21: As desigualdades de Heisenberg

- A relação de incerteza energia x tempo

Nesta seção vamos apresentar um tratamento formal do princípio da incerteza, e deduzir as famosas desigualdades de Heisenberg. A mais famosa delas é:

$$\Delta p_i \Delta q_j \geq \hbar \delta_{ij} \tag{456}$$

Em todo espaço dotado de um produto escalar, vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz, que diz que

$$—(\psi, \phi)|^2 \leq |\psi|^2 |\phi|^2 \tag{457}$$

ou, mais explicitamente,

$$\left(\int dq \psi^*(q)\phi(q)\right)^2 \leq \int dq \psi^*(q)\psi(q) \int dq' \phi^*(q')\phi(q') \tag{458}$$

Seja $\hat{O}$ um operador hermiteano, e ψ um estado do sistema. Considere o operador

$$\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle \hat{1}$$

onde

$$\langle \hat{O} \rangle = (\psi, \hat{O}\psi) = \int dq \psi^*(q) \hat{O} \psi(q)$$

Chama-se desvio padrão de $\hat{O}$ no estado ψ o número

$$(\Delta O)^2 = \langle (\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle)^2 \rangle \tag{459}$$

Entre os físicos, ΔO é denominada incerteza de $\hat{O}$ no estado ψ. Sejam $\hat{A}$ e $\hat{B}$ operadores hermiteanos, e

$$\psi_A = (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)\psi \tag{460}$$

$$\psi_B \;=\; (\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)\psi \qquad (461)$$

dois estados.

É imediato verificar que

$$(\Delta A)^2 \;=\; (\psi_A, \psi_A) \qquad (462)$$

$$(\Delta B)^2 \;=\; (\psi_B, \psi_B) \qquad (463)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$||\psi_A||^2||\psi_B||^2 \geq |(\psi_A, \psi_B)|^2 \qquad (464)$$

Por outro lado, para qualquer complexo z, temos

$$|z|^2 = (\Im(z))^2 + (\Re(z))^2 \geq (\Im(z))^2 = \left(\frac{1}{2i}(z - z^*)\right)^2$$

Logo,

$$|(\psi_A, \psi_B)|^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left[(\psi_A, \psi_B) - (\psi_B, \psi_A)\right]\right)^2$$

Ora,

$$(\psi_A, \psi_B) = \left((\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)\psi, (\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)\psi\right)$$

$$= (\psi, \hat{A}\hat{B}\psi) - \langle\hat{B}\rangle(\psi, \hat{A}\psi) - \hat{A}(\psi, \hat{B}\psi) + \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle$$

Segue imediatamente que

$$(\psi_A, \psi_B) - (\psi_B, \psi_A) = \left(\psi, [\hat{A}, \hat{B}]\psi\right) \qquad (465)$$

e, da Eq.(465), que

$$\|\psi_A\|^2\|\psi_B\|^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2 \quad (466)$$

ou, em notação mais familiar,

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2 \quad (467)$$

que são as relações de incerteza de Heisenberg.

Exemplo: seja $\hat{A}=\hat{p}_x$, e $\hat{B}=\hat{x}$. Então,

$$(\Delta p_x)^2(\Delta x)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle -i\hbar\rangle\right)^2$$

$$(\Delta p_x)^2(\Delta x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

e, finalmente,

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Exercício: determine Δp_x e Δx para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. Mostre que:

(a) $\Delta p_x = \frac{\hbar}{\sqrt{3}a_0}$.

(b) $\Delta x = \sqrt{2}a_0$.

(c) $\Delta p_x \Delta x = \frac{2}{3}\hbar$

(d) Conclua que o movimento do elétron é $\approx$ o mínimo possível compatível com as relações de incerteza.

A relação de incerteza energia x tempo

A relação de incerteza energia-tempo é de natureza fundamentalmente diferente daquela da relação de incerteza posição-momento. Enquanto esta última é consequência do fato de que os operadores $\hat{\vec{p}}_x$ e $\hat{x}$ não comutam, isto não acontece no caso da energia-tempo: nem mesmo existe um operador ``tempo'' na mecânica quântica. O tempo que aparece na equação de Schroedinger é o tempo marcado por qualquer relógio, e pode ser determinado, em qualquer caso, com precisão arbitrária. O fato básico na obtenção da desigualdade

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \tag{468}$$

é o seguinte: devido à relação de Planck, $E = h\nu$, onde ν é uma frequência, temos, na mecânica quântica, que **uma medida da energia é sempre uma medida de frequência**(Bohr).

A relação de incerteza 469 deve ser interpretada assim: uma medida perfeita da energia de um sistema ($\Delta E = 0$) leva um tempo infinito ($\Delta t \geq \frac{\hbar}{\Delta E}$). A expressão 469 ensina quanto deve durar, no mínimo, o processo de medida (a duração é Δt) para que a precisão obtida seja ΔE.

Para obter 469, consideremos o processo de determinar a frequência de uma onda. Matematicamente se sabe que a transformada de Fourier de uma onda nos dá a informação sobre quais frequências participaram da construção da onda, por meio de superposição de ondas monocromáticas (isto é, de frequências bem definidas).

Uma onda plana monocromática tem sua dependência temporal dada por $e^{i\omega_0 t}$, se sua frequência for ω_0.[23] Sua transformada de Fourier é

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \ , \tag{469}$$

logo,

$$f(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \ , \tag{470}$$

mostrando, como era de se esperar, que $f(\omega)$ é zero exceto para $\omega = \omega_0$.

Na prática, porém, a medida da freqüência da onda $e^{i\omega_0 t}$ é feita observando-se essa onda durante um intervalo de tempo finito, por exemplo, do instante $\frac{-\Delta t}{2}$ até o instante $\frac{\Delta t}{2}$. Mas então a onda que **realmente** observamos é indistinguível da seguinte onda u:

$$
\begin{aligned}
u &= 0 \;:\; t < -\frac{\Delta t}{2} \\
&= e^{-i\omega_0 t} \;:\; t \in [-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}] \\
&= 0 \;:\; t > \frac{\Delta t}{2} \;.
\end{aligned}
\tag{471}
$$

A transformada de Fourier da onda (472) é:

$$f'(\omega) = \int_{\frac{-\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt \tag{472}$$

ou seja,

$$f'(\omega) = \frac{1}{i(\omega-\omega_0)} (e^{i(\omega-\omega_0)\frac{\Delta t}{2}} - e^{-i(\omega-\omega_0)\frac{\Delta t}{2}}) \tag{473}$$

ou

$$f'(\omega) = \frac{2}{\omega-\omega_0} \sin[(\omega-\omega_0)\frac{\Delta t}{2}]$$

e, ainda,

$$f'(\omega) = \Delta t \frac{\sin[(\omega-\omega_0)\frac{\Delta t}{2}]}{(\omega-\omega_0)\frac{\Delta t}{2}} \tag{474}$$

Esta função tem um gráfico que apresenta um pico pronunciado para $\omega = \omega_0$, onde tem o valor 1, e corta o eixo ω, ou seja, atinge o valor zero, pela primeira vez num ponto P tal que, nele, $(\omega - \omega_0)\frac{\Delta t}{2} = \pi$, ou seja,

$$\omega - \omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta t} \ . \tag{475}$$

Este valor de $\omega - \omega_0$ pode ser definido como a metade da "largura"' de $f'(\omega)$. Logo, esta largura é

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{\Delta t} \ , \tag{476}$$

onde Δt é a duração do processo de medida de ω. $\Delta\omega$ representa a incerteza na frequência, ou seja, informa que as frequências presentes na onda u estão entre $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ e $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$. Temos, então,

$$\Delta\omega\Delta t = 4\pi \tag{477}$$

e, multiplicando por $\hbar$,

$$\Delta E\Delta t = 4\pi\hbar \ . \tag{478}$$

É claro que podemos, neste mesmo intervalo de tempo, ser mais descuidados e cometer erros ΔE maiores. Logo, o resultado geral é

$$\Delta E\Delta t \geq 4\pi\hbar \tag{479}$$