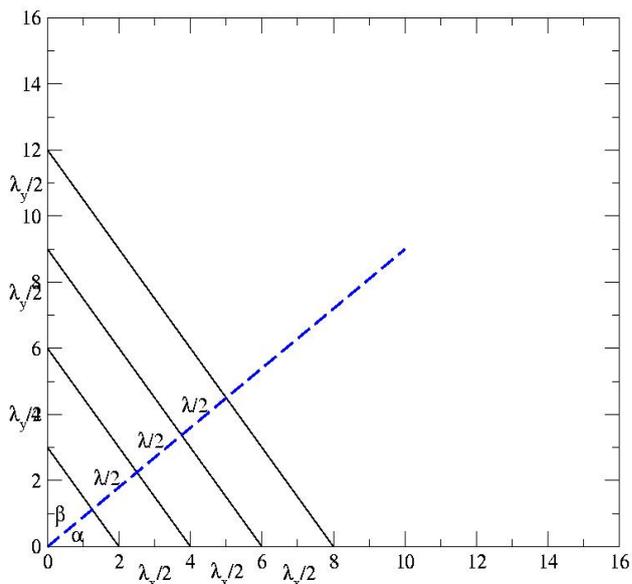


Figura 2.9: Representação bi-dimensional de uma onda estacionária numa cavidade.

elevando ao quadrado essas equações e somando, notando-se ainda que os ângulos acima obedecem a relação $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (para o caso bi-dimensional vê-se facilmente pois $\cos^2 \beta = \cos^2(\pi/2 - \alpha) = \sin^2 \alpha$) temos então:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$$

Tomando agora $\nu = c/\lambda$ e substituindo na relação acima, temos:

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2}}$$

Portanto, o número de ondas de frequência menores ou iguais a ν corresponde a todas as combinações de n_x, n_y, n_z tais que o valor do membro direito da equação acima seja menor ou igual a ν . Para encontrar esse número, vamos colocar num gráfico 3D, com eixos $x = \frac{n_x}{L}$, $y = \frac{n_y}{L}$ e $z = \frac{n_z}{L}$ pontos correspondentes a cada valor de n_x, n_y, n_z (ver figura 2.11), lembrando que somente faz sentido valores positivos de n_x, n_y, n_z (ou seja, um octante).

2.1 A Radiação do Corpo Negro

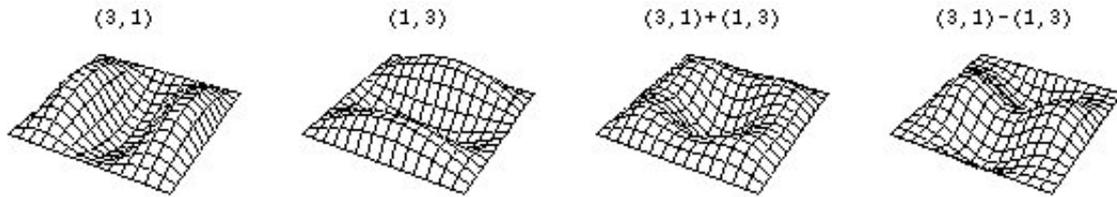


Figura 2.10: Ondas estacionárias em uma membrana. a) $n_x=3$, $n_y=1$; b) $n_x=1$, $n_y=3$; c) $n_x=3$, $n_y=3$; d) $n_x=3$, $n_y=3$, fase oposta.

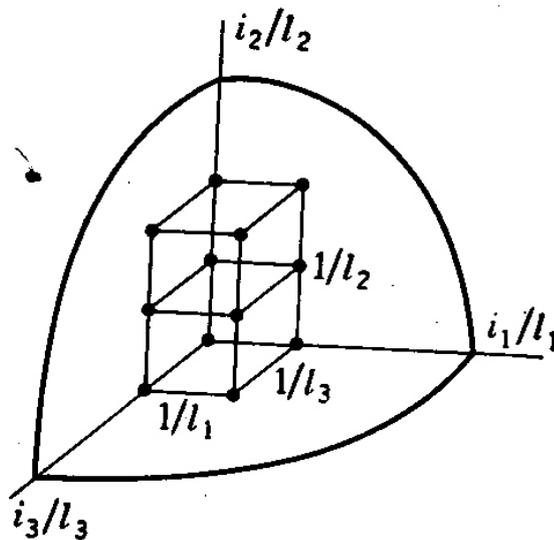


Figura 2.11: Representação dos diferentes modos de ondas estacionárias na cavidade, com valor de $\nu \leq \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2}}$ No presente caso, $l_1 = l_2 = l_3 = L$

2 As Origens da Mecânica Quântica

O volume ocupado por cada ponto é igual a $1/L^3$. Portanto a densidade de pontos (número de pontos por unidade de volume) é $\rho = L^3$. O volume correspondente aos valores de n_x, n_y, n_z que fornecem freqüências menores que ν é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ com $r = \sqrt{\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2}} = \frac{2\nu}{c}$. Portanto o número total n é dado por:

$$n = \rho \times V = \frac{4}{3}\pi L^3 \left(\frac{\nu}{c}\right)^3$$

A fração (dn) de ondas com freqüência entre ν e $\nu + d\nu$ pode então ser obtida derivando-se a expressão acima:

$$dn = N(\nu)d\nu = \frac{4\pi L^3}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Para cada uma dessas freqüências, temos na verdade duas ondas independentes, com a direção do campo elétrico em duas direções perpendiculares. Portanto o número total de ondas estacionárias na cavidade é o dobro da quantidade obtida acima:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3}\nu^2 d\nu$$

O teorema de equi-partição de energia diz que cada grau de liberdade na expressão para a energia de um sistema, corresponde a uma energia média $\frac{1}{2}kT$. No caso de osciladores e de ondas, a cada oscilador ou onda temos dois graus de liberdade (energias cinéticas e potencial elástica, ou energia no campo elétrico e no magnético no caso das ondas). Portanto a energia média por onda estacionária será kT . Obtemos então o espectro de densidade de energia por unidade de volume ($= L^3$) e por unidade de freqüência das ondas na cavidade:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{1}{V}kTN(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Para obtermos a expressão em termos do comprimento de onda, ($\rho(\lambda)d\lambda$) devemos lembrar que o número de ondas com freqüência entre ν_1 e $\nu_2 = \nu_1 + d\nu$ é o mesmo que o de ondas com comprimento de onda entre $\lambda_1 = c/\nu_1$ e $\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda$. Como, se para um dado $d\nu$ positivo, o correspondente $d\lambda$ será negativo, temos então a relação $dn = \rho(\lambda)d\lambda = -\rho(\nu)d\nu$. Ainda, como $d\nu = -(c/\lambda^2)d\lambda$, temos finalmente:

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 d\nu = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}d\lambda = \frac{8\pi k}{\lambda^5}\lambda T d\lambda$$

que é a lei de Rayleigh-Jeans para a radiação do corpo negro. Note que a medida que vamos para freqüências maiores do espectro (ultravioleta) $\rho(\nu)$ cresce continuamente, enquanto que a curva experimental tende a zero. Esta falha na previsão clássica ficou conhecida como a catástrofe do ultravioleta.

2.1 A Radiação do Corpo Negro

2.1.4 A Teoria de Planck Para a Radiação do Corpo Negro

No final do século XIX, Max Planck procurava uma solução para o problema da radiação do corpo negro. Sabendo que o entendimento desse fenômeno era fundamental, concluiu que deveria haver alguma falha nas teorias, mas cujas origens não eram até então conhecidas. Por isso tentou, exaustivamente, qualquer solução para o problema, mesmo que para tal, tivesse que fazer hipóteses não muito justificáveis. Vamos tentar seguir um possível caminho desenvolvido por Planck, com base em nossas deduções anteriores para o caso das moléculas de gás. Na obtenção da energia média das partículas do gás, utilizamos inicialmente uma distribuição discreta de valores de velocidade (ou de energia) para as moléculas do gás e depois substituímos essa distribuição por outra contínua. Vamos voltar e reconsiderar esta hipótese, para o caso os osciladores harmônicos correspondentes à radiação em equilíbrio na cavidade do corpo negro. A distribuição de energias de Maxwell-Boltzmann para osciladores harmônicos unidimensionais ($E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$) é dada por: $F(E) = Ae^{-E/kT}$. Considerando então que temos n_i osciladores com energia E_i e tomando as energias discretas E_i em intervalos regulares, $E_0 = 0$; $E_1 = \Delta E$; $E_2 = 2\Delta E$ e assim por diante e supondo ainda que a distribuição de Maxwell-Boltzmann seja válida, os n_i seriam dados por:

$$n_i = n_o e^{-E_i/kT} = n_o e^{-i\Delta E/kT}$$

Com base nessa hipótese, vamos calcular a energia média dos osciladores:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n_i E_i}{\sum n_i} = \frac{1}{N} (n_o E_0 + n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots) =$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} (0 + \Delta E n_o e^{-\Delta E/kT} + 2\Delta E n_o e^{-2\Delta E/kT} + \dots)$$

$$\langle E \rangle = \frac{n_o \Delta E e^{-\Delta E/kT}}{N} (1 + 2e^{-\Delta E/kT} + 3e^{-2\Delta E/kT} + \dots)$$

observando que o termo entre parênteses na expressão acima pode ser escrito como $(1 + 2x + 3x^2 + \dots)$ e que esta soma é igual a $\frac{1}{(1-x)^2}$, temos:

$$\langle E \rangle = \frac{n_o \Delta E e^{-\Delta E/kT}}{N} \frac{1}{(1 - e^{-\Delta E/kT})^2}$$

A soma $N = \sum n_i$ pode ser também desenvolvida:

$$N = \sum n_i = (n_o + n_o e^{-\Delta E/kT} + n_o e^{-2\Delta E/kT} + \dots) = n_o (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{n_o}{(1-x)}$$

e portanto $N = \frac{n_o}{1 - e^{-\Delta E/kT}}$. Substituindo este valor na expressão para $\langle E \rangle$, temos:

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta E e^{-\Delta E/kT} (1 - e^{-\Delta E/kT})}{(1 - e^{-\Delta E/kT})^2} = \frac{\Delta E e^{-\Delta E/kT}}{1 - e^{-\Delta E/kT}} = \frac{\Delta E}{e^{\Delta E/kT} - 1}$$

2 As Origens da Mecânica Quântica

Veja que se tomarmos o limite para $\Delta E \rightarrow 0$ obtemos o resultado clássico, $\langle E \rangle = kT$:

$$\lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{e^{\Delta E/kT} - 1} = \frac{\Delta E}{\Delta E/kT} = kT$$

Aplicando agora o valor obtido para $\langle E \rangle$ na expressão de Rayleigh-Jeans para a distribuição de energias da radiação do corpo negro, obtemos:

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \langle E \rangle d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{\Delta E}{e^{\Delta E/kT} - 1} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{\lambda \Delta E}{e^{\Delta E/kT} - 1} d\lambda$$

Com base no resultado obtido utilizando o deslocamento de Wien generalizado, a expressão $\frac{\lambda \Delta E}{e^{\Delta E/kT} - 1}$ deve ser portanto uma função $f(\lambda T)$. Para que isso ocorra, temos duas possibilidades na escolha de ΔE . Por exemplo, $\Delta E = \alpha T$ ou $\Delta E = \beta/\lambda$. Com a primeira possibilidade, a distribuição para a radiação do corpo negro fica:

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{\alpha \lambda T}{e^{\alpha/k} - 1} d\lambda$$

e com a segunda possibilidade:

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{\beta}{e^{\beta/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

Notemos que com a escolha da primeira possibilidade para ΔE , continuamos a ter a “catástrofe do ultra-violeta”, mas escolhendo-se a segunda possibilidade, essa divergência para $\lambda \rightarrow 0$ não ocorre, pois:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{C}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\gamma/\lambda} - 1} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{-\gamma/\lambda}}{\lambda^5} = 0$$

Planck verificou ainda que a expressão obtida para $\rho(\lambda)$ descrevia perfeitamente os dados experimentais, escolhendo-se o valor da constante β tal que $\beta = hc$ onde c é a velocidade da luz e $h = 6.23 \cdot 10^{-34} Js = 4.14 \cdot 10^{-15} eVs$ é hoje conhecida como a constante de Planck, considera como uma constante universal da natureza. Usando a relação mostrada anteriormente, $R_T(\lambda) = \frac{c}{4} \rho_T(\lambda)$, temos finalmente a expressão:

$$R_T(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda^5} \frac{hc^2}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

ou, em termos de frequências:

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^3 \frac{h}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Max Planck apresentou estes resultados numa reunião da Sociedade Alemã de Física em 14 de dezembro de 1900. Esta data é considerada como a do nascimento da Mecânica Quântica.

2.1 A Radiação do Corpo Negro

Devemos mencionar ainda um importante detalhe da teoria de Planck. De acordo com sua hipótese, um oscilador harmônico pode ter energias que são múltiplas de uma quantidade fixa, $h\nu$: $E = 0, h\nu, 2h\nu, \dots, nh\nu, \dots$. A emissão (e a absorção) de radiação pelo oscilador ocorre somente quando ele “pula” de um estado de energia para um outro vizinho. Passando do estado de energia $nh\nu$ para o imediatamente abaixo, $(n-1)h\nu$, o oscilador perde uma quantidade de energia $h\nu$ que é emitida na forma de um “pulso” de radiação. Uma quantidade $h\nu$ de energia pode também ser absorvida pelo oscilador, passando de um estado $nh\nu$ para o de energia $(n+1)h\nu$. Essas idéias (principalmente a de absorção) não eram ainda muito claras quando Planck postulou sua teoria, uma vez que ele não havia incluído a quantização da energia radiante (o fóton), que seria introduzida mais tarde, como veremos, por Albert Einstein.

2.1.5 O Calor Específico dos Sólidos

Um outro sistema em que a hipótese de Planck foi inicialmente aplicada, é o caso do calor específico de sólidos. Como vimos, classicamente, considerando os átomos de um mol de um sólido como um conjunto de $3N_A$ osciladores harmônicos, a capacidade calorífica a volume constante será $C_v = \left(\frac{dU}{dT}\right)_v = 3R$. Experimentalmente este é o valor obtido para altos valores de T, mas C_v tende a zero, quando a temperatura absoluta tende a zero. Einstein, em 1908, usou o resultado de Planck para a energia média de um conjunto de osciladores, considerando os átomos do sólido como um conjunto de $3N_A$ osciladores de frequência ν , sendo portanto a energia média por mol dada por:

$$U = 3N_A \langle E \rangle = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

de onde se obtém:

$$C_v = \left(\frac{dU}{dT}\right)_v = \frac{3N_A h\nu \left(\frac{h\nu}{kT^2}\right) e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} = \frac{3N_A k \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}$$

ou, substituindo $N_A k = R$,

$$C_v = \frac{3R \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}$$

No limite para altas temperaturas, $e^{h\nu/kT} \rightarrow 1$ e

$$(e^{h\nu/kT} - 1)^2 = \left(1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 + \dots - 1\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h\nu}{kT} + \dots\right)$$

e portanto, $C_v = 3R$, conforme previsto. Analogamente é fácil verificar que o resultado tende a zero para T tendendo para zero. Para cada sólido, deve ser encontrado o valor da frequência ν dos osciladores (que dependem da “força de mola” da ligação entre os átomos

2 As Origens da Mecânica Quântica

em cada caso. Este valor pode ser definido em termos da chamada temperatura de Einstein $T_E = h\nu/k$. Na figura 2.6, vemos o resultado previsto pela equação acima, comparado com dados experimentais. Embora qualitativamente correto, há ainda pequenas discrepâncias com relação aos resultados experimentais. Somente em 1912, P. Debye, considerando as moléculas vibrando não todas numa mesma frequência, mas como um sistema de osciladores acoplados de diferentes frequências, conseguiu obter o resultado correto para este problema.

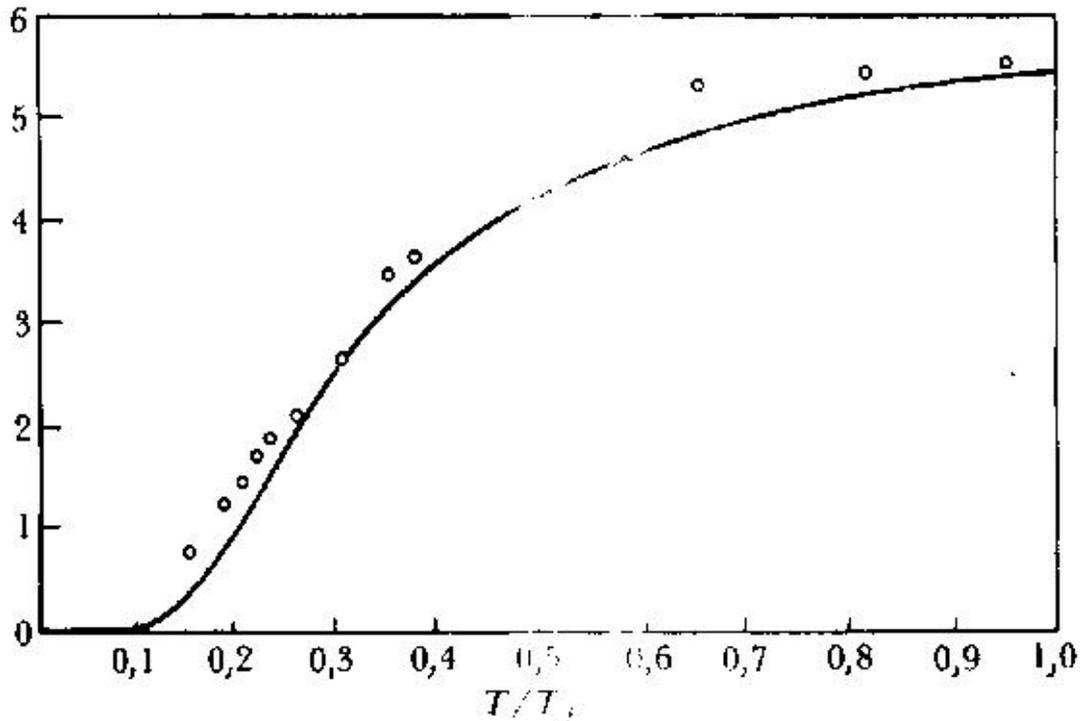


Figura 2.12: Teoria de Einstein para o calor específico de sólidos

2.2 O Efeito Fotoelétrico

Por volta de 1887, H. Hertz realizava a série de experimentos com os quais demonstrou a existência das ondas eletromagnéticas. Para isso utilizou um circuito ressonante tipo bobina-capacitor, convenientemente acoplado a um par de pontas metálicas colocadas a uma pequena distância uma da outra. Induzindo um pulso de tensão no sistema, ondas eletromagnéticas eram emitidas pelo sistema e uma faísca entre as pontas era produzida. A uma certa distância desse sistema, um outro sistema análogo, funcionava como receptor das ondas hertzianas. No receptor, a energia eletromagnética capturada pelo sistema era utilizada para produzir a faísca nas correspondentes pontas. Hertz mediu a intensidade do sinal recebido afastando controladamente as pontas do receptor, até que estas não produzissem mais faíscas, para uma dada condição do gerador. Analisando cuidadosamente

2.2 O Efeito Fotoelétrico

o problema, verificou que podia obter faíscas com distâncias maiores entre as pontas, se deixasse a luz produzida pelas pontas do gerador atingir as do receptor. Utilizando vários obstáculos colocados entre as pontas dos dois aparelhos, como papelão, vidro e quartzo, observou que o vidro, diferentemente do quartzo, afetava a distância máxima e concluiu, corretamente, que o efeito era causado pela incidência, nas pontas do receptor, de luz ultravioleta produzida na descarga do transmissor. Este fenômeno é conhecido como *efeito fotoelétrico*: a luz ultravioleta (ou radiações mais energéticas como raios X e raios gama) incidindo num metal faz com que elétrons sejam ejetados da superfície metálica.

É interessante notar a ironia desta descoberta, pois ao mesmo tempo que demonstrava a existência das ondas eletromagnéticas, a observação deste fenômeno secundário levaria, muitos anos depois, ao desenvolvimento da teoria corpuscular da luz, desenvolvida por Einstein em 1905 exatamente para explicar este fenômeno.

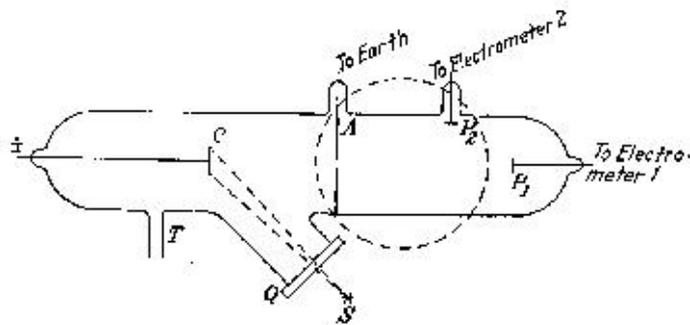


Figura 2.13: Fotocélula como a usada por Lenard para o estudo do efeito fotoelétrico.

Mais tarde, por volta de 1900, numa série de experimentos realizados independentemente por Lenard e por Merrit e Stewart, as propriedades gerais deste fenômeno foram estabelecidas. Utilizando um instrumento semelhante ao visto na figura 2.7, foi demonstrado serem emitidas partículas do catodo, com mesma razão e/m dos raios catódicos. Todos os eletrodos são mantidos em vácuo e cuidados especiais devem ser tomados com a qualidade da superfície do catodo (chamado de fotocátodo), pois em geral, a oxidação ou contaminação da superfície deste reduz consideravelmente o efeito. Iluminando-se o catodo C com luz introduzida pela janela de quartzo Q pode-se então coletar os elétrons emitidos pelo catodo, no anodo A. Mantendo-se uma diferença de potencial suficientemente grande entre o anodo (+) e o catodo (-), observa-se que a chamada corrente fotoelétrica é proporcional à intensidade de luz incidente no catodo. Diminuindo-se a tensão, à partir de um certo valor, a corrente começa a diminuir. Para polarização reversa (catodo + e anodo -), a corrente continua a diminuir com o aumento da tensão, permanecendo nula para valores de tensão reversa maiores que um dado valor V_0 , como visto na figura abaixo. Observa-se também que o valor de V_0 é proporcional à frequência da luz incidente. Outra observação corresponde à da existência de um limiar de frequências para a ocorrência do efeito. Mesmo com polarização direta dos eletrodos, a corrente fotoelétrica permanece nula para luz incidente de frequência abaixo de um certo valor ν_0 , independente da intensidade da

2 As Origens da Mecânica Quântica

luz incidente. Outra característica do fenômeno é que não há nenhum intervalo de tempo entre a incidência da luz e o aparecimento da corrente fotoelétrica.

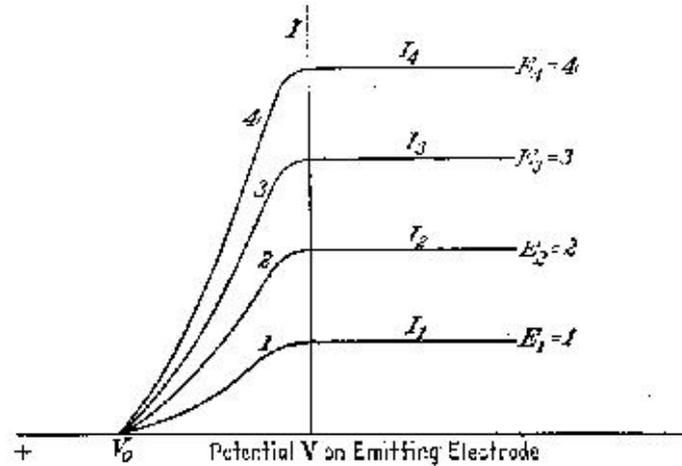


Figura 2.14: Curvas características de $I \times V$, para diferentes intensidades de luz, de mesmo comprimento de onda.

Sabendo-se que são emitidos elétrons da superfície metálica, pode-se então associar o potencial reverso V_0 para o qual cessa a corrente com a energia máxima dos elétrons emitidos. V_0 é chamado potencial de freamento e a energia máxima dos elétrons emitidos é dada por:

$$E_c^m = eV_0$$

Classicamente, podemos considerar o elétron atômico recebendo energia através do campo elétrico oscilante da onda eletromagnética, como num oscilador harmonico forçado. A luminosidade da onda estando uniformemente distribuída e sendo igual a I (W/m^2) e cada elétron recebe uma energia $I\pi a^2$ por segundo, onde a é a dimensão do sistema oscilante, tipicamente o raio atômico. Portanto qualquer que seja a frequência da onda eletromagnética, o elétron deveria receber a mesma energia, desde que elas tivessem a mesma intensidade. Por outro lado, mesmo para luz de baixa intensidade, a energia cedida pela onda poderia ser armazenada pelo elétron oscilante durante um intervalo de tempo Δt , até que esta fosse maior que a energia de ligação do elétron ao metal, e então este seria ejetado. Por exemplo, sabendo-se que para o potássio (K), a energia de ligação do elétron ao metal é de cerca de $2.1 eV = 3.4 \cdot 10^{-19} J$. Fazendo-se incidir numa placa de K luz de intensidade de $1 W/m^2$, e considerando o raio atômico $a \sim 10^{-10} m$ o elétron receberá energia a uma taxa dada por:

$$R = \pi a^2 \cdot 1 = 3.14 \cdot 10^{-20} J/s$$

portanto, para arrancar o elétron, seria necessário esperar um intervalo de tempo

$$\Delta t = \frac{3.4 \cdot 10^{-19}}{3.14 \cdot 10^{-20}} \cong 10 s$$

2.2 O Efeito Fotoelétrico

Em 1905, Albert Einstein, utilizando, de uma forma mais geral, as idéias de Planck para a energia dos osciladores na cavidade do corpo negro, conseguiu explicar as propriedades observadas no efeito fotoelétrico. Planck, em sua demonstração, se restringiu à quantização da energia para o caso dos osciladores (elétrons) nas paredes da cavidade. As ondas no interior da cavidade (produzida pelos elétrons oscilando) eram quantizadas em decorrência disso. Einstein, ao invés disso, considerou que a própria energia radiante era quantizada, sendo portanto constituída de corpúsculos cada um portanto uma quantidade fixa de energia. Os fenômenos usuais não permitiriam observar essa característica devido ao enorme número de fótons normalmente associado à energia radiante (assim como um líquido aparenta ser um fluido contínuo e não formado por elementos discretos). É interessante notar, que antes da descoberta da difração da luz, Newton desenvolveu um modelo corpuscular para a luz, que no entanto não corresponde às idéias de Einstein, principalmente porque seu modelo não previa a difração da luz, fenômeno tipicamente ondulatório). Para explicar a difração e a interferência, Einstein supôs que as partículas de luz (fótons) não se movem como partículas usuais, mas que se propagam com intensidades médias dada pela amplitude da onda eletromagnética associada, dada pelo modelo ondulatório. O caráter corpuscular seria manifestado apenas no processo de interação da radiação eletromagnética com a matéria (na emissão e absorção). Seguindo as idéias de Planck, associou à radiação de frequência ν , fótons de energia $E = h\nu$. A intensidade de luz é agora dada pelo número de fótons emitidos por unidade de tempo. Supôs também, que no efeito fotoelétrico, um único fóton interage com um elétron, sendo completamente absorvido por este, que após a interação terá uma energia cinética:

$$E_c^o = h\nu$$

Após receber esta energia pela interação com o fóton, o elétron deve ainda perder alguma energia até escapar da superfície do metal. A energia cinética do elétron ejetado do metal será portanto:

$$E_c = E_c^o - w = h\nu - w$$

onde w é o trabalho realizado para arrancar o elétron do metal. Esta energia depende das condições em que a interação se deu. Aqueles que, após a interação não perdem nenhuma energia extra, mas somente a energia necessária para vencer a barreira de potencial existente na superfície dos metais, conhecida como *função de trabalho*, w_o , terão energia cinética máxima. Portanto a energia cinética máxima dos elétron emitidos será dada por:

$$E_c^m = h\nu - w_o$$

Isso explica perfeitamente a existência de um limiar de frequências ($h\nu > w_o$) para a emissão dos fotoelétrons e também que a energia dos elétrons emitidos não esteja relacionada à intensidade da luz incidente, mas sim que a corrente elétrica (número de elétrons emitidos) seja proporcional à intensidade de luz (número de fótons absorvidos).

Em 1914, R. Millikan realizou uma série de medidas com grande precisão, do potencial de freamento V_o em função da frequência da luz incidente e obteve a confirmação da teoria

2 As Origens da Mecânica Quântica

de Einstein, determinando a constante de Planck. Em 1921 Einstein recebeu o prêmio Nobel pelo desenvolvimento da teoria para o efeito fotoelétrico. As idéias originais de Planck se mostravam ser de aplicação mais geral e a Mecânica Quântica começava seu desenvolvimento.

A questão a respeito do tipo de elétron que interage com o fóton é outra questão que não tem explicação clássica. Sabe-se que os condutores são muito mais eficientes na produção de fotoelétrons que os materiais isolantes, que praticamente não têm elétrons ejetados, a não ser com a irradiação por fótons de maiores energias, como os raios-X. Como num condutor tem-se os elétrons ligados aos átomos e os chamados elétrons de condução, que são livres dentro do metal, espera-se que sejam esses os envolvidos no efeito fotoelétrico (a teoria clássica da condução elétrica em metais foi desenvolvida por Lorentz e outros, logo após a descoberta dos elétrons). Entretanto, pode-se verificar facilmente que na colisão de um elétron livre com um fóton, não pode haver simultaneamente a conservação de energia e momento. O momento linear de um fóton pode ser obtido com base na equação relativística que relaciona energia e momento $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$, que para partículas sem massa de repouso, como o fóton, se reduz a $E = pc$. Supondo por exemplo que a energia se conserva, $E = h\nu = p_e^2/2m_e$. Mas $p_f = E/c = h\nu/c \neq p_e = \sqrt{2m_e h\nu}$. Para que a interação entre o fóton e um elétron possa ocorrer, este último deve estar ligado a um terceiro corpo, de massa muito maior (como por exemplo um átomo), de modo que possa receber a quantidade de movimento necessária para haver a conservação, sem no entanto carregar muita energia, de modo que com boa aproximação tem-se ainda $E_e = h\nu$. Outro ponto que dificulta a interpretação de que são os elétrons livres (ou metálicos) os responsáveis pela interação, é que esses elétrons, formando uma espécie de gás no interior do metal (gás de elétrons livres) deveriam ter energia cinética distribuída de acordo com a distribuição de Maxwell. Portanto após a colisão, a energia total do elétron seria em média $h\nu + \frac{3}{2}kT$, de modo que a energia média dos elétrons emitidos deveria depender da temperatura. Efeitos da temperatura na energia cinética desses elétrons pode ser observados no caso da chamada emissão termoelétrica, bastante estudado na época. O efeito pode ser entendido qualitativamente como uma “evaporação” dos elétrons mais energéticos, que têm de vencer a barreira de potencial da superfície metálica (função de trabalho) para serem emitidos. A corrente termoelétrica como função da temperatura é dada pela equação de Richardson:

$$I = AT^2 e^{-w_t/kT}$$

onde w_t é o trabalho realizado pelo elétron para sair do metal. Evidências de que os fotoelétrons são de mesma origem são obtidas da constatação que os valores medidos para a função de trabalho de metais pelo efeito termoelétrico e pelo fotoelétrico são iguais ($w_t = w_o$). Embora para temperaturas próximas à ambiente ou menores, a energia térmica média é pequena (~ 0.04 eV) e portanto seu efeito na energia dos elétrons ejetados dificilmente seria notado. Millikan e Winchester estudaram cuidadosamente a dependência do potencial de freamento com a temperatura, não observando nenhum efeito, mesmo a temperaturas bem mais altas, quando a energia térmica chega a cerca de 0.2 eV. A atribuição dos elétrons atômicos como sendo os responsáveis pelos fotoelétrons emitidos traz outras dificuldades

2.2 O Efeito Fotoelétrico

ainda maiores na interpretação do efeito.

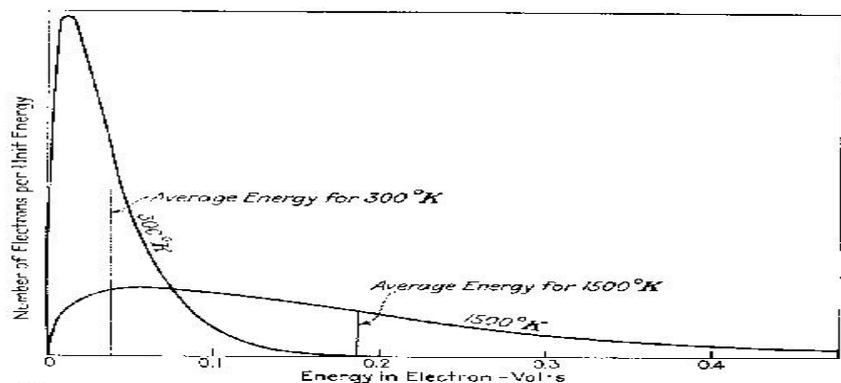


FIG. 42.—Distribution of energy among (conduction) electrons at temperatures of 300°K. and 1500°K., according to the Maxwell (i.e., classical) distribution law.

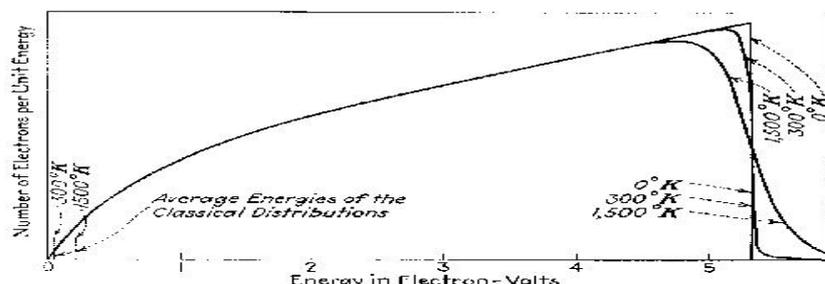


Figura 2.15: Comparação entre as distribuições de Maxwell-Boltzmann e a de Fermi-Dirac para elétrons de condução em metais.

A solução para o problema só pode ser obtida mais tarde, quando por volta de 1928 Sommerfeld introduziu uma nova teoria para a condução elétrica em metais, baseada na distribuição quântica de energia dos elétrons de condução (distribuição de Fermi-Dirac), ao invés da distribuição maxwelliana. De acordo com a mecânica quântica, partículas como o elétron, próton, etc., chamadas férmions, não podem compartilhar um mesmo estado de energia. A figura 2.9 mostra a diferença entre as distribuições clássicas e as correspondentes quânticas, para várias temperaturas diferentes. Contrário à distribuição clássica, na quântica há apenas uma pequena alteração na distribuição dos elétrons com energia próximas à energia máxima, chamada energia de Fermi. Neste caso, a barreira de potencial na superfície do metal tem energia $E_b = E_F + w$ onde w é a função de trabalho definida anteriormente. Portanto se um fóton interage com um elétron com energia próxima e E_F ele escapa com energia máxima. Se um elétron mais interno é o que recebeu a interação, a energia de escape será menor. Os efeitos da temperatura, conforme visto na figura, são muito pequenos para serem medidos com a técnica utilizada por Millikan. Entretanto, eles fazem com que a corrente de fotoelétrons, medida como função da tensão de freamento caia assintoticamente a zero, tornando mais difícil a determinação de V_0 . Na teoria quântica da condução, esses elétrons não são considerados livres, mas ligados ao

2 As Origens da Mecânica Quântica

metal como um todo. Portanto é a massa metálica total que recebe a quantidade faltante de momento, necessária para sua conservação.

2.3 Exercícios

1. Mostre que a lei de radiação de Planck se reduz à lei de Wien para pequenos comprimentos de onda e a lei de Rayleigh-Jeans para os grandes. (Sugestão: Expanda o termo exponencial em série de potências para obter a segunda destas leis.) Dado que:

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT}} \quad (\text{Lei de Wien})$$

2. Mostre que a densidade de energia total na radiação de corpo negro sobre toda a faixa de frequências de 0 a ∞ é idêntica na forma à lei de Stefan-Boltzmann para radiação total. Sabendo que a constante de Stefan-Boltzmann é $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$, obtenha a constante de Planck. Dado que : $R_T = \sigma T^4$ - lei de Stefan-Boltzmann (sugestão: $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$).
3. Uma massa de 10g está pendurada em um elástico com uma constante elástica de 25 N/m. Assuma que este oscilador é quantizado justamente como os osciladores de radiação. a) Qual a energia mínima que pode ser fornecida a esta massa? b) Se a massa em repouso absorve a energia da parte a), qual a amplitude resultante? c) Quantos quanta de energia precisam ser absorvidos para se obter uma amplitude de 10 cm? Resp.: a) $E = 5,3 \cdot 10^{-33} J$; b) $A = 2 \cdot 10^{-17} m$; c) $\sim 2,5 \cdot 10^{31}$ quanta.
4. Quando uma certa superfície fotoelétrica é iluminada com luz de diferentes comprimentos de onda, os seguintes potenciais de corte são observados:

$\lambda(A)$	3660	4050	4360	4920	5460	5790
$V_c(V)$	1,48	1,15	0,93	0,62	0,36	0,24

Faça um gráfico de frequência por potencial de corte ($\nu x V_c$). Determine a) a frequência de corte, b) o comprimento de onda de corte, c) a função trabalho do material, e d) determinar o valor da constante de Planck h (o valor de e sendo conhecido). Resp.: a) Hz; b) =6450 Å; c) 1,92 eV; d) .

5. O que vai mudar no potencial de freamento de emissão de fotoelétrons em uma superfície se o comprimento de onda da luz incidente é reduzido de 4000Å para 3980Å? (Assuma que o decréscimo no comprimento de onda pode ser considerado um diferencial).
6. Radiação de comprimento de onda 2000 Å incide sobre uma superfície de alumínio, cuja função de trabalho é 4.2 eV. a) Qual a energia cinética máxima do fotoelétron emitido? b) Qual o potencial de freamento? c) Qual o comprimento de onda limite

2.3 Exercícios

- para o alumínio? d) Se a intensidade da luz incidente é de 2 W/m^2 , qual é o número médio de fótons por unidade de tempo e por unidade de área que atinge a superfície?
7. A função de trabalho do potássio é $2,24 \text{ eV}$. Se potássio metálico é iluminado com luz de comprimento de onda 350 nm , encontre: a) a energia cinética máxima dos fotoelétrons e b) o comprimento de onda de corte. Resp.: a) $1,3 \text{ eV}$ b) 554 nm
 8. Quando césio metálico é iluminado com luz de comprimento de onda 300 nm , os fotoelétrons emitidos têm energia cinética máxima $2,23 \text{ eV}$. Encontre a) a função de trabalho do césio e b) o potencial de freamento se a luz incidente tem comprimento de onda 400 nm . Resp.: a) $1,91 \text{ eV}$ b) $1,20 \text{ V}$
 9. Luz de comprimento de onda 500 nm incide sobre uma superfície metálica. Se o potencial de freamento para o efeito fotoelétrico é $0,45 \text{ V}$, encontre a) a energia cinética máxima dos elétrons emitidos b) a função de trabalho e c) o comprimento de onda de corte. Resp.: a) $0,45 \text{ eV}$ b) $2,03 \text{ eV}$ c) 612 nm
 10. Qual a frequência de corte para o efeito fotoelétrico em lítio ($\phi=2,9 \text{ eV}$)? Qual o potencial de freamento se o comprimento de onda da luz incidente for 400 nm ?
 11. Qual o comprimento de onda máximo da luz incidente capaz de produzir efeito fotoelétrico na prata ($\phi=4,7 \text{ eV}$)? Qual será a energia cinética máxima dos fotoelétrons se o comprimento de onda é reduzido à metade? Resp.: 264 nm ; $4,7 \text{ eV}$
 12. Um laser de 2 mW ($\lambda=530 \text{ nm}$) incide sobre um fotocátodo de césio ($\phi=1,9 \text{ eV}$). Assumindo uma eficiência de 10^{-5} para a produção de fotoelétrons (1 elétron emitido para cada 10^5 fótons incidentes), qual a corrente fotoelétrica?
 13. O Sol e as estrelas se comportam, com boa aproximação, como corpos negros. a) Sabendo-se que o espectro de energia de radiação emitido pelo Sol tem um máximo para $\lambda = 5100 \text{ \AA}$, calcule a temperatura na superfície do Sol. b) Para a estrela polar, esse máximo se encontra em $\lambda = 3500 \text{ \AA}$. Qual a temperatura na superfície desta estrela?
 14. a) Supondo que a temperatura da superfície do sol é de 5700 K , use a lei de Stefan-Boltzmann para determinar a massa de repouso perdida por segundo pelo sol sob a forma de radiação. Considere o diâmetro do sol como sendo $1,4 \cdot 10^9 \text{ m}$. b) Que fração da massa do sol é perdida por ano sob forma de energia eletromagnética? Considere a massa de repouso do sol sendo $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
 15. Obtenha a lei do deslocamento de Wien, $\lambda_{max}T = 0,201hc/k$, resolvendo a equação $d\rho(\lambda)/d\lambda = 0$. (Sugestão: faça $hc/\lambda kT = x$ e mostre que a equação citada leva a $e^{-x} + x/5 = 1$. Mostre então que $x=4,965$ é a solução).
 16. Supondo que uma lâmpada incandescente pode ser aproximada por um corpo negro à temperatura de 3000 K , calcule a fração da energia irradiada pelo filamento que se

2 As Origens da Mecânica Quântica

encontra na faixa visível (entre 4000 e 6000 Å) (sugestão: aproxime a integral da radiança pela área de um trapézio).

17. Uma massa de 2 kg está ligada a uma mola sem massa de constante de força $k=25$ N/m. A mola é esticada 0,40m da posição de equilíbrio e então solta. a) Encontre a energia total e a frequência de oscilação de acordo com a física clássica. b) Assumindo a quantização da energia, determine o número quântico n para o sistema. Resp.: a) $E_{tot} = 2,0$ J; $\nu = 0,56$ Hz b) $5,4 \times 10^{33}$
18. a) Use a lei de Stefan para calcular a energia total irradiada por unidade de área de um filamento de tungstênio à temperatura de 3000K (suponha que o tungstênio é um radiador ideal). b) Qual a área superficial do filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente de 75W) (suponha que a perda de calor do filamento se dá somente por radiação).
19. Uma lâmpada de vapor de sódio tem potência 10W. Usando 589 nm como o comprimento de onda médio da fonte, calcule o número de fótons emitido por segundo. Resp.: $3,0 \times 10^{19}$ /s
20. Calcule λ_{max} para a radiação de corpo negro para a) hélio líquido (4.2 K), b) temperatura ambiente (300 K) e forno de fundição de aço (2500 K). Resp.: a) 0,69 nm b) 9,89 μ m c) 1,16 μ m
21. Calcular a temperatura de um corpo negro se a distribuição espectral tem máximo para: a) raios gama $\lambda = 10^{-14}$ m. b) raios-X, 1 nm. c) luz vermelha, 670 nm. d) ondas de TV, 1m. e) ondas de AM, 200 m.
22. A temperatura de um corpo negro é aumentada de 900 K para 1900 K. Por qual fator aumenta a potência total irradiada por unidade de área? Resp.: 19,9
23. O filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente típica opera à temperatura de 3000 K. Em que comprimento de onda a intensidade da radiação emitida é máxima? Resp.: 966 nm
24. Use um computador para calcular a lei de radiação de Plank para $T=3000$ K, a temperatura típica do filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente. Grafique o intensidade da radiação em função do comprimento de onda. a) Qual a fração da potência é irradiada na região visível? b) qual a razão entre a intensidade a 400 e 700 nm e a do máximo de emissão?
25. Em qual comprimento de onda a radiação emitida pelo corpo humano é máxima? Resp.: 9,35 μ m
26. Uma estação de rádio FM de frequência 107.7 MHz têm potência de 50.000 W. Qual o número de fótons emitidos por segundo?

2.3 Exercícios

27. Quantos fótons por segundo estão contidos num feixe de radiação eletromagnética de potência total 150W se a fonte é: a) uma estação de rádio AM de 1100 kHz , b) raios-X de 8 nm e c) raios gama de 4 MeV ? Resp.: a) $2,06 \times 10^{29}$ b) $6,05 \times 10^{18}$ c) $2,34 \times 10^{14}$