

1: Princípio de Huygens

Neste capítulo vamos considerar o fenômeno da difração da radiação eletromagnética, que é consequência da natureza ondulatória da luz. Ela se constitui da distorção causada numa onda eletromagnética que incide sobre um obstáculo de dimensões comparáveis ao seu comprimento de onda. Estes obstáculos podem ser aberturas num anteparo, objetos opacos tais como esferas, discos e outros. Em todos esses casos, o caminho seguido pelo raio não obedece às leis da óptica geométrica, sendo desviado sem haver mudanças no índice de refração do meio. Assim, temos a presença de radiação em locais nos quais ela não seria esperada, como em regiões de sombra indicadas Fig. 9.1. É como se a interação da radiação com as bordas do anteparo, ou do obstáculo, causasse uma perturbação na radiação em propagação e a espalhasse por regiões onde ela não deveria normalmente ser detectada. Como vimos no Cap. 2, este efeito é equivalente ao princípio da incerteza de Heisenberg, já que as equações do campo eletromagnético e a de Schrödinger são formalmente iguais.

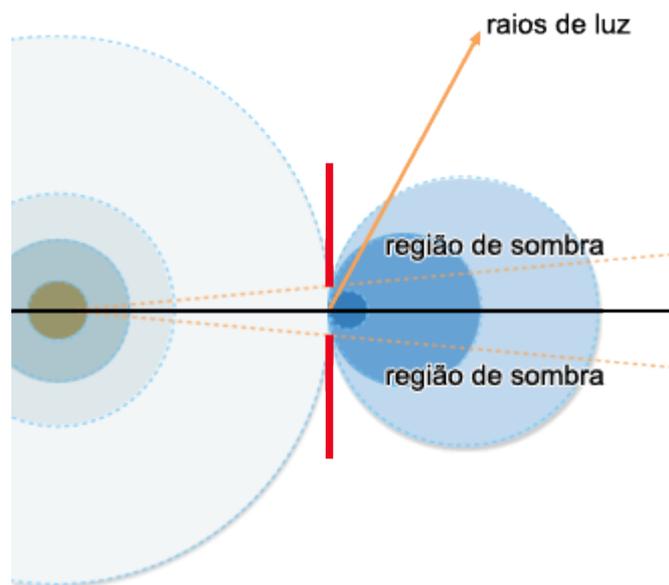


Fig. 9.1 - Ilustração de um experimento de difração em uma abertura.

Os aspectos essenciais da difração podem ser explicados qualitativamente

Autor: Sergio Carlos Zilio

pelo princípio de Huygens. Segundo ele, cada ponto na frente de onda age como uma fonte produzindo ondas secundárias que espalham em todas as direções. A função envelope das frentes de onda das ondas secundárias forma a nova frente de onda total. A Fig. 9.2 ilustra este fato. Com este princípio podemos perceber que cada nova frente no instante t' de onda é formada pela *interferência* de infinitas fontes, as quais estão irradiando a partir da frente de onda no instante t . Isto pode ser traduzido em forma matemática dizendo-se que em cada ponto da nova frente de onda teremos um campo óptico que é igual à soma dos campos irradiados por todas as fontes secundárias. Note que o fenômeno de difração está fortemente baseado no de interferência. Como o número de fontes é infinito, as somas dos campos referentes a cada fonte secundária se transformará numa integral.

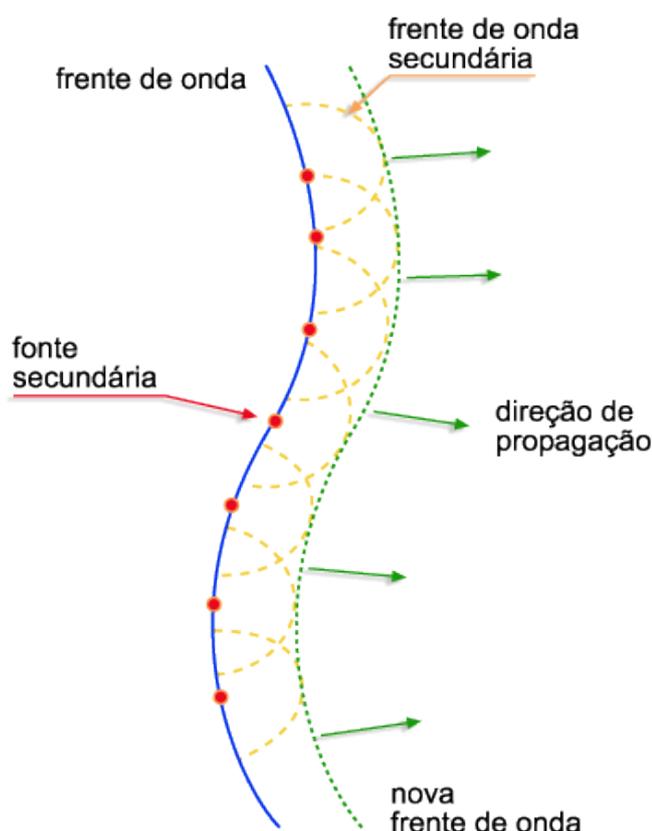


Fig. 9.2 – Ilustração do princípio de Huygens para a construção geométrica de uma frente de onda, a partir de uma frente de onda anterior.

Autor: Sergio Carlos Zilio

O princípio de Huygens pode ser enunciado matematicamente pela soma (integral) das várias ondas secundárias geradas numa área iluminada, como por exemplo uma fenda. A geometria para esta situação está esquematizada na Fig. 9.3. A equação resultante de várias ondas secundárias no ponto P é:

$$U(P) = \iint_A U_A \frac{\exp\{i(kr_2 - \omega t)\}}{r_2} dA$$

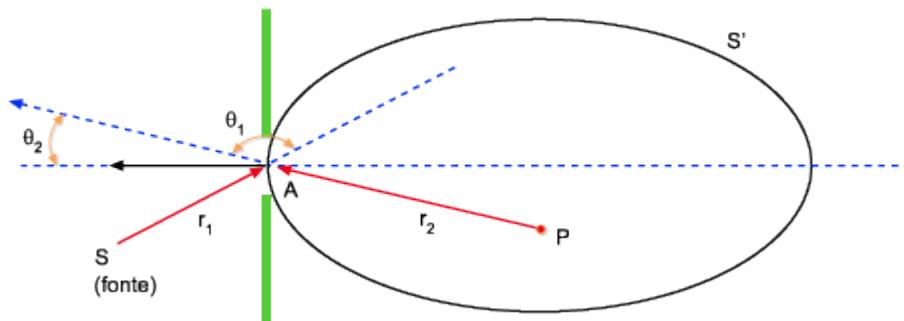


Fig. 9.3 - Difração por uma fenda de área A.

onde U_A é a amplitude da onda primária que se origina na fonte S e ilumina a fenda. A partir dela, cada elemento dA da abertura gera uma onda esférica secundária que interfere no ponto P com outras ondas esféricas geradas em diferentes elementos da abertura. Vamos em seguida ver com mais detalhes matemáticos a obtenção da eq.

$$U(P) = \iint_A U_A \frac{\exp\{i(kr_2 - \omega t)\}}{r_2} dA.$$

2: Fórmula de Fresnel-Kirchhoff

Após a abordagem inicial realizada por Fresnel, um tratamento matemático mais preciso do princípio de Huygens foi proposto por Kirchhoff, da forma como segue. Vamos partir da segunda identidade de Green, que é expressa como:

$$I = \iiint_v (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) dv = \iint_A (V \vec{\nabla} U - U \vec{\nabla} V) d\vec{a}$$

onde U e V são funções contínuas e integráveis que obedecem a equação de ondas:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\nabla^2 U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Note que o meio é homogêneo, logo v não depende de r . As soluções da equação de ondas são da forma:

$$U(r, t) = U(r) \exp\{\pm i\omega t\}$$

$$UV(r, t) = V(r) \exp\{\pm i\omega t\}$$

que quando substituídas nas equações $\nabla^2 U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ e $\nabla^2 V = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

resultam em:

$$\nabla^2 U = -\frac{\omega^2}{v^2} U(r)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\omega^2}{v^2} UV(r)$$

Com isto notamos que o integrando do lado esquerdo da

eq. $I = \iiint_v (V\nabla^2 U - U\nabla^2 V) dv = \iint_A (V\vec{\nabla}U - U\vec{\nabla}V) d\vec{a}$ é nulo, isto é,

$$V\nabla^2 U - U\nabla^2 V = -\frac{\omega^2}{v^2} (VU - UV) = 0$$

Assim, $\iint_A (V\vec{\nabla}U - U\vec{\nabla}V) \hat{n} dS = 0$ A superfície fechada A envolve o volume de

interesse, que podemos tomar como sendo aquele da Fig. 9.4. Neste caso,

podemos dividir a integral em duas regiões, S_1 e S_2 , tal que: $\iint_A = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} \dots$

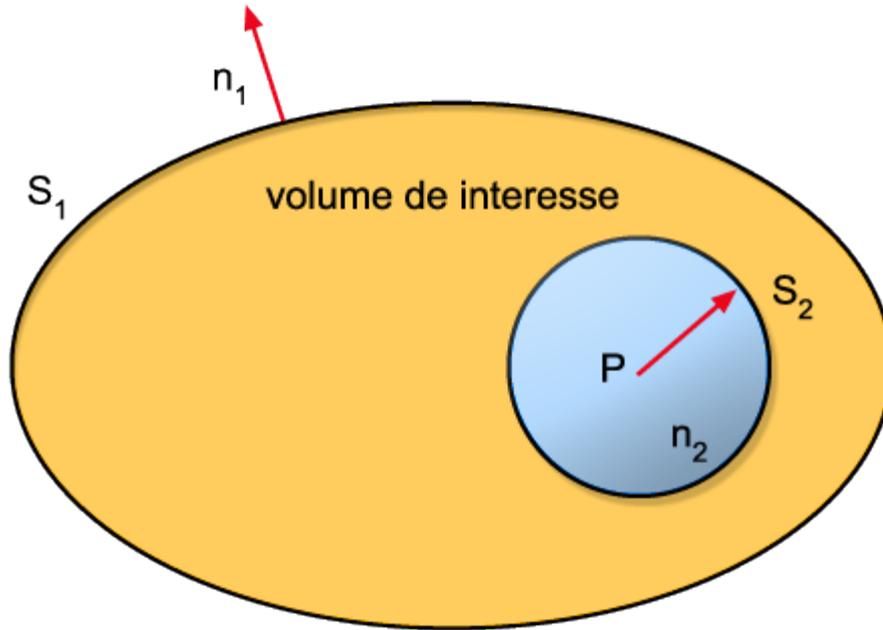


Fig. 9.4 - Geometria utilizada para o cálculo da integral de superfície

Queremos encontrar o valor da função U no ponto de observação P e para isto tomaremos $V(r,t)$ como sendo uma onda esférica da forma $V(r,t) = V_a \exp\{i(kr - \omega t)\} / r$. O gradiente em coordenadas esféricas é dado por:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

de forma que a integral de superfície em S_2 fica:

$$J = \iint_{S_2} (V \vec{\nabla} U - U \vec{\nabla} V) \hat{n}_2 dS_2 = \iint_{S_2} \left[\frac{V_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{\nabla} U - UV_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\exp\{i(kr - \omega t)\}}{r} \right) \right] \hat{n}_2 dS_2$$

onde $dS_2 = p^2 d\Omega$ e $\hat{n}_2 = -\hat{e}_r$, que substituídos na

eq. $\iint_{S_2} \left[\frac{V_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{\nabla} U - UV_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\exp\{i(kr - \omega t)\}}{r} \right) \right] \hat{n}_2 dS_2$ resulta em:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$= V_0 e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{ik\rho}}{\rho} (\vec{\nabla} U)_{r=\rho} + U e^{ik\rho} \left(-\frac{1}{\rho^2} + \frac{ik}{\rho} \right) \right] \rho^2 d\Omega$$

Tomando o limite $\rho \rightarrow 0$

obtemos $J = -V_0 \exp\{-i\omega t\} U(P) \int d\Omega = -4\pi V_0 \exp\{-i\omega t\} U(P)$.

Logo, $\iint_A = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$ 0 como temos:

$$\begin{aligned} -4\pi V_0 \exp\{-i\omega t\} U(P) &= \iint_{S_1} (V \vec{\nabla} U - U \vec{\nabla} V) \hat{n}_1 dS_1 = \\ &= \iint_{S_2} \left[V_0 \frac{\exp\{i(kr - \omega t)\}}{r} \vec{\nabla} U - UV_0 \exp\{i(kr - \omega t)\} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \right] \hat{n}_1 dS_1 \end{aligned}$$

que nos leva à equação básica da teoria da difração:

$$4\pi U(P) = \iint_{S_1} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} U - U \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \hat{e}_r e^{ikr} \right] \hat{n}_1 dS_1$$

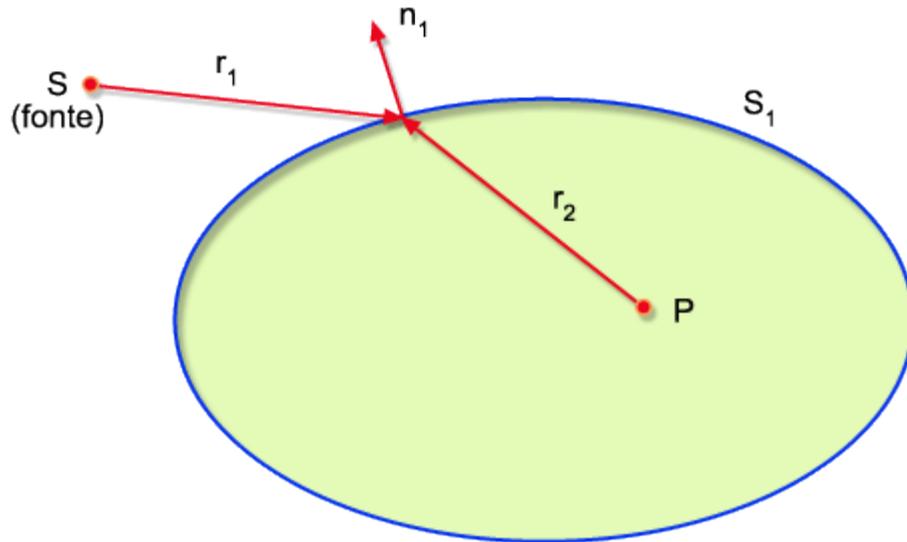
Esta expressão é chamada de *teorema integral de Kirchhoff*. Ela relaciona o valor da função no ponto de observação P com valores desta função e sua derivada sobre a superfície S_1 que envolve o ponto P. Como tomamos $\rho \rightarrow 0$, a Fig. 9.4 se modifica da maneira mostrada na Fig. 9.5. Particularizando a

$$\text{eq. } 4\pi U(P) = \iint_{S_1} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} U - U \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \hat{e}_r e^{ikr} \right] \hat{n}_1 dS_1 \text{ para o caso em que}$$

U é também uma onda esférica da forma:

$$U(r_1, t) = \frac{U_0}{r_1} \exp\{i(kr_1 - \omega t)\}$$

o *teorema integral de Kirchhoff* pode ser escrito de forma mais explícita como:

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 9.5 - Geometria usada no cálculo da integral Kirchhoff.**

$$4\pi U(P) = ikU_0 e^{-i\omega t} \iint_{S_1} \frac{\exp\{ik(r_1 + r_2)\}}{r_1 r_2} [\cos(\hat{n}_1, r_1) - \cos(\hat{n}_1, r_2)] dS_1$$

$$- ikU_0 e^{-i\omega t} \iint_{S_1} \left[\frac{e^{ikr_2}}{r_2 r_1^2} \cos(\hat{n}_1, r_1) - \frac{e^{ikr_1}}{r_1 r_2^2} \cos(\hat{n}_1, r_2) \right] dS_1$$

Nos fenômenos de difração r_1 e r_2 são geralmente grandes, de forma que podemos desprezar o segundo termo. Assim obtemos:

$$U(P) \approx \frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\exp\{ik(r_1 + r_2)\}}{r_1 r_2} [\cos(\hat{n}_1, r_1) - \cos(\hat{n}_1, r_2)] dS_1$$

Esta é a conhecida *fórmula de Fresnel-Kirchhoff*. Vamos especializá-la para o caso de difração por uma fenda de área A , na geometria da Fig. 9.3, com $S_1 = S' + A$. Pode-se mostrar que a integral sobre S' é desprezível e assim,

$$U(P) \approx \frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\exp\{ik(r_1 + r_2)\}}{r_1 r_2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) dA$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

onde $(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ é chamado de fator de obliquidade. A fórmula de Fresnel-Kirchhoff nada mais é do que a afirmação matemática do princípio de Huygens. Para examinar melhor este ponto vamos tomar uma abertura circular com a fonte S localizada no eixo de simetria da abertura conforme mostra a Fig. 9.6. A superfície de integração A é um pedaço de casca esférica de raio r_1 e centro S de forma que $\theta_1 = \pi$. Logo:

$$U(P) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_A \frac{\exp\{i(kr_2 - \omega t)\}}{r_2} (1 + \cos\theta_2) dA$$

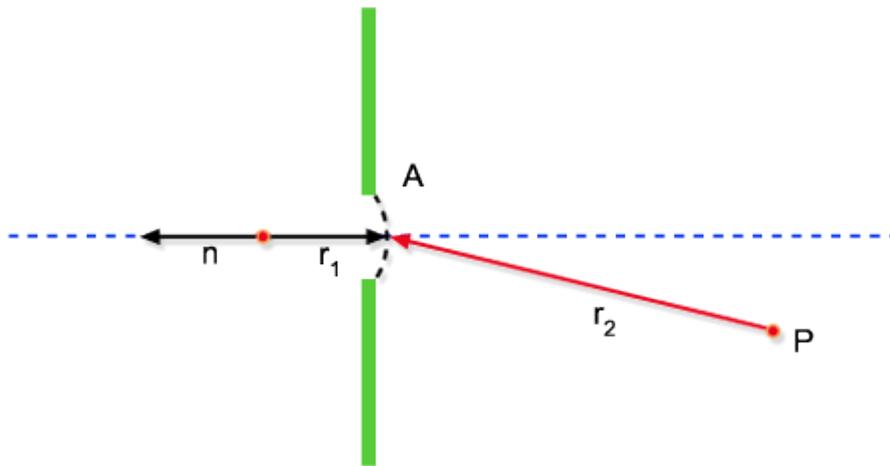


Fig. 9.6 - Difração em uma fenda circular.

onde $U_A = U_0 \exp\{ikr_1\} / r_1$ é a amplitude da onda primária incidente. A partir dela, cada elemento dA da abertura gera uma onda esférica secundária $U_A \left[\exp\{i(kr_2 - \omega t)\} / r_2 \right] dA$. No princípio de Huygens não existe o fator de obliquidade nem a fase $-\frac{\pi}{2}$ introduzida no campo pela difração.

Note que a difração na direção da fonte é zero pois $\theta_2 \approx \pi$ e o fator de obliquidade é nulo.

Autor: Sergio Carlos Zilio

3: Princípio de Babinet

Considere uma abertura A que produz um campo difratado $U(P)$ no ponto de observação P . Suponha agora que a abertura é dividida em duas porções A_1 e A_2 tal que $A = A_1 + A_2$. As duas novas aberturas são ditas complementares. Um exemplo está mostrado na Fig. 9.7.

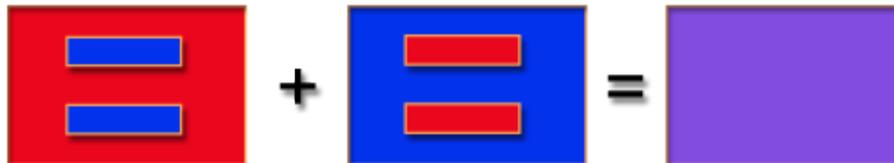


Fig. 9.7 - Exemplo e a geometria do princípio de Babinet.

Da fórmula de Fresnel-Kirchhoff é fácil ver que $U(P) = U_1(P) + U_2(P)$. Esta equação, conhecida como princípio de Babinet, é uma consequência direta da possibilidade de divisão da região de integração em diversas partes.

4: Difração de Fraunhofer

No tratamento detalhado da difração é usual distinguir-se dois casos gerais conhecidos como difração de Fraunhofer e Fresnel. Qualitativamente falando, a difração de Fraunhofer ocorre quando as ondas incidente e difratada são planas. Este é o caso quando as distâncias r_1 e r_2 são tão grandes que a curvatura da frente de onda pode ser desprezada, como mostra a Fig. 9.8(a). Por outro lado, se a fonte e o ponto de observação estão suficientemente próximos da abertura temos então difração de Fresnel (Fig. 9.8(b)).

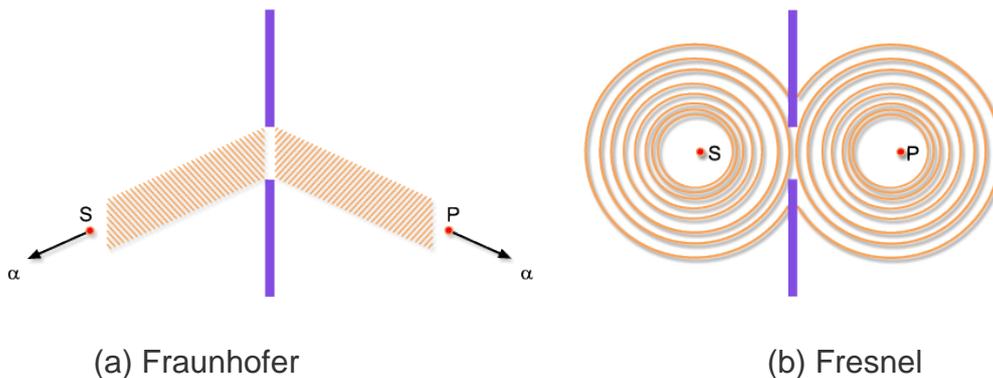


Fig. 9.8 - Tipos de difração.

Autor: Sergio Carlos Zilio

O arranjo experimental para se observar difração de Fraunhofer está mostrado na Fig. 9.9. Em particular, vamos analisar o caso da difração pela fenda estreita mostrada na Fig. 9.10. O campo elétrico no ponto P será dado por:

$$U(P) = \frac{ikU_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \iint_A \frac{\exp\{ik(r_1 + r_2)\}}{r_1 r_2} [\cos(\hat{n}, r_1) - \cos(\hat{n}, r_2)] dA$$

onde r_1 e r_2 são respectivamente as distâncias de S e P ao elemento de área dA . Levando-se em conta que os pontos S e P estão infinitamente afastados, de forma que r_1 e r_2 não variam muito ao fazer-se a integração sobre A, podemos escrever:

$$U(P) \approx \underbrace{\frac{ike^{-i\omega t} U_0}{4\pi} \left[\frac{\cos(\hat{n}, r_1) - \cos(\hat{n}, r_2)}{r_1 r_2} \right]}_c \iint_A \exp\{ik(r_1 + r_2)\} dA$$

Fig. 9.9 - Arranjo para observar difração de Fraunhofer.

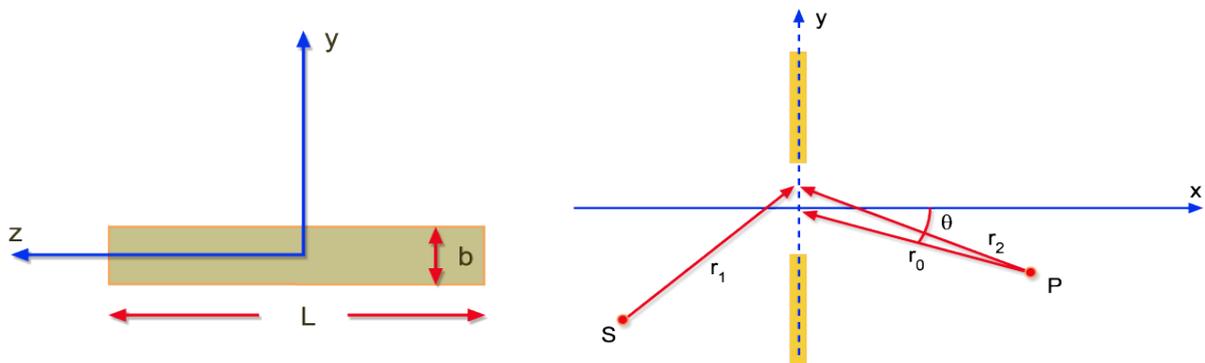


Fig. 9.10 - Fenda estreita ($L \gg b$).

$$U(P) \approx CL \int_{-b/2}^{b/2} \exp\{ik(r_1 + r_2)\} dy$$

pois $dA = Ldy$. Uma segunda aproximação a ser feita é considerar r_1 constante sobre A. Além disto, $r_2 = r_0 + \text{sen}\theta$, logo:

$$U(P) \approx CL \exp\{ikr_1\} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\{ik(k_0 + y \text{sen}\theta)\} dy =$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$= CL \exp\{ik(r_1 + r_0)\} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\{ikysen\theta\} dy$$

Esta última integral é fácil de ser calculada e nos leva a:

$$U(P) = C' \frac{\exp\{ikysen\theta\} \Big|_{-b/2}^{b/2}}{iksen\theta} = C'b \frac{\text{sen}\left(\frac{kb}{2} \text{sen}\theta\right)}{\frac{kb}{2} \text{sen}\theta}$$

Fazendo $\beta = \frac{kb}{2} \text{sen}\theta$, temos:

$$U(P) = C'b \frac{\text{sen}\beta}{\beta} \Rightarrow I(P) = I_0 \frac{\text{sen}^2 \beta}{\beta^2}$$

O padrão de difração $I(P)$ está mostrado na Fig. 9.11. O máximo central ocorre para $\beta = 0$ ($\theta = 0$) enquanto que os mínimos localizam-se em $\beta = \pm n\pi$, onde n é um inteiro. $I(P)$ terá máximos relativos para $\beta = \pm 1,43\pi, \pm 2,46\pi$ etc. que são raízes de $\beta = \text{tg}\beta$.

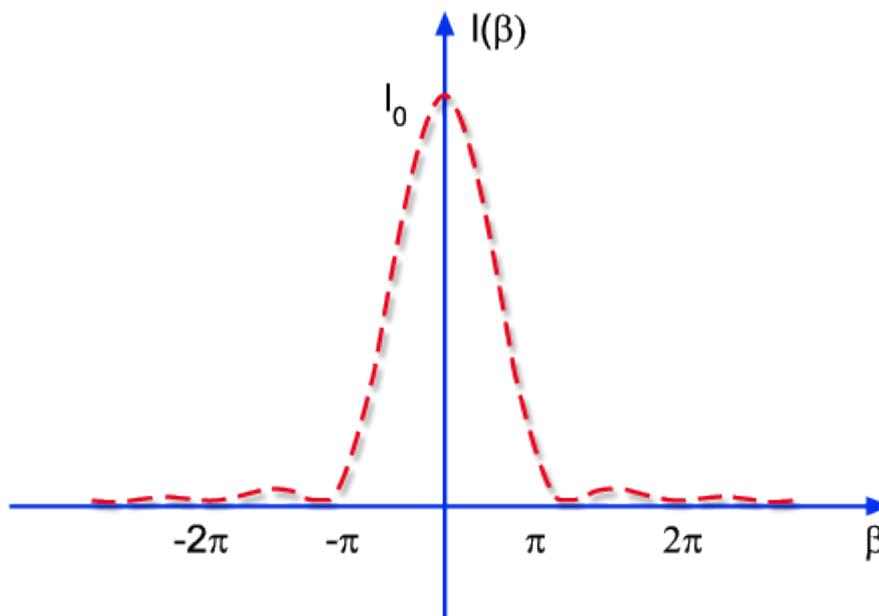


Fig. 9.11 - Padrão de difração para uma fenda estreita.

Autor: Sergio Carlos Zilio

Consideremos apenas a franja central para deduzir uma expressão para o ângulo no qual a luz se espalha. Para este fim vamos considerar a Fig. 9.12.

Como os primeiros mínimos ocorrem para $\beta = \pm\pi$ e $\theta = \frac{\phi}{2}$, temos:

$$\pi = \frac{kb}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} = \frac{2\pi}{2\lambda} b \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}$$

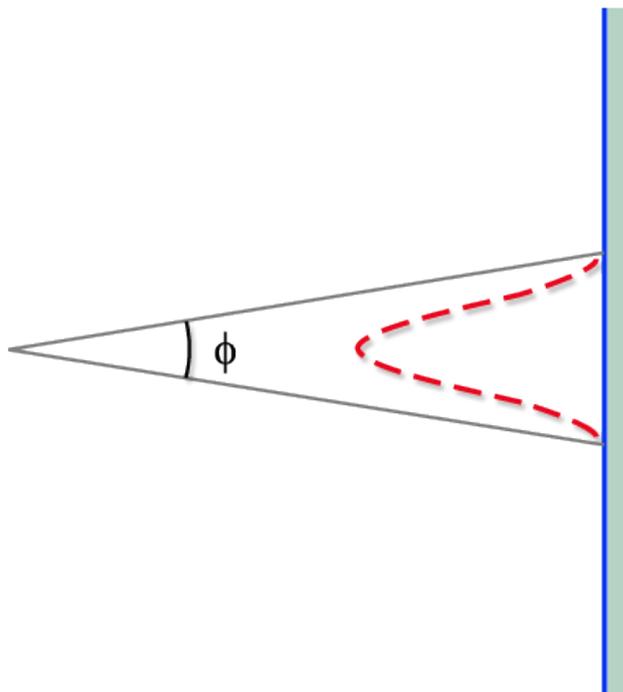


Fig. 9.12 - Ângulo de abertura da franja central.

Fazendo a aproximação de pequenos ângulos ($\phi \ll \pi$), na qual $\operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \approx \frac{\phi}{2}$,

obtemos:

$$\pi = \frac{b\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\lambda}{b}$$

Esta expressão é bastante adequada para se observar a analogia entre a óptica ondulatória e a mecânica quântica. Nesta, um dos princípios fundamentais é o da incerteza (de Heisenberg) que estabelece para uma dimensão:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\Delta y \Delta p_y \sim h$$

Para o problema de difração que estamos tratando, Δy pode ser identificado com a largura da fenda, b , enquanto que Δp_y é a incerteza no momentum do

fóton, cujo valor é $p = \frac{h}{\lambda}$, como demonstrado por de Broglie. Olhando para a

Fig. 9.13, que é derivada da Fig. 9.13, vemos que a incerteza no momentum do

fóton é $\Delta p_y = \frac{p \sin \phi}{2} = \frac{h}{\lambda} \frac{\phi}{2} \approx \frac{h \phi}{2\lambda}$. Assim,

$$b \frac{h \phi}{2\lambda} \sim h \Rightarrow \phi = \frac{2\lambda}{b}$$

que reproduz a eq. $\pi = \frac{b\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\lambda}{b}$, demonstrando a analogia entre a óptica ondulatória e a mecânica quântica.

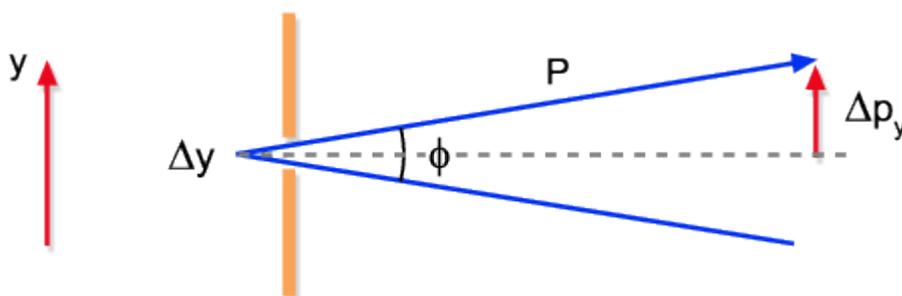


Fig. 9.13 - Ângulo de abertura da franja central.

No caso de uma fenda retangular, com os lados a e b da mesma ordem de grandeza, teremos:

$$I(P) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

onde $\alpha = \frac{ka}{2} \text{sen}\gamma$. Deixaremos a demonstração desta expressão como exercício.

5: Difração por uma abertura circular

No caso de uma abertura circular, vamos usar a variável y para integração, similarmente ao que foi feito para a fenda estreita. Chamando de R o raio da abertura, o elemento de área será tomado como sendo uma faixa de comprimento $2\sqrt{R^2 - y^2}$ e largura dy , como mostra a Fig. 9.14. Consideremos, dentro da aproximação de Fraunhofer, que a onda incidente a abertura circular seja plana. A amplitude da onda no ponto P é dada, de acordo com a eq. (9.17), por:

$$U(P) \approx C \exp\{ikr_0\} \int_{-R}^R \exp\{iky \text{sen}\theta\} 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

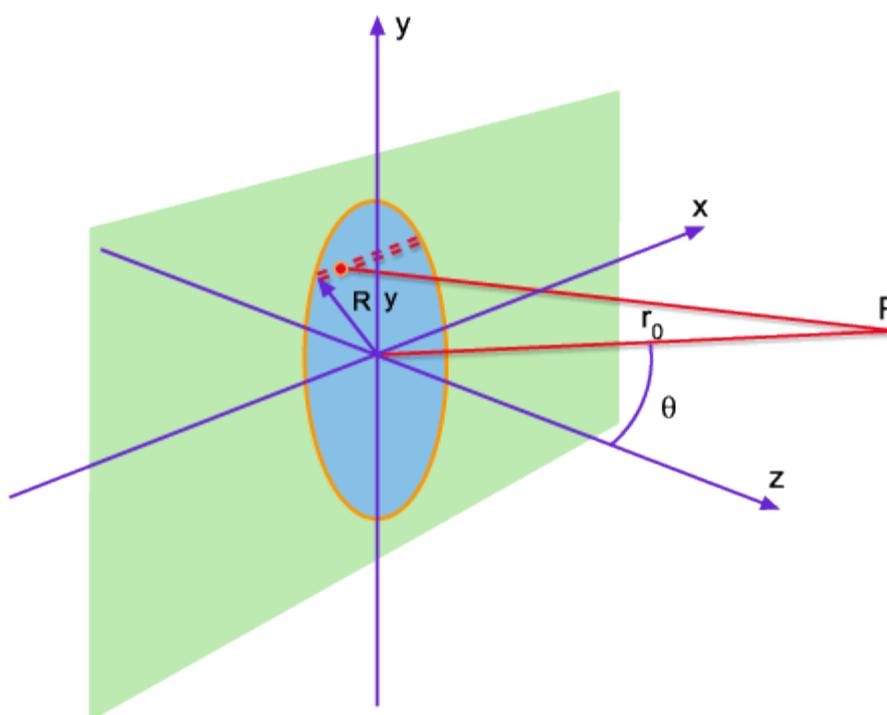


Fig. 9.14 - Ilustração da geometria envolvida na difração por uma abertura circular.

Autor: Sergio Carlos Zilio

onde foi utilizado $r_2 = r_0 + y \operatorname{sen} \theta$ e $dA = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$. Introduzindo as grandezas $u = \frac{y}{R}$ e $\rho k R \operatorname{sen} \theta$ a integral acima se torna:

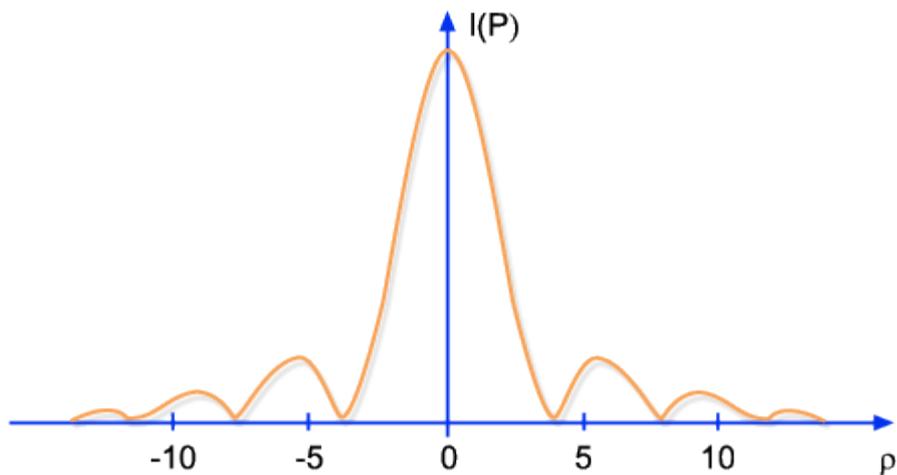
$$U(P) \approx C \exp\{ikr_0\} \int_{-1}^{+1} \exp\{i\rho u \sqrt{1-u^2}\} du$$

Esta é uma integral padrão (tabelada), cujo valor é $\frac{\pi J_1(\rho)}{\rho}$, onde $J_1(\rho)$ é uma função especial chamada de função de Bessel de primeira ordem. Desta forma, a intensidade do feixe difratado se torna:

$$I(P) = (C\pi R^2)^2 \left| \frac{2J_1(\rho)}{\rho} \right|^2$$

A dependência de I_0 em R^4 nos indica uma rápida redução (ou aumento) na intensidade de luz com a diminuição (ou aumento) do raio da abertura circular. Outro ponto importante a ser considerado é quanto aos zeros da função $J_1(\rho)$. Eles determinam os pontos de intensidade nula, os quais estão localizados em círculos concêntricos em torno do ponto $\theta = 0$. As raízes da função $J_1(\rho)$ ocorrem para os valores de ρ iguais a 3.83, 7.02, 10.17, etc., como mostra a Fig. 9.15. Com eles são obtidos os ângulos θ que correspondem à intensidade nula. Tais ângulos serão:

$$\theta_1 = 3,83 / kR = 0,61\lambda / R, \theta_2 = 7,02 / kR = 1,12\lambda / R, \theta_3 = 10,17 / kR = 1,62\lambda / R$$

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 9.15 - Padrão de difração para uma abertura circular**

6: Rede de difração

Vamos utilizar uma análise similar à anteriormente realizada para a fenda estreita na aproximação de Fraunhofer para entendermos o funcionamento da rede de difração mostrada na Fig. 9.16. Começaremos com a expressão dada pela eq. (9.19) e somaremos para as várias fendas paralelas. Assim temos:

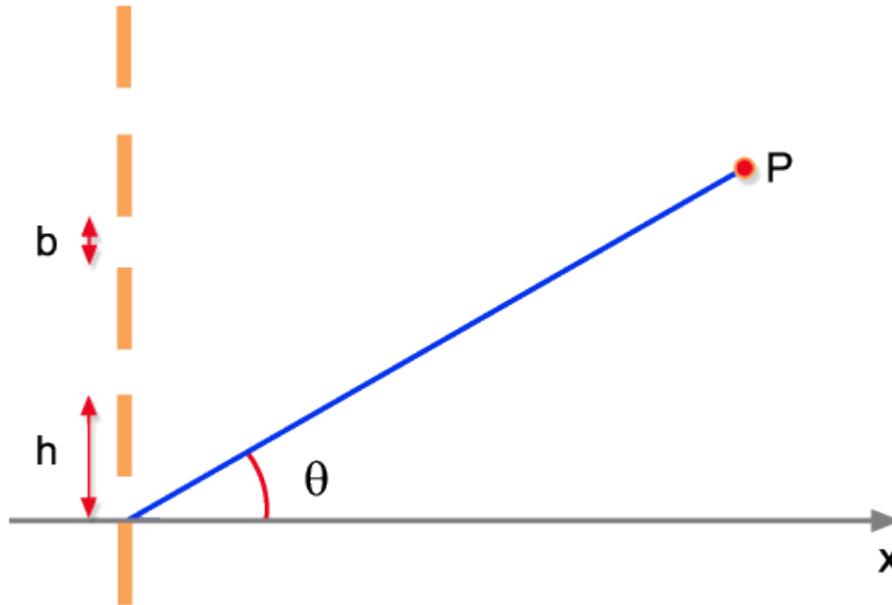
Autor: Sergio Carlos Zilio

Fig. 9.16 - Rede de difração.

$$U \approx C \int \exp\{ikysen\theta\} dy = \int_0^b \exp\{ikysen\theta\} dy + \\ + \int_h^{h+b} \exp\{yk sen\theta\} dy + \int_{2h}^{2h+b} \exp\{yk sen\theta\} dy + \dots$$

onde o número de integrais do lado direito é igual ao número de fendas paralelas, que tomaremos como $N + 1 \approx N$, para $N \gg 1$. Esta expressão pode ser escrita da forma:

$$U = \sum_{j=0}^N \int_{jh}^{jh+b} \exp\{ikysen\theta\} dy$$

para $N+1$ fendas. Assim, realizando a integração temos:

$$U = \frac{\sum_{j=0}^N \exp\{ik(jh+b)sen\theta\} - \exp\{ik(jh)sen\theta\}}{iksen\theta} = \\ = \frac{\exp\{ikbsen\theta\} - 1}{iksen\theta} \sum_{j=0}^N \exp\{ik(jh)sen\theta\}$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

Desta expressão é possível mostrar, embora não o façamos aqui, que

$$U = 2b \exp\{i[\beta + (N-1)\gamma]\} \left(\frac{2\text{sen}\beta}{\beta}\right) \left(2\frac{\text{sen}N\gamma}{2N\text{sen}\gamma}\right)$$

onde $\beta = \frac{k b \text{sen}\theta}{2}$ e $\gamma = \frac{k b \text{sen}\theta}{2}$. Logo,

$$I \propto |U(P)|^2 \Rightarrow I = I_0 \left(\frac{\text{sen}\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\text{sen}N\gamma}{N\text{sen}\gamma}\right)^2$$

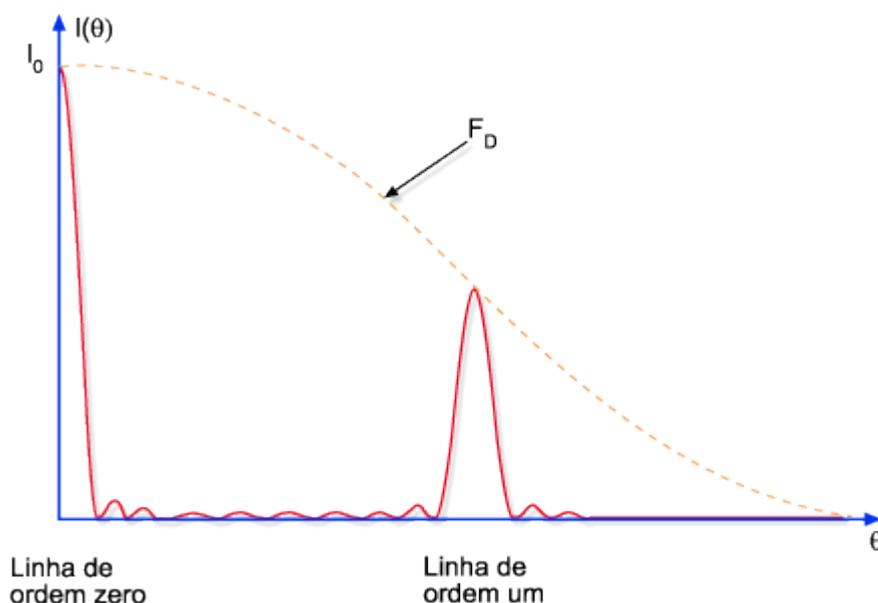
com $F_0 = \left(\frac{\text{sen}\beta}{\beta}\right)^2$ sendo o fator de difração e $F_1 = \left(\frac{\text{sen}N\gamma}{N\text{sen}\gamma}\right)^2$ o fator de

interferência. A Fig. 9.17 mostra o padrão de difração e interferência para a rede considerada. Vemos que

$F_D = 0$ para $\beta = \pm n\pi$ ($n =$ inteiro diferente de zero) e F_D é máximo para $\beta = 0 \pm 1,43\pi$, etc. Por outro lado, $F_I = 0$ quando $N\gamma = 0$, ou seja,

quando $\gamma = \frac{m\pi}{N}$, e máximo para $\text{sen}\gamma = 0$, o que implica em $\gamma = m\pi$ e

consequentemente, $\text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{h}$.

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 9.17 - $I(\theta)$ para uma rede de difração.**

O *poder de resolução* da rede de difração é definido como $P_R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, onde $\Delta\lambda$

é a separação entre duas linhas espectrais, que pode ser obtida usando-se o critério de Rayleigh, mostrado na Fig. 9.18. Este critério estabelece que duas linhas estarão resolvidas quando o máximo de uma coincide com o zero da

outra. A *dispersão angular* de uma rede é dada por $D_A = \frac{d\theta}{d\lambda}$, mas como

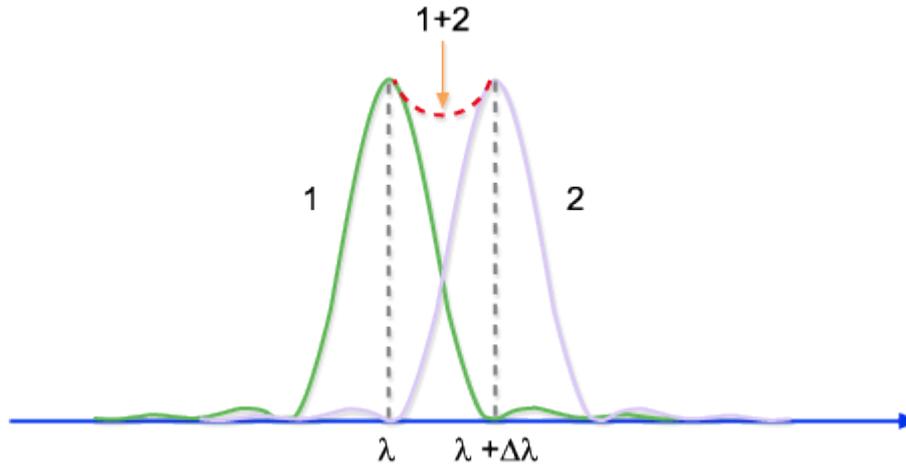
(condição de máximo de F_1), temos que $\cos\theta d\theta = \frac{md\lambda}{h}$ e

portanto $D_A = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{h\cos\theta}$. Por outro lado, $\gamma = \left(\frac{kh}{2}\right)\sin\theta$ e

assim $\Delta\gamma = \left(\frac{kh}{2}\right)\cos\theta d\theta$. Do critério de Rayleigh temos

que $\Delta\gamma = \frac{\pi}{N} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{(Nh\cos\theta)}$. Como obtemos $\Delta\lambda = \left(\frac{\Delta\theta h}{m}\right)\cos\theta = \frac{\lambda}{mN}$ e

portanto o poder de resolução da rede é:

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 9.18 - Critério de Rayleigh.**

$$P_R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

7: Padrões de difração de Fresnel

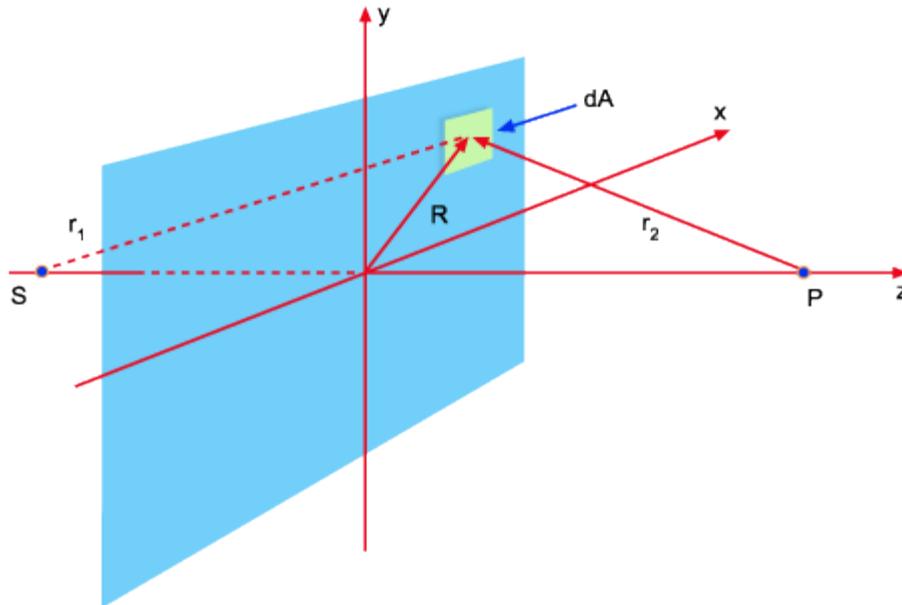
Vamos agora analisar o caso de difração de Fresnel e para isto vamos considerar a Fig. 9.19, na qual as coordenadas da fonte e do observador são dadas respectivamente por: $S:(0,0,-h_1)$ e $P:(0,0,-h_2)$. Partindo da eq. (9.13) temos:

$$U(P) = \frac{-ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\exp\{ik(r_1 + r_2)\}}{r_1 r_2} [\cos(\hat{n}, r_2) - \cos(\hat{n}, r_1)] dA$$

onde $\hat{n} = -\hat{k}$. Fazendo as aproximações $r_1 = \sqrt{h_1^2 + R^2} = h_1 \sqrt{1 + \frac{R^2}{h_1^2}}$

$$h_1 \sqrt{1 + \frac{R^2}{h_1^2}} \approx h_1 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{h_1^2} \right] \text{ e } r_2 \approx h_2 \frac{1}{2} \frac{R^2}{h_2} \text{ temos } r_1 + r_2 \approx$$

$$h_1 + h_2 + \frac{R^2}{2} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right] = h_1 + h_2 + \frac{R^2}{2L} \text{ onde } \frac{1}{L} = \left[\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right].$$

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 9.19 - Geometria para a difração de Fresnel.**

Também tomamos $r_1 r_2 \approx h_1 h_2$ e assim obtemos:

$$U(P) = \frac{-ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi h_1 h_2} [\cos(\hat{n}, r_2) - \cos(\hat{n}, r_1)] \iint_{s_1} \exp\left\{i \frac{kR^2}{2L}\right\} dA$$

$$\approx C \iint_{s_1} \exp\left\{i \frac{k(x^2 + y^2)}{2L}\right\} dx dy$$

onde a constante defronte a integral foi denominada C. Fazendo as

substituições $u = x\sqrt{\frac{k}{\pi L}}$, $v = y\sqrt{\frac{k}{\pi L}}$ e $dx dy = \frac{\pi L}{k} du dv$ obtemos

finalmente:

$$U(P) \approx \frac{C\pi L}{k} \int_{u_1}^{u_2} \exp\left\{i \frac{\pi u^2}{2}\right\} du \int_{v_1}^{v_2} \exp\left\{i \frac{\pi v^2}{2}\right\} dv$$

Façamos agora um breve parêntese para discutir as integrais acima, as quais são chamadas integrais de Fresnel:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\int_0^{\omega} \exp\left\{\frac{i\pi\omega'^2}{2}\right\} d\omega' = C(\omega) + iS(\omega)$$

onde $C(\omega)$ e $S(\omega)$ são dadas pela espiral de Cornu mostrada na Fig.

9.20. Quando:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \rightarrow \infty \Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2} & \text{e } C(\omega) = \frac{1}{2} \\ \omega \rightarrow -\infty \Rightarrow S(\omega) = -\frac{1}{2} & \text{e } C(\omega) = -\frac{1}{2} \\ \omega = 0 \Rightarrow S(\omega) = 0 & \text{e } C(\omega) = 0 \end{array} \right.$$

Logo,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} = \int_{\omega_1}^0 + \int_0^{\omega_2} = \int_0^{\omega_2} - \int_0^{\omega_1} = C(\omega_2) - C(\omega_1) + iS(\omega_2) - iS(\omega_1)$$

No caso que estamos estudando,

$$U(P) = \frac{C\pi L}{k} \left\{ [C(u_2) - C(u_1)] + i[S(u_2) - S(u_1)] \right\} \\ x \left\{ [C(u_2) - C(u_1)] + i[S(u_2) - S(u_1)] \right\}$$

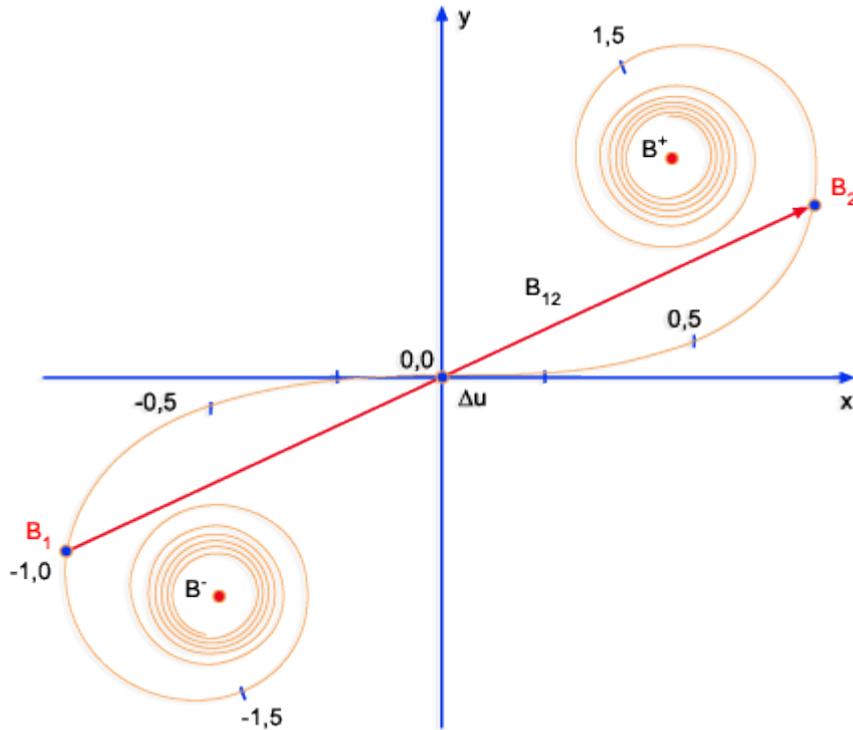


Fig. 9.20 - Espiral de Cornu.

8: Aplicação da transformada de Fourier para a difração

Quando a fonte e o observador encontram-se fora do eixo z, como mostra a Fig. 9.21, temos:

$$U(P) = \frac{ik}{4\pi} U_0 e^{-i\omega t} \iint_A \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\cos\theta' - \cos\theta) dA$$

Notando que $\hat{n} = -\hat{k}$, $R = x\hat{i} + y\hat{j}$ e $r'_0 = r'_0(\alpha'\hat{i} + \beta'\hat{j} + \gamma'\hat{k})$, temos então:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}'_0 + \vec{R} \Rightarrow r' = \sqrt{r'_0{}^2 + R^2 + 2Rr'_0} = \\ &= \sqrt{r'_0{}^2 + R^2 + 2(\alpha'x + \beta'y)} = r'_0 \sqrt{1 + \frac{R^2 + 2(\alpha'x + \beta'y)}{r'_0{}^2}} \end{aligned}$$

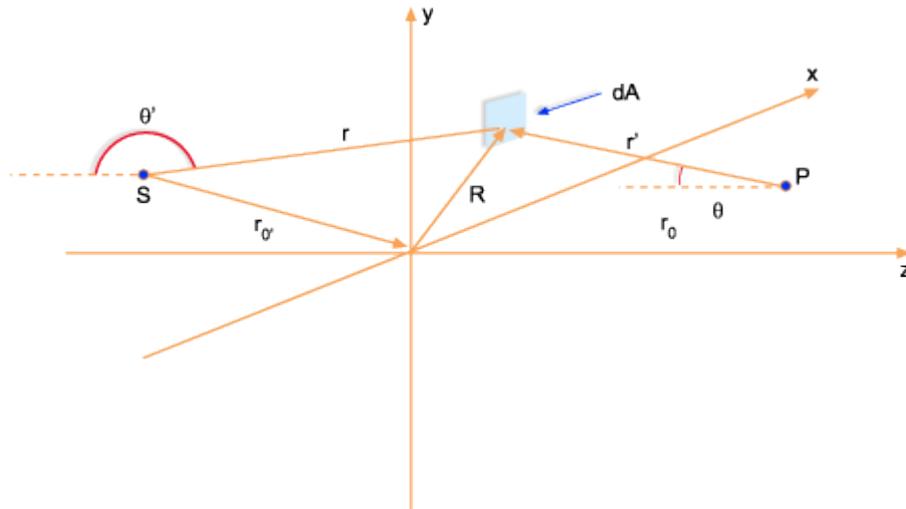
Autor: Sergio Carlos Zilio

Fig. 9.21 - Difração no caso em que a fonte e o observador encontram-se afastados do eixo z.

Como $r_0' \gg 0$, temos $r' \approx r_0'^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha'x + \beta'y}{r_0'^2} + o'(x^2, y^2) + \dots \right\}$ Analogamente

$r \approx r_0 + \frac{\alpha x + \beta y}{r_0} + o(x^2, y^2) + \dots$ e $\frac{1}{rr'} \approx \frac{1}{r_0 r_0'}$ Logo,

$$U(P) = \underbrace{\frac{ik}{4\pi r_0 r_0'}}_C (\cos \theta' - \cos \theta) e^{ik(r_0 + r_0')} \iint \exp \left\{ ik \left(\frac{\alpha x + \beta y}{r_0} \right) + \left(\frac{\alpha' x + \beta' y}{r_0'} \right) \right\}$$

Desprezando $o(x^2, y^2)$ e $o'(x^2, y^2)$, teremos a aproximação de Fraunhofer e não desprezando teremos a aproximação de Fresnel.

$$= C \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik(Ax + By)} dx dy$$

Desta forma, $U(P)$ é a transformada de Fourier da função abertura $g(x, y)$ isto é:

$$U(P) = C \int_{-\omega}^{\omega} \int_{-\omega}^{\omega} g(x, y) e^{ik(Ax + By)} dx dy$$

onde $g(x, y) = f(x)h(y)$.