

Autor: Sergio Carlos Zilio

1: Velocidades de fase e de grupo. Dispersão

Como vimos no capítulo anterior, a onda eletromagnética é caracterizada por uma fase que possui dependência nas coordenadas espaciais e temporal, $\phi = \phi(\vec{r}, t)$. Esta grandeza é a característica mais importante da onda eletromagnética já que define a direção de propagação, através do gradiente da função eikonal (vide Cap. 2), a frequência e também sua velocidade de propagação. No presente capítulo vamos concentrar nossa atenção nos aspectos ligados à frequência e velocidade da onda, e como proceder para transmitir informações através dela.

De acordo com o exposto no Cap. 4, as coordenadas espaciais e temporal das fases das ondas analisadas estão separadas em dois termos, da forma $\vec{k}\vec{r} - \omega t$. Entretanto, pode acontecer o caso em que estas coordenadas estão misturadas, e um exemplo disto é quando o índice de refração depende do tempo. Como k é proporcional a n , a fase passa a ser $\phi(r, t) = \vec{k}(t)\vec{r} - \omega t$, que é conhecida como fase generalizada. A frequência da onda estará então associada à variação temporal da fase generalizada, tópico que veremos com mais detalhes quando tratarmos da modulação eletro-óptica e varredura de frequência. Por enquanto, vamos concentrar nossa atenção na velocidade de propagação da onda. Começaremos por dizer que quando se deseja transmitir sinais, é impossível fazê-lo através de uma onda de frequência única (monocromática), porque os detectores existentes medem a intensidade do sinal e não a fase. Para tal fim, devemos modular a onda, como explicado a seguir.

Vamos considerar duas ondas planas monocromáticas, de frequências $\omega + \Delta\omega$ e $\omega - \Delta\omega$, propagando-se ao longo da direção z , com os correspondentes vetores de onda $k + \Delta k$ e $k - \Delta k$. Aplicando o princípio da superposição introduzido por Young, temos:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$E = E_0 \exp\{i(k + \Delta k)z - i(\omega + \Delta\omega)t\} + E_0 \exp\{i(k - \Delta k)z - i(\omega - \Delta\omega)t\} \quad (5.1)$$

Através de uma manipulação matemática simples desta equação chegamos a:

$$E = E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} \left[\exp\{i(\Delta kz - \Delta\omega t)\} + \exp\{i\Delta kz - i\Delta\omega t\} \right] \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow E = E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} \cos(\Delta kz - \Delta\omega t)$$

Como usualmente feito nos livros de eletromagnetismo, tomamos apenas a parte real desta expressão, o que nos leva a:

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t) \cos(\Delta kz - \Delta\omega t) \quad (5.3)$$

Isto nos dá uma onda de frequência modulada por outra, de frequência , como mostra a Fig. 5.1.

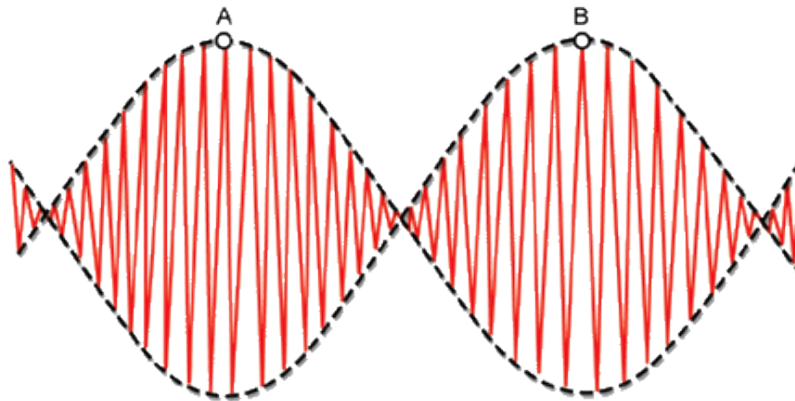


Fig. 5.1 - Modulação da amplitude da onda.

De acordo com a equação anterior, vemos que a onda portadora, de frequência maior, tem a forma $\cos(kz - \omega t)$ e a modulação é dada por $\cos(\Delta kz - \Delta\omega t)$. Vamos concentrar nossa atenção nos pontos A e B, que são respectivamente máximos da modulação e da onda portadora, e determinar as velocidades com que estes pontos se propagam. Estes máximos satisfazem as condições:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\text{Ponto A:} \quad \Delta kz = \Delta \omega t = 2\pi m \quad (5.4a)$$

$$\text{Ponto B:} \quad kz = \omega t = 2\pi n \quad (5.4b)$$

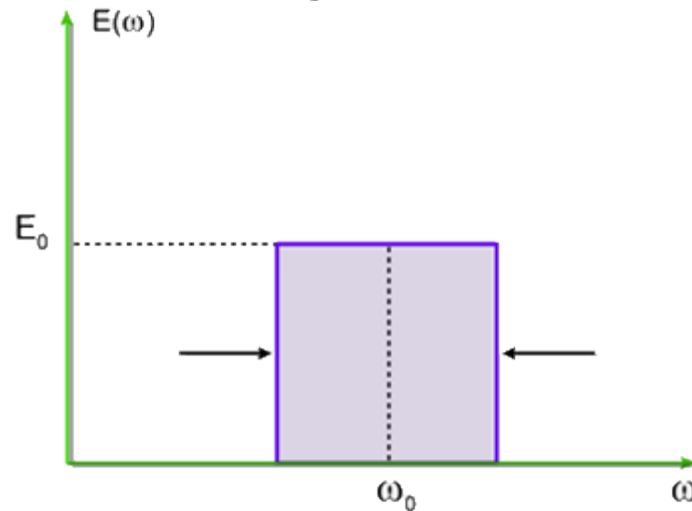
onde m e n são inteiros. Diferenciando z com relação a t nas expressões acima obtemos:

$$\text{Ponto A:} \quad \left(\frac{dz}{dt} \right)_g = v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (5.5a)$$

$$\text{Ponto B:} \quad \left(\frac{dz}{dt} \right)_f = v_f = \frac{\omega}{k} \quad (5.5b)$$

que são respectivamente as velocidade da modulação e da onda portadora. A velocidade da onda portadora leva o nome de velocidade de fase e a da modulação o de velocidade de grupo. Neste caso em que temos duas ondas monocromáticas, o espectro de frequências é composto por duas "funções delta". Para o caso de um "pacote" ou grupo de ondas cujo espectro de frequências é uma função caixa, como mostra a Fig. 5.2, teremos que somar (integrar) todas as componentes de frequências para encontrar a expressão do campo elétrico como fizemos para as duas ondas monocromáticas na eq. (5.1). Assim,

$$E(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}} E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} d\omega \quad (5.6)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 5.2 - Espectro de frequências tipo caixa.**

Para efetuar esta integração devemos levar em conta que pode haver dispersão do pacote, isto é, k pode ser uma função ω de como veremos quando tratarmos a interação entre a luz e a matéria no Cap. 11. Vamos então expandir k em torno de ω_0 , de acordo com:

$$k(\omega) = k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 (\omega - \omega_0) + \left[(\omega - \omega_0)^2 \right] \quad (5.7)$$

Desprezando termos de ordens superiores à linear em temos:

$$E(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} E_0 \exp \left\{ i \left[\left(k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 (\omega - \omega_0) \right) z - i\omega t \right] \right\} d\omega \quad (5.8)$$

Fazendo a substituição $\Omega = \omega - \omega_0$ obtemos:

$$E(z, t) = E_0 \exp \{ i(k_0 z - \omega_0 t) \} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \exp \left\{ i\Omega \left[\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 z - t \right] \right\} d\Omega \quad (5.9)$$

O primeiro termo desta expressão representa a onda portadora e o segundo é a função forma ou modulação que passaremos a chamar $g(z, t)$. Assim,

$$g(z, t) = E_0 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \exp \left\{ i\Omega \left[\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 z - t \right] \right\} d\Omega = 2E_0 \frac{\text{sen}\varphi}{\varphi} \left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) \quad (5.10)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

onde $\phi = \left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) \left[\frac{dk}{d\omega_0} z - t \right]$. A Fig. 5.3 mostra o pacote de ondas obtido através das equações (5.9) e (5.10).

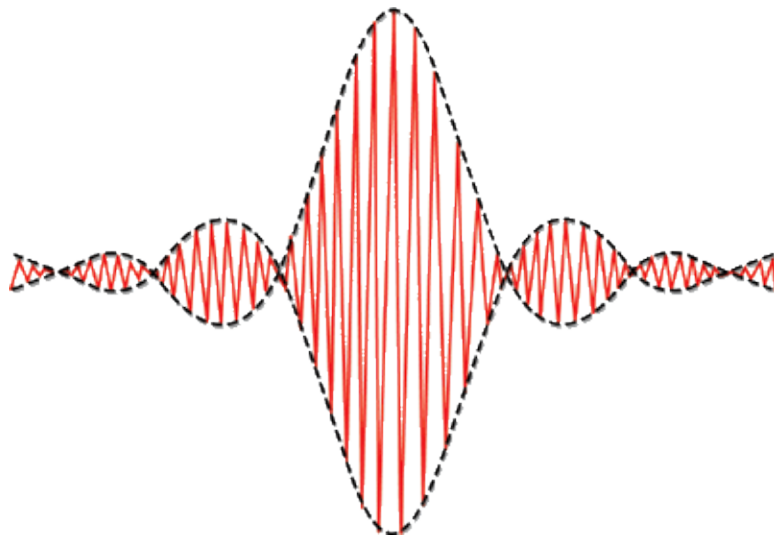


Fig. 5.3 - Pacote de ondas correspondente ao espectro de frequências tipo caixa.

O valor máximo do pacote de ondas ocorre quando $\phi = 0$, ou seja, quando $\frac{dk}{d\omega_0} z = t$. A velocidade com que o pacote se propaga, que é a já conhecida velocidade de grupo, é:

$$v_g = \frac{dz}{dt} \frac{dk}{d\omega_0} \quad (5.11)$$

Se houvésemos tomado o termo de ordem quadrática na expansão de k , obteríamos a dispersão do pacote, isto é, ele mudaria de forma ao se propagar. O conhecimento de como um pacote se dispersa é de muita importância nas telecomunicações, em particular, quando se pretende transmitir uma sequência de pulsos curtos numa fibra óptica. Se a taxa de repetição for alta, os pulsos estarão muito próximos e poderão se superpor, produzindo confusão na informação que está sendo transmitida. Deixaremos a análise da dispersão de

Autor: Sergio Carlos Zilio

um pulso como exercício, mas vamos mencionar aqui que esta dispersão da velocidade de grupo pode ser cancelada por um efeito não linear de terceira ordem chamado varredura de frequência. Isto dá origem ao sólton temporal que veremos na seção 5.6.

Além da dispersão devido à variação do índice de refração com a frequência, que acabamos de ver, existe um outro tipo de dispersão nas fibras ópticas, chamada de dispersão modal. Cada um dos modos transversais mostrados na Fig. 4.9 possui uma velocidade de propagação diferente. Se o pulso de luz constituir-se de uma soma destes modos, cada um deles caminhará com velocidade diferente, acarretando no alargamento do pulso. Para evitar esta complicação, costuma-se usar para as comunicações ópticas fibras monomodos que permitem a propagação apenas do modo TEM_{00} .

2: Efeito Doppler. Aplicações astronômicas

Na seção anterior aprendemos a calcular a velocidade da onda eletromagnética. Vamos agora dedicar o restante do capítulo à análise de fatores que determinam sua frequência, começando pelo famoso efeito Doppler.

Consideremos uma fonte S emitindo radiação eletromagnética de frequência f , num meio com índice de refração unitário, e um observador O. Temos quatro casos a tratar:

a) O observador se aproxima da fonte com velocidade v_0 . Neste caso, o número de ondas que ele encontra num tempo τ é:

$$f't = f't + \frac{v_0 t}{\lambda} \Rightarrow f' = f + \frac{v_0}{\lambda} \quad (5.12)$$

onde $v_0 \tau$ é a distância que ele percorre num tempo τ . Como $c = \lambda f$, temos

Autor: Sergio Carlos Zilio

$f' = f \left(1 + \frac{v_0}{c} \right)$. Desta forma, o observador nota que a frequência da luz aumenta por um fator $1 + \frac{v_0}{c}$ devido ao fato dele estar se aproximando da fonte.

b) O observador se afasta da fonte com velocidade v_0 . Este caso é similar ao anterior, apenas deve-se inverter o sinal de v_0 :

$$f' = f \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) \quad (5.13)$$

c) A fonte se aproxima do observador com velocidade v_s . Olhando para a Fig. 5.4 vemos que durante um certo tempo τ , a frente de onda percorre uma distância $\overline{O'A} = \tau c$, enquanto que a fonte anda $\overline{O'S} = v_s \tau$. A distância \overline{SA} é dada por $\overline{SA} = \tau c - v_s \tau = (c - v_s) \tau$. Assim, o comprimento de onda na região \overline{SA} é dado por: $\lambda = \frac{\overline{SA}}{\text{número de onda}} = \frac{\overline{SA}}{f \tau}$ e portanto,

$$\lambda = \frac{(c - v_s)}{f} \quad (5.14)$$

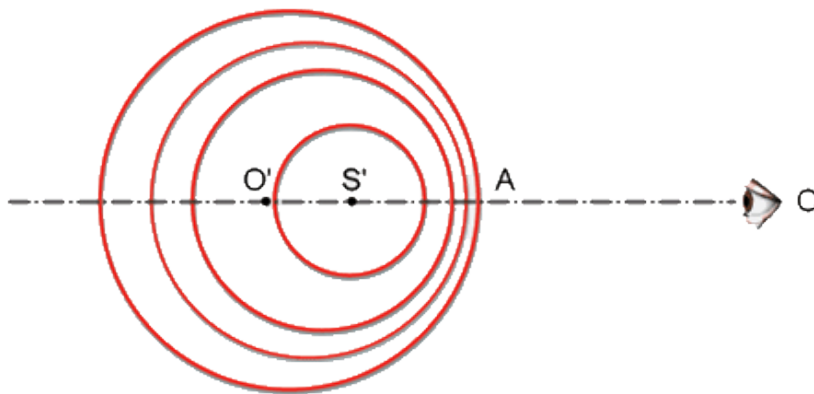


Fig. 5.4 - Demonstração do efeito Doppler no caso em que a fonte se aproxima do observador.

Autor: Sergio Carlos Zilio

A frequência f' observada por O será então dada por:

$$\lambda = \frac{(c - v_s)}{f} \quad (5.15)$$

d) A fonte se afasta do observador com velocidade v_s de forma que basta inverter o sinal no denominador:

$$f' = \frac{c}{\lambda} = f \left(\frac{c}{c - v_s} \right) \quad (5.16)$$

Estes quatro casos podem ser resumidos em apenas uma expressão matemática:

$$f' = \frac{c}{\lambda} = f \left(\frac{c}{c + v_s} \right) \quad (5.17)$$

onde o sinal das velocidades será positivo se elas estiverem no sentido do observador para a fonte. No caso de estarmos tratando com luz visível, o efeito chama-se Doppler-Fizeau. Exemplo disto são as aplicações astronômicas:

(i) Estrelas duplas: são duas estrelas bastante próximas girando em torno do centro de massa do sistema, não separáveis através de telescópio. Porém, ao analisar-se o espectro de luz emitida, o efeito Doppler permite distinguir que são estrelas duplas. Esta situação está esboçada na Fig. 5.5.

(ii) Expansão do universo: as estrelas têm uma velocidade de fuga de 10-30 km/s e os quasares de aproximadamente 0.8 c. Isto faz com que os espectros de luz emitidos por elementos químicos conhecidos tenham um deslocamento na direção do vermelho.

Autor: Sergio Carlos Zilio

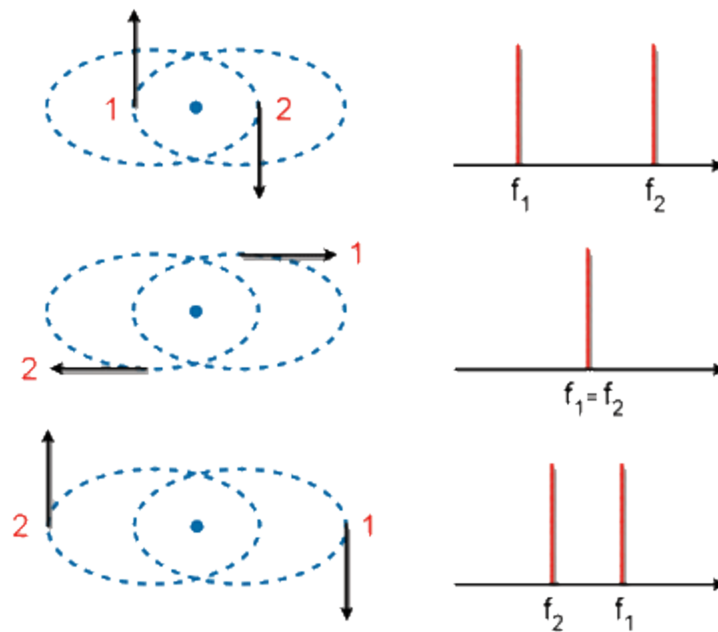


Fig. 5.5 - Efeito Doppler-Fizeau no caso das estrelas duplas.

3: Alargamento de linhas espectrais

O funcionamento de lâmpadas de descarga e lasers a gás baseia-se no fato de que os átomos são excitados pela descarga elétrica e ao voltarem para o estado fundamental emitem luz de frequência $\nu_0 = \frac{E}{h}$, onde E é a diferença de energia entre os estados fundamental e excitado, e h é a constante de Planck. Note que aqui estamos denominando a frequência de ν_0 , enquanto que na seção anterior a mesma era f . Entretanto, devido ao fato das moléculas do gás possuírem movimento browniano, a linha ν_0 adquire uma largura $\Delta\nu$ que queremos calcular.

Vamos considerar um gás com n moléculas/cm³, mantido à temperatura T num tubo de Geisler. Após a descarga elétrica observa-se a luz emitida na direção do eixo x com um espectrofotômetro, dando-se particular atenção à raia de frequência em torno de ν_g . O número de moléculas/cm³ com componente x de velocidade compreendida entre ν_x e $\nu_x + d\nu_x$ é dada por:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$dn = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x \quad (5.18)$$

Admitamos que a intensidade total l emitida com frequência compreendida no intervalo ν e $\nu + d$ é proporcional a dn . Assim temos:

$$ld\nu = Adn = An \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x \quad (5.19)$$

Entretanto, ν_x e $d\nu_x$ podem ser tirados da fórmula do efeito Doppler na qual a fonte está em movimento e o observador em repouso, eq. (5.15). Expandindo o

denominador para $\frac{\nu_x}{c} \ll 1$ chegamos a:

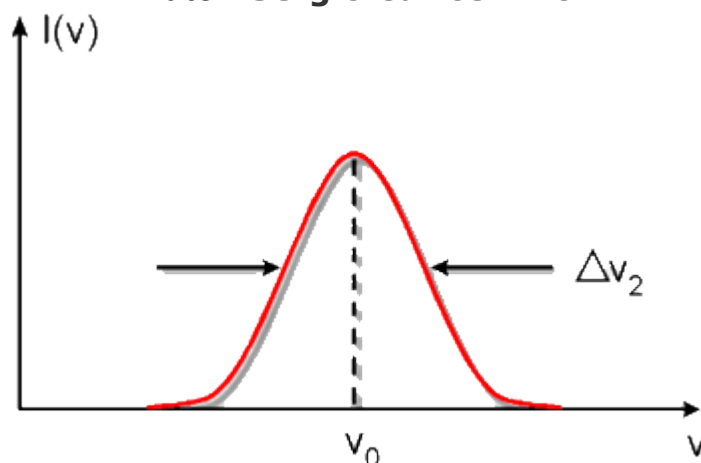
$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\nu_x}{c}} \cong \nu_0 \left(\frac{1 + \frac{\nu_x}{c}}{c} \right) \Rightarrow \nu_x \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \quad (5.20)$$

Logo, $d\nu_x = \left(\frac{c}{\nu_0} \right) d\nu$. Desta forma, cancelando d na expressão para l e usando

a eq. (5.20) obtemos :

$$l = \frac{Acn}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}\right)^2\right] d\nu_x \quad (5.21)$$

que é a expressão da gaussiana mostrada na Fig. 5.6.

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 5.6 - Alargamento espectral devido ao efeito Doppler.**

Se as moléculas do gás estivessem em repouso, o espectro de frequências observado seria a função $\delta(\nu - \nu_0)$. Entretanto, como elas se movem, o efeito Doppler faz com que haja um alargamento desta linha. É fácil mostrar que a largura da linha, $\Delta\nu_D$, é dada por:

$$\Delta\nu_D = 2 \frac{\nu_0}{c} \sqrt{2 \ln 2} \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (5.22)$$

4: Óptica relativística

O efeito Doppler e a aberração da luz das estrelas, descoberta por Bradley em 1725, podem ser explicados em termos da relatividade restrita, introduzida em 1905 por Albert Einstein. Vamos inicialmente rever alguns de seus conceitos básicos:

1. Postulados

- a) As leis físicas são invariantes em forma para diferentes referenciais inerciais (referenciais não acelerados).
- b) A velocidade da luz é a mesma para todos os observadores inerciais.

2. Transformações de Lorents

Considere dois sistemas de coordenadas cartesianas O e O', sendo que O' se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{i}$ $\vec{v} = v\hat{i}$, como mostra a Fig. 5.7. No instante $t = 0$

Autor: Sergio Carlos Zilio

as duas origens coincidem. As transformações de Lorentz relacionam (x,y,z,t) do referencial O com (x',y',z',t') do referencial O', de acordo com:

$x = \gamma(x' + vt')$	$x' = \gamma(x - vt)$	(5.23)
$y = y'$	$y' = y$	
$z = z'$	$z' = z$	
$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$	$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$	

Onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

3. Quadrivetores

Como vimos em (ii), as coordenadas espaciais e temporal estão intimamente ligadas, por isso é conveniente se trabalhar com vetores de quatro componentes (quadrivetor). Exemplos de quadrivetores são os de posição, vetor de onda e momentum, respectivamente mostrados abaixo:

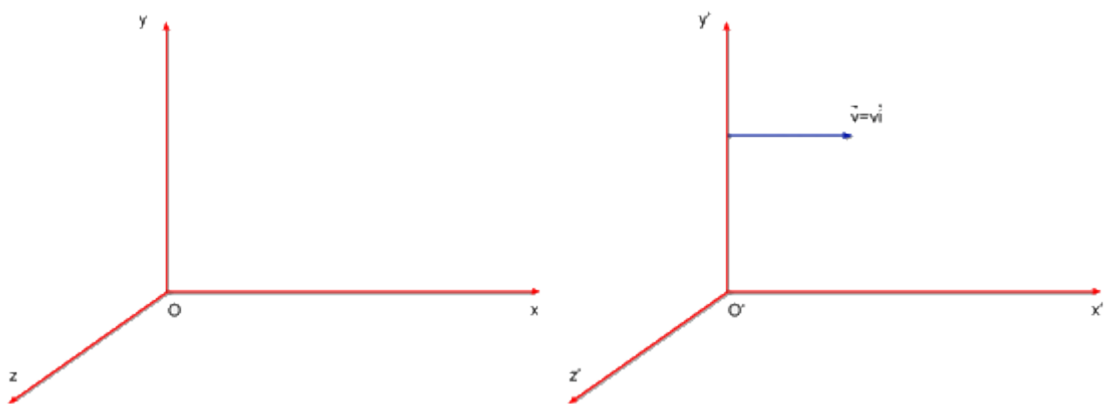


Fig. 5.7 - Referenciais com movimento relativo.

Autor: Sergio Carlos Zilio

O produto escalar de dois quadrivetores é feito como normalmente se multiplicam matrizes. Como exemplo, tomemos o produto dos dois primeiros quadrivetores mostrados acima:

$$\phi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \vec{k}' \vec{r}' - \omega' t \quad (5.24)$$

que é exatamente a fase da onda plana. Como o produto escalar de quadrivetores é invariante quando se muda de um referencial inercial para outro, a fase da onda plana é a mesma quando vista por observadores em O e O'.

4. Efeito Doppler longitudinal

Considere uma onda plana propagando-se na direção do eixo x ($\vec{k} = K\hat{i}$). A fase vista pelo observador em O será $\phi = kx - \omega t$ e em O' será $\phi' = \vec{k}' \vec{r}' - \omega' t = k_x x' + k_y y' + k_z z' - \omega' t$, isto é, estamos supondo que em O' a onda se propaga numa direção arbitrária. Como $\phi = \phi'$ temos:

$$kz - \omega = k_x x' + k_y y' + k_z z' - \omega' t \quad (5.25)$$

Usando as transformações dadas pela eq. (5.23), obtemos:

$$ky(x' + vt') - \omega\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = k_x x' + k_y y' + k_z z' - \omega' t \quad (5.26)$$

Igualando os coeficientes de cada coordenada temos as seguintes relações:

$$ky' = kz' = 0 \quad (5.27a)$$

$$kx' = \gamma\left(k - \frac{\omega v}{c^2}\right) \quad (5.27b)$$

$$\omega' = \gamma(\omega - kv) \quad (5.27c)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

Mas como $k = \frac{\omega}{c}$ então $\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, e conseqüentemente,

$$v' = v \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (5.28)$$

que é a fórmula do efeito Doppler longitudinal obtida pela relatividade restrita. Para recuperarmos a fórmula clássica devemos expandir este resultado para $v \ll c$.

5. Efeito Doppler transversal

Considere agora a onda plana se propagando na direção do eixo y ($\vec{k} = k\hat{j}$), sendo portanto perpendicular a \vec{v} . As fases vistas em O e O' são respectivamente: $\phi = ky - \omega t$ e $\phi' = \vec{k}' \cdot \vec{r}' = k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t'$. Igualando estes dois escalares chegamos a:

$$\phi = \phi' \Rightarrow ky - \omega t = k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t' \quad (5.29)$$

Novamente, usando as transformações dadas pela eq. (5.23), obtemos:

$$ky' - \omega y \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t' \quad (5.30)$$

de onde tiramos as seguintes relações:

$$kz' = 0 \quad (5.31a)$$

$$kx' = -\frac{\omega \gamma v}{c^2} \quad (5.31b)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$kx' = k = \frac{\omega}{c} \quad (5.31c)$$

$$\omega' = \gamma(\omega - kv) \quad (5.31d)$$

sendo que esta última expressão nos dá a fórmula do efeito Doppler transversal, que não possui análogo clássico.

6. Aberração da luz das estradas

De acordo com as eq. (5.31), vemos que a direção de propagação da onda plana no referencial O' não é na direção de y', mas forma com este um ângulo dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k'_x}{k'_y} \right| = \frac{\omega \gamma v}{\omega c^2} = \frac{\gamma v}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.32)$$

Este fenômeno de mudança de direção é conhecido como aberração da luz das estrelas. Devido ao fato de que um observador na Terra tem uma velocidade finita ele verá a posição da estrela diferente da posição real que ela ocupa, devido ao problema de aberração citado acima. A Fig. 5.8 mostra este efeito.

Fig. 5.8 - Aberração da luz proveniente das estrelas.

5: Modulação eletro-ótica de frequência

Na análise que fizemos até agora dos fenômenos envolvendo a fase, as partes espacial e temporal eram independentes, do tipo $\phi(z, t) = kz - \omega t$. Assim, a identificação da frequência da onda, associada à evolução temporal da fase,

Autor: Sergio Carlos Zilio

era imediata. Entretanto, podem ocorrer situações onde o índice de refração, e conseqüentemente o vetor de propagação, depende do tempo. Desta forma, a fase da onda torna-se $\phi(z, t) = k(t)z - \omega t$, e as partes espacial e temporal ficam misturadas pelo primeiro termo. Como a frequência encontra-se associada à evolução temporal da fase da onda eletromagnética, podemos definir:

$$\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.33)$$

como sendo a frequência generalizada da onda. Com este conceito podemos analisar alguns efeitos responsáveis pelo surgimento de novas componentes de frequência. Começaremos com o efeito eletro-óptico que pode modificar a frequência da onda, ou introduzir novas componentes de frequência, como veremos a seguir.

Existem cristais anisotrópicos não lineares (KDP, LiNbO₃, LiTaO₃, etc.) cujos índices de refração se modificam com a aplicação de um campo elétrico externo. Estes cristais são denominados eletro-ópticos. Consideremos uma onda propagando-se pelo cristal ao longo do eixo óptico z, com polarização na direção do eixo x, conforme mostra a Fig. 5.9. Um campo elétrico variável no tempo é aplicado, também na direção do eixo x. O índice de refração é dado por: $n(t) = n_0 + \alpha V(t)$, onde V(t) é a voltagem aplicada, é a resposta do cristal ao campo externo e n_0 é o índice de refração na ausência de campo. Esta variação do índice de refração produz uma alteração na fase da onda, que passa a ser:

$$\phi(t) = k_0 n_0 L - \omega_0 t + k_{0\alpha} L V(t) \quad (5.34)$$

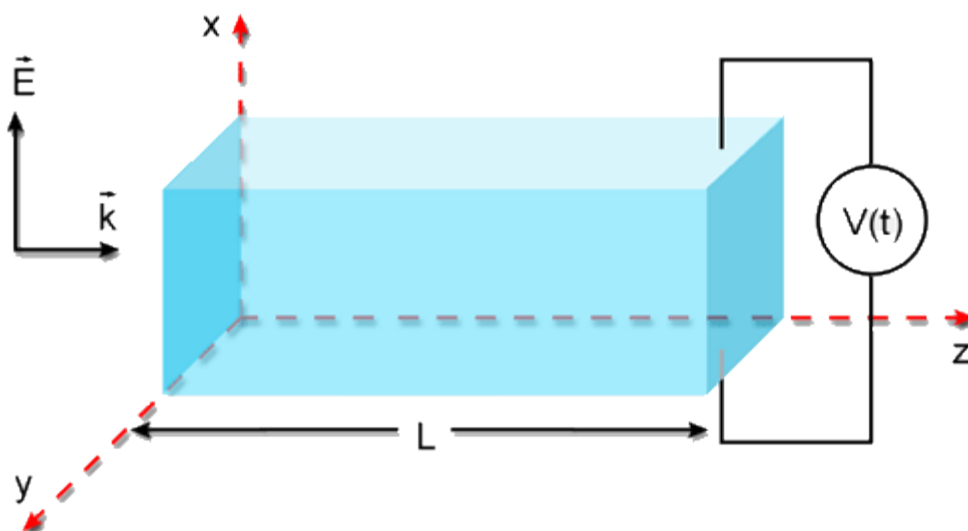
Autor: Sergio Carlos Zilio

Fig. 5.9 - Propagação de uma onda eletromagnética ao longo de um cristal eletro-óptico.

onde L é o comprimento do cristal, ω_0 é a frequência da luz incidente e k_0 é o vetor de onda no vácuo. Vamos em seguida considerar dois tipos de voltagens aplicadas sobre o cristal, que são os casos de maior interesse prático.

a. A voltagem do tipo rampa

Nesta situação, $V(t) = \beta t$, e a fase de onda fica:

$$\phi(t) = k_0 n_0 L - \omega_0 t + k_{0\alpha} L \beta t \quad (5.35)$$

de forma que obtemos a frequência generalizada como:

$$\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_0 - k_{0\alpha} \beta L \quad (5.36)$$

isto é, o cristal eletro-óptico faz variar um pouco a frequência da luz, como mostrado na Fig. 5.10.

b. Voltagem senoidal

Neste caso, temos $V(t) = A \sin \Omega t$, onde Ω é uma frequência gerada por uma fonte de rádio-frequência (em geral da ordem de 100 MHz), de forma que:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\phi(t) = k_0 n_0 L - \omega_0 t + k_0 \alpha L \beta t A \sin \Omega t \quad (5.37)$$

que dá origem à uma frequência:

$$\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_0 - k_0 \alpha L A \Omega \cos \Omega t \quad (5.38)$$

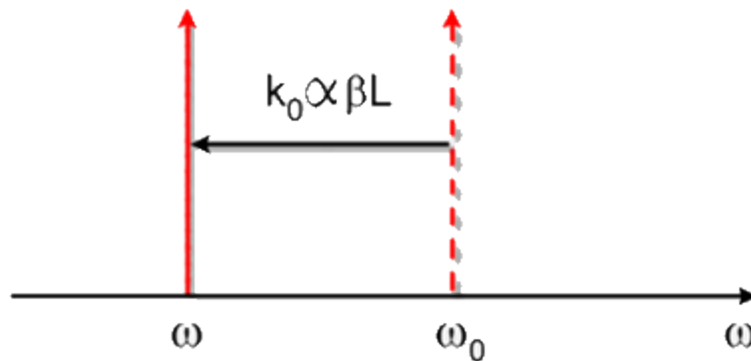


Fig. 5.10 - Alteração da frequência da luz ao passar por um cristal eletro-ótico com tensão do tipo rampa.

que é modulada pelo termo $\cos \Omega t$. Para entendermos como esta modulação altera o espectro de frequência da luz, vamos analisar o que acontece com a onda plana neste caso.

$$E = E_0 \exp\{i(k_0 n_0 L - \omega_0 t + k_0 \alpha L \beta A \sin \Omega t)\} \quad (5.39)$$

O termo $\exp(iM \sin \Omega t)$ $M = k_0 \alpha L A$, pode ser expandido numa série de funções de Bessel de acordo com:

$$\exp(iM \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(M) \exp\{-in \Omega t\} \quad (5.40)$$

de forma que o campo elétrico é dado por:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$E = E_0 \exp\{ik_0 n_0 L\} \left[J_0(M) \exp\{-i\omega_0 t\} + J_1(M) \exp\{-i(\omega_0 + \Omega)t\} + J_{-1}(M) \exp\{-i(\omega_0 - \Omega)t\} + \dots \right] \quad (5.41)$$

de onde vemos a criação de vários picos laterais à frequência fundamental 0. Lembrando-se que $J_{-n}(M) = (-1)^n J_n(M)$, temos um novo espectro de frequência da luz, que é mostrado na Fig. 5.11. Este tipo de modulação tem suas principais aplicações na geração de novas frequências para espectroscopia com laser e no "mode-locking" de lasers.

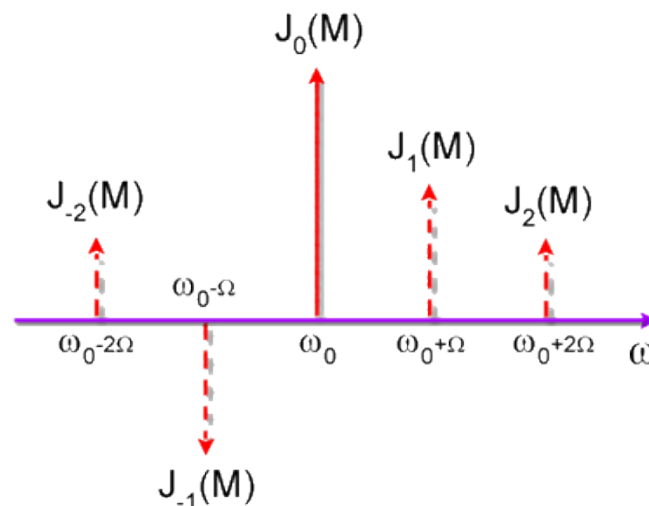


Fig. 5.11 - Geração de picos laterais (sidebands) através de modulação eletro-óptica.

6: [Varredura de frequência](#)

O efeito eletro-óptico é consequência de um processo não linear de segunda ordem que pode ocorrer em cristais que não possuem simetria de inversão. A geração de segundo harmônico é um efeito que também tem origem na não linearidade de segunda ordem. Entretanto, em cristais que possuem simetria de inversão estes efeitos não se manifestam, e a não linearidade de ordem mais baixa que pode ocorrer é a de terceira ordem. Meios do tipo Kerr se enquadram nesta classe de materiais; neles o índice de refração depende do quadrado do campo elétrico da luz (de sua intensidade), ao contrário do efeito

Autor: Sergio Carlos Zilio

eletro-óptico, que varia linearmente com o campo elétrico externo aplicado. A não linearidade Kerr pode ser expressa como:

$$n(l) = n_0 + n_2 l \quad (5.42)$$

onde n_0 é o índice de refração na ausência de luz e n_2 é denominado de índice de refração não linear. No caso em que a luz se constitui de pulsos curtos, o índice de refração dependerá do tempo devido à variação de l com t na eq. (5.42). Isto fará com que a frequência da luz se modifique de acordo com:

$$\omega = \omega_0 - \frac{k_0 n_2 dl}{dt} \quad (5.42)$$

Se o pulso for do tipo gaussiano, sua derivada terá uma forma dispersiva e as frequências geradas variarão no tempo, como mostra a Fig. 5.12. Por outro lado, um pulso curto tem associado a si um espectro de frequências com uma certa largura, como veremos posteriormente. Devido à dispersão normal do meio, as frequências correspondentes ao vermelho caminharão mais rapidamente e tentarão ficar na parte frontal do pulso ($t < 0$ na Fig. 5.12).

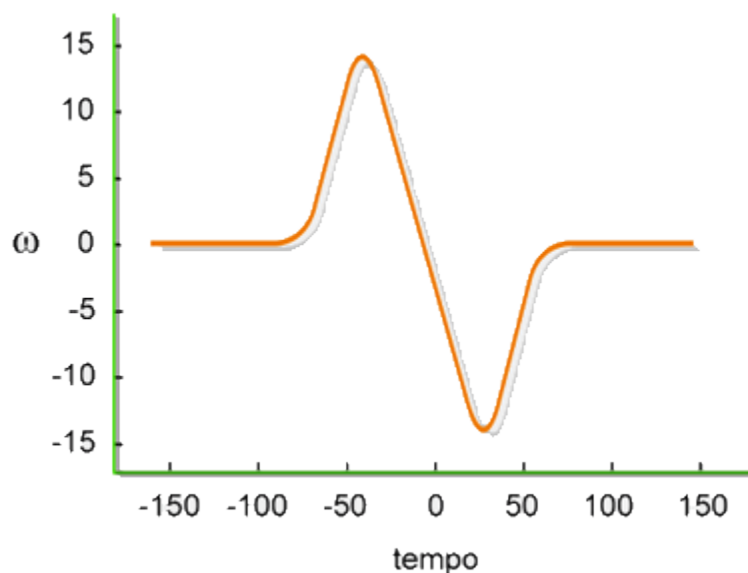


Fig. 5.12 - Variação da frequência devido ao efeito Kerr ao longo de um pulso de luz.

O tempo $t = 0$ corresponde ao centro do pulso.

Autor: Sergio Carlos Zilio

Entretanto, devido à varredura de frequências, componentes azuis são geradas na frente do pulso, que nada mais é que uma redistribuição de energia. Como consequência, a dispersão quer jogar as frequências menores (vermelho) para a parte frontal do pulso, enquanto que o efeito Kerr quer jogar as frequências maiores (azul). Na parte final do pulso ocorre o inverso: a dispersão joga as frequências maiores para a parte final do pulso, enquanto que o efeito Kerr joga as frequências menores (vermelho). Para uma intensidade convenientemente escolhida, um efeito cancela o outro e o pulso acaba se propagando sem dispersão. Este pulso que se propaga sem modificações recebe o nome de sóliton.