11: Algumas técnicas matemáticas

- A função delta de Dirac
- Integral de Fourier

A função delta de Dirac

Considere a função $\delta_\epsilon(p)$, definida assim:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(p) &= 0 \ \ para \ \ p > \epsilon \\ \delta_\epsilon(p) &= 0 \ \ para \ \ p < -\epsilon \\ \delta_\epsilon(p) &= \frac{1}{2\epsilon} \ \ para \ \ -\epsilon < p < \epsilon \end{aligned}$$

Temos, claramente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(p)dp = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon}dp = 1 \tag{181}$$

Seja $f(p)$ uma função contínua. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p')\delta_\epsilon(p-p')dp' = \int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} \frac{f(p')}{2\epsilon}dp' = \frac{1}{2\epsilon}\int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} f(p')dp' \tag{182}$$

No limite para $\epsilon \longrightarrow 0$, esta última integral dá

$$2\epsilon f(p)$$

de forma que a Eq.(182) pode ser escrita

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p')\delta_\epsilon(p-p')dp' = f(p) \tag{183}$$

A função delta de Dirac, $\delta(p)$ é definida, simbolicamente, como o limite, para $\epsilon \longrightarrow 0$, da função $\delta_\epsilon(p)$. Suas propriedades, que podem ser motivadas por esse limite, podem ser sintetizadas assim:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx &= 1 \\
\delta(x) &= 0 \;\; para \;\; x \neq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x-a) &= f(a)
\end{aligned}
$$

Nessas relações a integral não precisa realmente ir de $-\infty$ a ∞ Basta que seja em um intervalo que contenha o ponto em que o argumento da função delta se anula.

Estritamente, tal função não existe. Trata-se de um símbolo que abrevia muito os cálculos. Atendo-se às regras exibidas, nenhum dano é causado, a não ser à lógica, a vítima usual. A teoria que justifica essas operações e restitui a implacabilidade da lógica foi desenvolvida pelo grande matemático francês Laurent Schwartz, e se chama ``teoria das distribuições''. Para um tratamento adequado da ``função delta'' recomendamos as notas que se encontram no site do professor João Carlos Alves Barata,no endereço:

http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap12.pdf

Outras relações importantes envolvendo a "função delta" são as seguintes:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tag{184}$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{185}$$

$$\delta\left(f(x)\right) = \frac{1}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_0}}\delta(x-x_0) \;\; ,sendo \;\; f(x_0)=0 \tag{186}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{187}$$

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{188}$$

onde, nesta última, se tem $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Integral de Fourier

A integral de Fourier é instrumento fundamental na mecânica quântica. Trata-se de uma extensão das séries de Fourier que permite obter expansões de funções que não são periódicas. Este não é o lugar para se adquirir fluência no uso, e uma boa compreensão dos métodos da análise de Fourier. O leitor deverá dedicar algum estudo a este tópico, presente em todos os livros de física-matemática. De minha parte recomendo o livro de Arnold Sommerfeld, *Partial Differential Equations of Physics*. Um belíssimo livro de matemática sobre este mesmo tema, é Körner, *Fourier Analysis*, um dos livros mais bonitos que já li.

A integral, ou transformada, de Fourier de uma função $f(x)$, é uma função $\tilde{f}(k)$ a ela ligada pelas relações

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \tag{189}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \tag{190}$$

Pode-se verificar a consistência dessas relações com o uso da funçao $\delta(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} \right) e^{ikx} \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x-y) = f(x) \end{aligned}$$

A transformada de Fourier de uma função constante, $f(x) = K$, é:

$$f(\tilde{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx K e^{-ikx} = K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} = K\delta(x)$$

ou seja, a transformada de Fourier de uma constante é um múltiplo de $\delta(x)$. Um outro resultado importante é a transformada de Fourier de uma gaussiana: seja $f(x) = \exp^{-\alpha x^2}$ Sua transformada de Fourier é

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

ou seja, a transformada de Fourier de uma gaussiana é outra gaussiana