25: Perturbação periódica próxima à ressonância

Considere a perturbação periódica

$$\hat{V} = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{G}e^{i\omega t}$$

de freqüência ω tal que $E_m^{(0)} - E_n^{(0)} = \hbar(\omega + \epsilon)$ onde ϵ é pequeno. A equação básica é (604),

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) a_k \tag{621}$$

com

$$V_{mk}(t) = F_{mk}e^{i(\omega_{mk}-\omega)t} + F^*_{km}e^{i(\omega_{mk}+\omega)t} \tag{622}$$

Esta expressão contém expoentes de tamanhos diversos, um dos quais, ϵ, é particularmente pequeno, aparecendo nas combinações $\omega_{mn} - \omega$ e $\omega_{nm} + \omega$. Como a solução de (604) envolve uma integração do segundo membro no tempo, usaremos o fato de que, quando um integrando possui vários termos oscilantes, a contribuição dominante é a daquele termo que oscila menos. A base matemática rigorosa para isto é o lema de Riemann-Lebesgue[28]. Podemos, então, aproximar as equações (604) por

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = F_{mn}e^{i(\omega_{mn}-\omega)t} = F_{mn}e^{i\epsilon t}a_n \tag{623}$$

e

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = F^*_{mn}e^{-i\epsilon t}a_m \tag{624}$$

Introduzindo a quantidade auxiliar

$$b_n = a_n e^{i\epsilon t}$$

temos, para (624),

$$i\hbar \dot{a}_m = F_{mn} b_n \; . \qquad (625)$$

Substituindo, em (625), a_n em termos de b_n, ficamos com

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left(b_n e^{-i\epsilon t}\right) = F^*_{mn} e^{-i\epsilon t} a_m \qquad (626)$$

ou

$$i\hbar\left(\dot{b}_n - i\epsilon b_n\right) = F^*_{mn} a_m \qquad (627)$$

Derivando mais uma vez,

$$i\hbar\left(\ddot{b}_n - i\epsilon \dot{b}_n\right) = F^*_{mn} \dot{a}_m \qquad (628)$$

que, usada em (626), dá

$$\ddot{b}_n - i\epsilon \dot{b}_n + \frac{1}{\hbar^2}|F_{mn}|^2 b_n = 0 \qquad (629)$$

Trata-se agora de resolver esta equação diferencial linear a coeficientes constantes. Para isto existe um algoritmo bem conhecido: como todas as soluções de equações deste tipo podem ser escritas como exponenciais, procura-se a solução como uma exponencial genérica, escrita como

$$b_n = e^{at}$$

com a a determinar. Temos $\dot{b}_n = a e^{at}$ e $\ddot{b}_n = a^2 e^{at}$. Inserindo estas expressões em (630) e cancelando a exponencial comum, obtemos

$$a^2 - i\epsilon a + \frac{1}{\hbar^2}|F_{mn}|^2 = 0 \qquad (630)$$

que é um equação do segundo grau. As soluções são

$$a = i\epsilon \pm \sqrt{-\epsilon^2 - \frac{4}{\hbar^2}|F_{mn}|^2}\,\tfrac{}{2} \qquad (631)$$

Para simplificar esta expressão introduzimos algumas abreviações:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{F_{mn}}{\hbar} \\ \Omega &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + |\eta|^2} \end{aligned}$$

Usando esta notação as soluções (632) podem ser escritas

$$\begin{aligned} a_1 &= i\frac{\epsilon}{2} + i\Omega \\ a_2 &= \frac{i\epsilon}{2} - i\Omega \end{aligned}$$

e, portanto,

$$b_n^{(1)} = e^{i\left(\frac{\epsilon}{2}+\Omega\right)t} \qquad (632)$$

$$b_n^{(2)} = e^{i\left(\frac{\epsilon}{2}-\Omega\right)t} \qquad (633)$$

Como $a_n = b_n e^{-i\epsilon t}$, obtemos

$$a_n^{(1)} = e^{i\left(-\frac{\epsilon}{2}+\Omega\right)t} \qquad (634)$$

$$a_n^{(2)} = e^{i\left(-\frac{\epsilon}{2}-\Omega\right)t} \qquad (635)$$

Finalmente, introduzindo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\epsilon}{2} + \Omega \\ \alpha_2 &= \frac{\epsilon}{2} + \Omega \end{aligned}$$

chegamos a

$$a_n^{(1)} = Ae^{i\alpha_1 t} \tag{636}$$

$$a_n^{(2)} = Be^{-i\alpha_2 t} \tag{637}$$

$$a_m^{(1)} = -\frac{A\hbar\alpha_1}{F_{mn}^*}e^{i\alpha_1 t} \tag{638}$$

$$a_m^{(2)} = \frac{B\hbar\alpha_2}{F_{mn}^*}e^{-i\alpha_2 t} \tag{639}$$

onde, para obter as duas últimas, usamos a eq.(625).

Note-se que um par ($a_n^{(i)}, a_m^{(i)}$) representa uma função de onda

$$a_n^{(i)}\psi_n^{(0)} + a_m^{(i)}\psi_m^{(0)} \tag{640}$$

A solução mais geral é dada por uma combinação linear dessas soluções, para $i = 1$ e $i = 2$. Como cada uma já foi escrita com uma constante multiplicativa arbitrária, temos

$$\psi = \left(a_n^{(1)} + a_n^{(2)}\right)\psi_n^{(0)} + \left(a_m^{(1)} + a_m^{(2)}\right)\psi_m^{(0)} \tag{641}$$

ou

$$\psi = \left(Ae^{i\alpha_1 t} + Be^{-i\alpha_2 t}\right)\psi_n^{(0)} + \left(-\frac{A\hbar\alpha_1}{F_{mn}^*}e^{i\alpha_1 t} + \frac{B\hbar\alpha_2}{F_{mn}^*}e^{-i\alpha_2 t}\right)\psi_m^{(0)} \tag{642}$$

Como condição inicial, queremos que, para $t=0$, $\psi=\psi_m^{(0)}$. Tomando $t=0$ na eq.(643), vemos que devemos ter

$$A+B=0 \tag{643}$$

$$\frac{\hbar}{F_{mn}^*}\left(-A\alpha_1+B\alpha_2\right)=1 \tag{644}$$

Consequentemente,

$$B=-A=\frac{F_{mn}^*}{\hbar(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{645}$$

Note-se ainda que $\alpha_1+\alpha_2=2\Omega$. A expressão para ψ é, então:

$$\psi=\frac{1}{2\Omega}\left(\alpha_1 e^{i\alpha_1 t}+\alpha_2 e^{-i\alpha_2 t}\right)\psi_m^{(0)}-\frac{F_{mn}^*}{2\hbar\Omega}\left(e^{i\alpha_1 t}-e^{-i\alpha_2 t}\right)\psi_n^{(0)} \tag{646}$$

O coeficiente de $\psi_m^{(0)}$ na equação anterior, depois de alguma álgebra, é escrito:

$$e^{-i\frac{\epsilon}{2}t}\left[\cos\Omega t-\frac{i\epsilon}{2\Omega}\sin\Omega t\right] \tag{647}$$

e o de $\psi_n^{(0)}$ dá

$$-i\frac{\eta^*}{\Omega}e^{-i\frac{\epsilon}{2}t}\sin\Omega t \tag{648}$$

de modo que

$$\psi=e^{-i\frac{\epsilon}{2}t}\left[\left(\cos\Omega t-\frac{i\epsilon}{2\Omega}\sin\Omega t\right)\psi_m^{(0)}-i\frac{\eta^*}{\Omega}\sin\Omega t\ \psi_n^{(0)}\right] \tag{649}$$

O sistema inicia (em $t=0$) no estado $\psi_m^{(0)}$. A probabilidade de ele estar, no instante t, no estado $\psi_n^{(0)}$, é dada pelo quadrado do módulo do coeficiente de $\psi_n^{(0)}$, que é

$$\frac{|\eta|^2}{\omega^2}\sin^2\Omega t = \frac{|\eta|^2}{2\Omega^2}(1-\cos 2\Omega t) \tag{650}$$

Na ressonância, isto é, para $\epsilon = 0$, temos $\Omega = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4}+|\eta|^2} = |\eta|$, logo, a probabilidade da transição é dada por

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2|\eta|t) \tag{651}$$

que varia periodicamente entre 0 e 1. Isto significa que, na ressonância, o sistema realiza transições periódicas entre $\psi_m^{(0)}$ e $\psi_n^{(0)}$. Note que a frequência dessas transições não depende de nenhuma das frequências presentes: ela é determinada por $|\eta|$, ou seja, pela intensidade da perturbação.