# 36: Apêndice 3: Ótica geométrica



A ótica geométrica é o limite da ótica ondulatória para $\lambda = 0$. Na realidade, a ótica geométrica é uma aproximação que vale quando a difração é desprezível. Isto ocorre quando os obstáculos que as ondas de luz encontram têm dimensões grandes em relação ao comprimento de onda delas. Uma maneira de garantir que isto sempre se verifique é tomar ondas de comprimento bem pequeno. Por isso se diz ``no limite $\lambda = 0$''.

## Equações de Maxwell

Suponhamos que a propagação da luz se dê em um meio material simples, descrito por uma constante dielétrica $\epsilon$ e uma permeabilidade magnética $\mu$. Se o meio for homogêneo e se $\vec{j} = 0$ e $\rho = 0$, teremos as equações de onda

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1018}$$

para o campo elétrico, e

$$\vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \tag{1019}$$

com

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Estas equações seguem diretamente das equações de Maxwell, como vimos anteriormente. Se a onda for monocromática, a dependência temporal será

$$e^{-i\omega t}$$

e a equação 1020 fica

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2}\vec{E} = 0 \tag{1020}$$

e, pondo $k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}\frac{\omega}{c}$, temos

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0\ . \tag{1021}$$

Vamos nos restringir a ondas escalares, ou seja, vamos ignorar que os campos são vetores. Perderemos com isso toda a variedade de fenômenos associados à polarização. No entanto, muitos fenômenos, aqueles que são diretamente associados ao caráter ondulatório, ao fenômeno da interferência, serão ainda razoavelmente descritos. Seja $u$ o campo escalar (por exemplo, uma das componentes de $\vec{E}$). A equação é

$$\vec{\nabla}^2 u + k^2 u = 0\ . \tag{1022}$$

A equação do eikonal

Vamos procurar soluções da forma

$$u = Ae^{ik_0 S} \tag{1023}$$

com $k_0 = \frac{\omega}{c}$, onde $A$ e $S$ são funções de $x, y, z$ que variam lentamente e que não tendem a $\infty$ quando $k_0$ cresce.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (ik_0 u\frac{\partial S}{\partial x} + u\frac{\partial \log A}{\partial x}) \tag{1024}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \{-k_0^2 u(\frac{\partial S}{\partial x})^2 = ik_0 u\frac{\log A}{\partial x})^2 + u\frac{\partial^2 \log A}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + ik_0 u\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \quad (1025)$$

$$+ \; ik_0 u\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial \log A}{\partial x} + u(\frac{\partial \log A}{\partial x})^2 +$$

$$+ \; u\frac{\partial^2 \log A}{\partial x^2}\}$$

com termos análogos para as derivadas em $y$ e $z$. Assim, temos

$$\vec{\nabla}^2 u = \{-k_0^2 u[(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2] + \quad (1026)$$

$$+ \; 2ik_0 u(\frac{\partial \log A}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \log A}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial \log A}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial z}) +$$

$$+ \; ik_0 u(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}) +$$

$$+ \; u[(\frac{\partial \log A}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \log A}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \log A}{\partial z})^2] +$$

$$+ \; u(\frac{\partial^2 \log A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \log A}{\partial z^2})\}$$

Isto pode ser abreviado assim:

$$\vec{\nabla}^2 = -k_0^2 u\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S + 2ik_0 u\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S + ik_0 u\vec{\nabla}^2 S + u\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}\log A + \imath \quad (1027)$$

Logo, a equação fica:

$$k^2 = k_0^2\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S - 2ik_0\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S - ik_0\vec{\nabla}^2 S - \vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}\log A - \vec{\nabla}^2\log A \quad (1028)$$

ou ainda,

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S - \frac{2i}{k_0}\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S - \frac{i}{k_0}\vec{\nabla}^2 S - \frac{1}{k_0^2}\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}\log A - \frac{1}{k_0^2}\vec{\nabla}^2\log \quad (1029)$$

No limite $k_0 \to \infty$, temos

$$\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S = n^2 \quad (1030)$$

e

$$\frac{2i}{k_0}(\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S + \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 S) = 0 \quad (1031)$$

de maneira que as equações são:

$$\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 S \quad (1032)$$

$$\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S = n^2 \quad (1033)$$

que são as equações básicas da ótica geométrica.[41]

### Exemplos $n$ é constante

$$\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S = cte$$

de onde segue que $\vec{\nabla}S = cte$, ou seja,

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

Neste caso

$$\vec{\nabla}S = n(\alpha\vec{\nabla}x + \beta\vec{\nabla}y + \gamma\vec{\nabla}z) = n(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})$$

e

$$\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S = n^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = n^2 \quad (1034)$$

Logo,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\ , \tag{1035}$$

e as superfícies

$$S=n(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\ cte. \tag{1036}$$

são planos. Ora, as superfícies $S=cte.$ são as frentes de onda, logo a propagação aqui descrita é a de ondas planas. Note-se que, se $\vec{n}$ é um vetor unitário, isto é, se $\vec{n}.\vec{n}=1$, temos, com $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,

$$\vec{n}.\vec{r}=n_x x+n_y y+n_z z$$

e

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=1$$

Comparando com a Eq.(1037) vemos que $n_x=n\alpha$, $n_y=n\beta$ e $n_z=n\gamma$, razão pela qual $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são os `` cosenos diretores'' da direção $\vec{n}$.

## Dois meios homogêneos

Vamos ver agora o casode dois meios homogêneos separados por um plano em $x=0$ Temos

$$(\frac{\partial S}{\partial x})^2+(\frac{\partial S}{\partial y})^2+(\frac{\partial S}{\partial z})^2=(\frac{k_1}{k_0})^2\ para\ x<0 \tag{1037}$$

e

$$(\frac{\partial S}{\partial x})^2+(\frac{\partial S}{\partial y})^2+(\frac{\partial S}{\partial z})^2=(\frac{k_2}{k_0})^2\ para\ x>0 \tag{1038}$$

Seja $S$ um plano cuja normal não tem componente ao longo de $z$. Então

$$S(x,y)=\frac{k_1}{k_0}(x\cos\theta_1+y\sin\theta_1)\quad x<0 \tag{1039}$$

$$S(x,y) = \frac{k_2}{k_0}(x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2) \quad x > 0 \tag{1040}$$

Para $x = 0$,

$$\frac{k_1}{k_0} y \sin\theta_1 = \frac{k_2}{k_0} y \sin\theta_2 \tag{1041}$$

ou

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1042}$$

que é a lei de Snell-Descartes.

## Simetria esférica

Considere a seguinte solução da equação do eikonal, dotada de simetria esférica:

$$S = nr \tag{1043}$$

onde $n = |\vec{n}|$ e $r = |\vec{r}|$. Temos $\vec{\nabla} S = n\vec{\nabla} r = n\frac{\vec{r}}{r}$ e, portanto, $\vec{\nabla} S.\vec{\nabla} S = n^2$. As superfícies $S = cte.$ são, neste caso, as superfícies $r = cte.$, ou seja, as frentes de onda são superfícies esféricas com centro na origem. Para que se trate verdadeiramente de uma solução da equação do eikonal, é preciso ainda que a Eq.(1035) seja satisfeita:

$$\vec{\nabla} \log A.\vec{\nabla} S = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 S \tag{1044}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{\nabla} S & = \vec{\nabla}.(n\frac{\vec{r}}{r} = n\{\frac{1}{r}\vec{\nabla}.\vec{r} + \vec{r}.\vec{\nabla}\frac{1}{r}\} \\
& = n\{\frac{3}{r} + \vec{r}.(-\frac{\vec{r}}{r^3})\} = n\{\frac{3}{r} - \frac{1}{r}\} \\
& = \frac{2n}{r}
\end{aligned}$$

ou

$$\vec{\nabla}^2 S = \frac{2n}{r} \tag{1045}$$

É necessário então que

$$\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S = -\frac{n}{r}$$

ou, que

$$\vec{\nabla}\log A.n\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{n}{r}$$

Segue então que

$$\vec{\nabla}\log A.\vec{r} = -1$$

Portanto,

$$\vec{\nabla}\log A = -\frac{\vec{R}}{r^2} \tag{1046}$$

Mas $\vec{\nabla}\log A = \frac{1}{A}\vec{\nabla}A = -\frac{\vec{r}}{r^2}$ e, consequentemente,

$$A = \frac{1}{r} \tag{1047}$$

Podemos então construir a onda $u = Ae^{ik_0S}$ (ver Eq.(1025)).

$$u = \frac{1}{r}e^{ik_0nr} = \frac{1}{r}e^{ikr} = e^{i\sqrt{\epsilon\mu}\frac{\omega}{c}r} \tag{1048}$$

que é a parte espacial de uma onda esférica.

## Curvatura dos raios de luz

Considere a curva descrita pela extremidade do vetor $\vec{r}(s)$, onde $s$ é o comprimento da curva. Seja $\vec{s}$ o vetor tangente à curva em cada ponto. Se a curva for uma reta, a tangente em todos os pontos tem a mesma direção. Em curvas que não são retas, a tangente “gira” quando se percorre a curva. Este movimento da tangente é usado para definir a *curvatura* de uma curva como o vetor

$$\vec{K} = \frac{d\vec{s}}{ds} \tag{1049}$$

Como o vetor tangente é $\vec{s} = \frac{\vec{R}}{ds}$, vemos que a curvatura é $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, ou seja é a "aceleração", se $s$ for tomado como o tempo.

Considere, por exemplo, um círculo, de equação $x^2 + y^2 = R^2$. Temos

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \\ dx &= -R\sin\theta d\theta \\ dy &= R\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

e segue facilmente que

$$ds^2 = R^2\sin^2\theta d\theta^2 + R^2\cos^2\theta d\theta^2 = R^2 d\theta^2$$

ou,

$$ds = Rd\theta$$

Como $\vec{r} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$, temos

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -R\sin\theta\frac{d\theta}{ds}\vec{i} + R\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\vec{j}$$

que dá

$$\vec{s} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Para a curvatura então temos:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{1}{Rd\theta}(-\cos\theta d\theta\vec{i} - \sin thetad\theta\vec{j})$$

ou

$$\vec{K} = -\frac{\vec{R}}{R^2} \qquad (1050)$$

A curvatura é, então, um vetor, cujo módulo é

$$K = \frac{1}{R}$$

A curvatura do círculo é tanto maior quanto menor o raio, o que mostra que a definição acompanha ai deia intuitiva.

Voltemos ao caso geral. Como o vetor tangente $\vec{s}$ tem módulo $1$[42], de $\vec{s}.\vec{s} = 1$ segue que

$$\vec{s}.\frac{d\vec{s}}{ds} = 0 \tag{1051}$$

ou seja, $\frac{d\vec{s}}{ds}$ é perpendicular a $\vec{s}$. Logo, $\frac{d\vec{s}}{ds}$ pode ser escrito na forma

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \vec{A} \times \vec{s} \tag{1052}$$

onde $\vec{A}$ é um vetor a determinar[43]De fato, considere o vetor

$$\vec{A} = a\ rot\vec{s} \tag{1053}$$

onde $a$ é uma constante. Temos $\frac{d\vec{s}}{ds} = a\ rot\vec{s} \times \vec{s}$ e

$$(\frac{d\vec{s}}{ds})_i = \frac{d\vec{s}_i}{ds} = \frac{\partial s_i}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds} = \frac{\partial s_i}{\partial x^l}s^l = (\partial_l s_i)s^l \tag{1054}$$

enquanto

$$\begin{aligned}(rot\vec{s} \times \vec{s})_i &= \epsilon_{ijk}(rot\vec{s})_j\vec{s}_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}(\partial_l s_m)s_k \\ &= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(\partial_l s_m)s_k = (\partial_l s_i)s_l - (\partial_i s_k)s_k\end{aligned}$$

e o último termo é nulo, pois $(\partial_i s_k)s_k = \frac{1}{2}\partial_i(\vec{s})^2$, e $\vec{s}.\vec{s} = 1$. Consequentemente,

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = rot\vec{s} \times \vec{s} \tag{1055}$$

Até agora falamos genericamente de curvas. Consideremos agora curvas que sejam raios de luz. Como vimos anteriormente, os raios de luz são ortogonais às superfícies $S = cte.$, ou seja, têm, em cada ponto dessas superfícies, a direção de $\vec{\nabla}S$. Em símbolos,

$$\vec{s} = \frac{1}{n}\vec{\nabla}S \tag{1056}$$

Daí decorre que

$$rot(n\vec{s}) = 0 \tag{1057}$$

onde usamos o fato conhecido $rot\ grad = 0$. Da Eq.(1059) segue que

$$\begin{aligned} n rot\vec{s} + \vec{\nabla}n \times \vec{s} &= 0 \\ rot\vec{s} &= \frac{1}{n}(\vec{s} \times \vec{\nabla}n) \end{aligned}$$

e, portanto, que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{ds} &= \frac{1}{n}(\vec{s} \times \vec{\nabla}n) \times \vec{s} \\ n\frac{d\vec{s}}{ds} &= (\vec{s} \times \vec{\nabla}n) \times \vec{s} \\ &= (\vec{s}.\vec{s})\vec{\nabla}n - (\vec{s}.\vec{\nabla}n)\vec{s} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$n\vec{K} = \vec{\nabla}n - (\vec{s}.\vec{\nabla}n)\vec{s} \tag{1058}$$

onde $\vec{K}$ é o vetor curvatura do raio. Uma consequência imediata da Eq.(1060) é que em meios homogêneos ( $n$ constante) a curvatura é nula, e os raios são retas. Uma outra aplicação é a seguinte: quando o Sol está muito baixo, no nascente ou no poente, os raios que atingem um observador são aproximadamente horizontais. O índice de refração da atmosfera diminui com a altitude, logo $\vec{\nabla}n$ aponta para o centro da Terra, ou seja, é vertical. Então, na Eq.(1060), o segundo termo do segundo membro é muito pequeno. Conclui-se que a curvatura desses raios é paralela a $\vec{\nabla}n$, apontando para o centro da Terra. Os raios, isto é, se curvam para baixo. Em consequência, o observador, que interpreta sempre o raio como uma reta, “vê” o Sol mais alto do que está na realidade. De fato, isto explica por que se vê o Sol ainda um pouco depois de ele ter se posto.

## Lentes esféricas

No tratamento elementar da ótica geométrica obtém-se, por construções geométricas utilizando a lei de Snell-Descartes, a equação

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \tag{1059}$$

sendo $a$ a distância do objeto à lente (supostamente de espessura desprezível), $b$ a distância da imagem à lente, e $f$ a distância focal da lente, que é dada por

$$\frac{1}{f}=(n-1)(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})$$

sendo $n$ o índice de refração do vidro, $R_1$ e $R_2$ os raios das superfícies esféricas da lente. O significado de $f$ pode ser obtido facilmente da Eq.(1061): tomando-se $a=\infty$, tem-se

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \tag{1060}$$

que mostra ser $f$ a distância a que se forma a imagem quando o objeto está no infinito. Na Eq.(1061) a lente é suposta de espessura zero, e a distância à lente é confundida com a distância ao centro da lente.

Vamos tratar esse problema com o uso da equação do eikonal. Não haverá qualquer dificuldade em tratar o caso de lentes espessas, e o caminho estará aberto também para o tratamento de lentes cujas faces não sejam superfícies esféricas. O ponto $P$ da figura designa a posição do objeto, de coordenadas $x=0$, $y=0$ e $z=0$. O eixo $z$ é a direção de incidência: é a reta que une $P$ ao centro da lente, $O$.

Um raio partido de $P$ e incidente sobre a lente, encontra-a no ponto $T$, pertencente a uma superfície esférica de raio $R_1$ (a primeira face da lente). O centro dessa superfície esférica está no ponto de coordenadas $x=0$, $y=0$

, $z = a + R_1$. As coordenadas de $T$ são $x = 0$, $y = 0$, $z = a$. Um ponto vizinho à lente tem coordenada $z = a + \zeta$, com $|a| \gg |\zeta|$

As ondas esféricas emitidas de $P$ têm o eikonal

$$s = nr = n\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1061)$$

com $n = 1$ (região externa à lente), ou seja, mais explicitamente,

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1062)$$

Perto da primeira face da lente o eikonal é

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + (a + \zeta)^2}$$

Restringindo-nos a pequenas aberturas, basta considerar valores pequenos de $x$ e $y$. Então,

$$S = \sqrt{(a+\zeta)^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{(a+\zeta)^2(1 + \frac{x^2+y^2}{(a+\zeta)^2})} \quad (1063)$$

$$= (a+\zeta)\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{(a+\zeta)^2}} \approx (a+\zeta)(1 + \frac{x^2+y^2}{2(a+\zeta)^2})$$

ou seja,

$$S = a + \zeta + \frac{x^2+y^2}{2a} \quad (1064)$$

A equação da superfície da primeira face da lente é

$$x^2 + y^2 + (z - a - R_1)^2 = R_1^2 \quad (1065)$$

Podemos agora resolver o problema da primeira refração na lente.

## A primeira refração

A figura mostra um raio saindo de $P$ e incidindo sobre a lente, e o raio refratado (que existe só dentro da lente). Prolongando-se o raio refratado até que atinja o eixo da lente, determina-se o ponto $Q_1$. Esse raio, $TQ_1$, existiria se a propagação se desse num meio homogêneo de índice de refração igual ao da lente, $n$. O eikonal do raio refratado é, então,

$$S = n\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a + r)^2} \tag{1066}$$

pois as coordenadas de $Q_1$ são $x = 0$, $y = 0$, $z = -(r - a)$. Para pontos próximos à primeira face da lente temos $z = a + \zeta$, com $|a| \gg |\zeta|$. Então,

$$S = n\sqrt{x^2 + y^2 + (r + \zeta)^2} \tag{1067}$$

ou, aproximadamente,

$$S = n(r + \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2r}) + S_0 \tag{1068}$$

onde $S_0$ é uma constante. Em geral essa constante aditiva é desnecessária, embora esteja sempre presente, já que, sendo a equação do eikonal uma equação para $\vec{\nabla} S$, se um $S$ é solução, $S + S_0$ também o será, $S_0$ sendo uma constante arbitrária. Neste problema que estamos estudando, imporemos a continuidade do eikonal numa determinada superfície, e, para isso ser possível, é necessário incluir o $S_0$.

A condição de contorno é que o eikonal (a fase!) varie continuamente ao atravessar a face da lente. Se isto não lhe parece intuitivo, note que é sob essa condição que se obtém a lei de Snell-Descartes para a refração numa superfície plana, o que pode ser considerado uma “verificação experimenta”' do fato. Para pequenas aberturas os pontos que satisfazem a Eq.(1067) da superfície são tais que

$$x^2+y^2+(\zeta-R_1)^2=R_1^2 \qquad (1069)$$

ou, como $R_1 \gg |\zeta|$,

$$x^2+y^2+R_1^2(1-\frac{\zeta}{R_1})^2=R_1^2 \qquad (1070)$$

ou ainda,

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{2R_1} \qquad (1071)$$

Devemos ter a coincidência dos dois eikonais sobre a superfície da lente. Então,

$$\{a+\zeta+\frac{x^2+y^2}{2a}\}_{Sup}=\{n(r+\zeta+\frac{x^2+y^2}{2r})+S_0\}_{Sup} \qquad (1072)$$

que leva a

$$a+\frac{x^2+y^2}{2R_1}+\frac{x^2+y^2}{2a}=nr+S_0+n\frac{x^2+y^2}{2R_1}+n\frac{x^2+y^2}{2r} \qquad (1073)$$

ou seja,

$$S_0+nr=a \qquad (1074)$$

e

$$\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2a}=\frac{n}{2R_1}+\frac{n}{2r} \qquad (1075)$$

ou ainda

$$\frac{n-1}{R_1}=\frac{1}{a}-\frac{n}{r} \qquad (1076)$$

Esta equção resolve o problema da refração por um dioptro esférico.

## A segunda refração

A equação da segunda face, se $R_2$ é o seu raio e $C$ o seu centro, é

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=R_2^2 \tag{1077}$$

ou

$$x^2+y^2+(z-(R_2-a-d))^2=R_2^2 \tag{1078}$$

Para pontos próximos à segunda face, temos

$$z=a+d+\zeta$$

com $|\zeta| \ll |a+d|$. Então,

$$x^2+y^2+(a+d+\zeta=(a+d-R_2))^2=R_2^2 \tag{1079}$$

ou

$$x^2+y^2+(\zeta+R_2)^2=R_2^2 \tag{1080}$$

e, usando o fato de que $|\zeta|$ é pequeno,

$$x^2+y^2+R_2^2(1+\frac{2\zeta}{R_2})^2=R_2^2 \tag{1081}$$

e, finalmente,

$$x^2+y^2+2\zeta R_2=0 \tag{1082}$$

que podemos por na forma

$$\zeta=-\frac{x^2+y^2}{2R_2} \tag{1083}$$

O eikonal do segundo raio refratado é

$$S=-\sqrt{x^2+y^2+(z-z_{O_2})^2} \tag{1084}$$

onde $z_{O_2}=a+d+b$, o que dá

$$S=-\sqrt{x^2+y^2+(z-a-d-b)^2} \tag{1085}$$

O sinal (-) é devido ao fato de se tratar de uma onda esférica que está se contraindo para o ponto $O_2$. De fato, uma onda esférica que *sai* da origem é

$$\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

ao passo que uma onda esférica que *chega* na origem é dada por

$$\frac{e^{i(-kr-\omega t)}}{r}\ .$$

Perto da segunda face da lente, temos

$$S=-\sqrt{x^2+y^2+(a+d+\zeta-a-d-b)^2} \tag{1086}$$

ou

$$S=-\sqrt{x^2+y^2+(\zeta-b)^2} \tag{1087}$$

Para pequenas aberturas,

$$\begin{aligned} S_2 &= -\sqrt{(b-\zeta)^2(1+\frac{x^2+y^2}{(b-\zeta)^2})} \\ &= -(b-\zeta)(1+\frac{x^2+y^2}{2(b-\zeta)^2}) \\ &= -\{b-\zeta+\frac{x^2+y^2}{2(b-\zeta)} \end{aligned}$$

ou

$$S=-\{b-\zeta+\frac{x^2+y^2}{2b}\} \tag{1088}$$

O eikonal do primeiro raio refratado, quando ele atinge as proximidades da segunda face da lente, é

$$S'=n\sqrt{x^2+y^2+(a+d+\zeta-a+r)^2} \tag{1089}$$

onde resolvemos denotá-lo por $S'$ para distinguí-lo do eikonal do segundo raio refratado. Temos, após uma simplificação,

$$S' = n\sqrt{x^2 + y^2 + (\zeta + d = r)^2} \tag{1090}$$

Para pequenas aberturas,

$$\begin{aligned} S' &= n\sqrt{(r+d+\zeta)^2(1 + \frac{x^2+y^2}{(r+d+\zeta)^2}} \\ &= n(r+d+\zeta)(1 + \frac{x^2+y^2}{2(r+d+\zeta)^2}) \end{aligned}$$

ou, finalmente,

$$S' = n(r + d + \zeta + \frac{x^2+y^2}{2(r+d)}) \tag{1091}$$

Devemos então ter, na segunda face,

$$n(r + d + \zeta + \frac{x^2+y^2}{2(r+d)} + S_0)_{Sup} = -(b - \zeta + \frac{x^2+y^2}{2b})_{Sup} \tag{1092}$$

onde o cálculo deve ser feito para os pontos da segunda superfície da lente, ou seja, para

$$\zeta = -\frac{x^2+y^2}{2R_2} \tag{1093}$$

Temos então

$$n(r + d - \frac{x^2+y^2}{2R_2} + \frac{x^2+y^2}{2(r+d)} + S_0) = -(b + \frac{x^2+y^2}{2R_2} + \frac{x^2+y^2}{2b}) \tag{1094}$$

que dá as equações

$$\mathrm{nr} + \mathrm{nd} + \mathrm{nS}_0 + b = 0 \tag{1095}$$

e

$$-\frac{n}{2R_2}+\frac{n}{2(r+d)}+\frac{1}{2R_2}+\frac{1}{2b})=0 \tag{1096}$$

ou

$$\frac{n-1}{R_2}=\frac{1}{b}+\frac{n}{r+d} \tag{1097}$$

## A equação dos focos conjugados

A solução do problema consiste em combinar as Eqs.(1097) e (1099) para eliminar $r$. Da Eq.(1097) temos

$$\frac{r}{n}=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{n-1}{R_1}} \tag{1098}$$

e, da Eq.(1099),

$$\frac{r+d}{n}=\frac{1}{\frac{n-1}{R_2}-\frac{1}{b}} \tag{1099}$$

Subtraindo a primeira da segunda, temos

$$\frac{d}{n}=\frac{1}{\frac{n-1}{R_2}-\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{n-1}{R_1}-\frac{1}{a}} \tag{1100}$$

que é a equação dos focos conjugados para uma lente de espessura $d$ e para pequenas aberturas. Se $d=0$, obtém-se

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})=\frac{1}{f} \tag{1101}$$

que é a equação usual, para lentes delgadas.