## 3-1 Velocidade no MHS

No movimento harmônico simples é fácil verificar, utilizando o cálculo diferencial, que a velocidade depende do tempo de uma forma análoga à sua coordenada. Ou seja, pode-se mostrar que, se a coordenada

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

Então, se pode deduzir (utilizando o cálculo diferencial) que a velocidade da partícula em função do tempo será dada pela expressão

$$v(t) = -A\omega sen(\omega t + \theta_0)$$

Onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aliás, essas duas expressões podem ser entendidas como uma definição de movimento harmônico simples, O termo harmônico se refere ao uso de funções ditas harmônicas, como o seno e o cosseno.

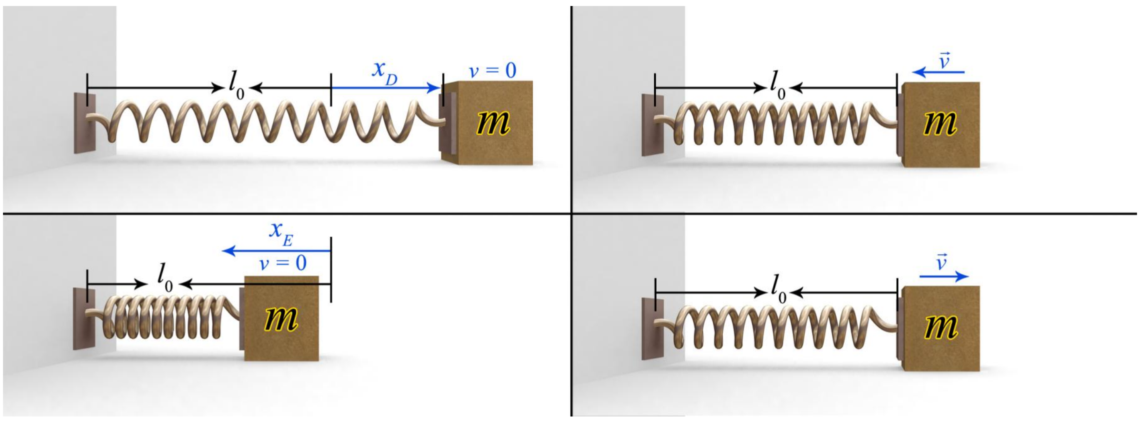


Fig. Posição e velocidade do sistema massa-mola para alguns instantes de tempo

Observando as expressões anteriores notamos que os valores máximos para a velocidade, $v_M$ e os valores mínimos da velocidade $v_m$ dados por:

$$v_M = \omega A$$

$$v_m = -\omega A$$

Isso ocorre, quando a partícula está, instantaneamente, na origem do referencial. No primeiro caso e de acordo com a figura 1 ela está nesse ponto e se movimentando para a direita. No segundo caso ela estará se movimento para a esquerda.

Nos pontos de valores máximos e mínimos do deslocamento, $x_M$ e $x_m$, valores dados por:

$$x_M = A \qquad x_m = -A$$

A velocidade da partícula será nula. Ou seja,

$$v = 0$$

Tendo em vista que

$$x(t=0) = x_0 = A\cos(\theta_0)$$

$$v(t=0) = v_0 = -A\omega sen(\theta_0)$$

Podemos constatar que a amplitude pode ser determinada uma vez conhecidas as condições iniciais. Ou seja, escrevemos:

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Ao passo que a fase inicial também pode ser inferida a partir das condições iniciais. Nesse caso, obtemos:

$$\frac{sen(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} = -\frac{v_0}{x_0\omega}$$

Ou seja,

$$\theta_0 = arctg\left(-\frac{v_0}{x_0\omega}\right)$$

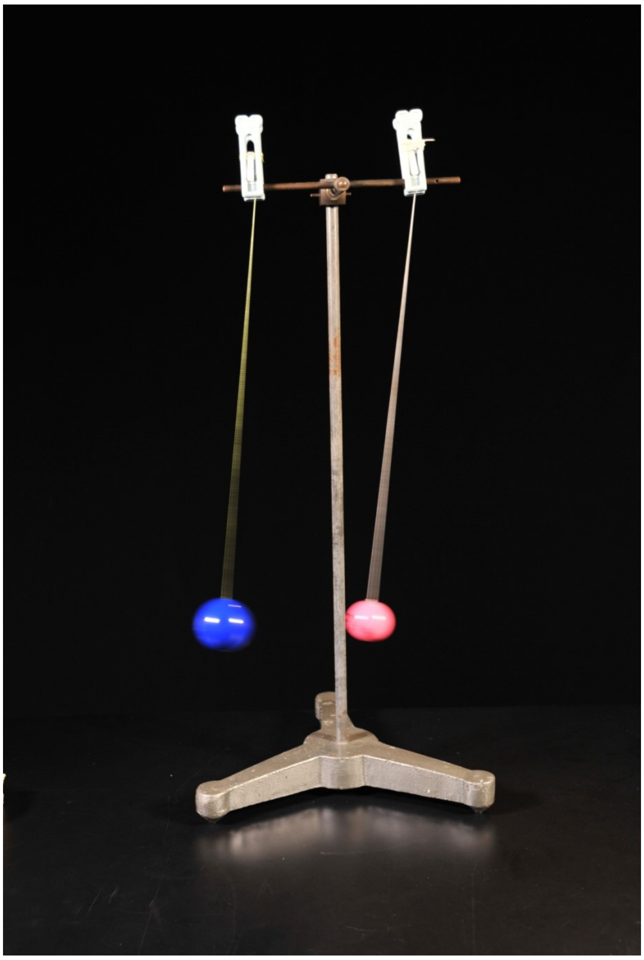

Fig. Em cada instante de tempo, a partícula tem uma posição, uma velocidade e uma aceleração diferentes

## 3-2 Aceleração no MHS

A aceleração varia, igualmente com o tempo. Sua variação é análoga àquela da posição. Para entendermos isso, recorremos á lei de Newton

$$ma(t) = F$$

E, portanto

$$ma(t) = -kx(t)$$

Essa relação decorre de uma propriedade geral do movimento harmônico simples. De fato, podemos definir o MHS como sendo um movimento para o qual a relação é válida. Daí concluímos que

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

E, portanto, a aceleração depende do tempo da seguinte forma:

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0)$$

Na figura (000) apresentamos os gráficos de $vxt$ e $axt$ do movimento harmônico simples.

A aceleração também atinge um valor máximo, $a_M$, e um valor mínimo $a_m$ os quais são dados pelos valores

$$a_M = \omega^2 A = \omega v_M$$

$$a_m = -\omega^2 A = -\omega v_M$$

É importante observar que quando o móvel atinge os valores máximos ($x_M$) e mínimos ($x_m$) do deslocamento, a velocidade do móvel é nula. São os pontos de inversão do sentido do movimento. Nos pontos de maior velocidade (em qualquer direção), os valores tanto do deslocamento quanto da aceleração são nulos.

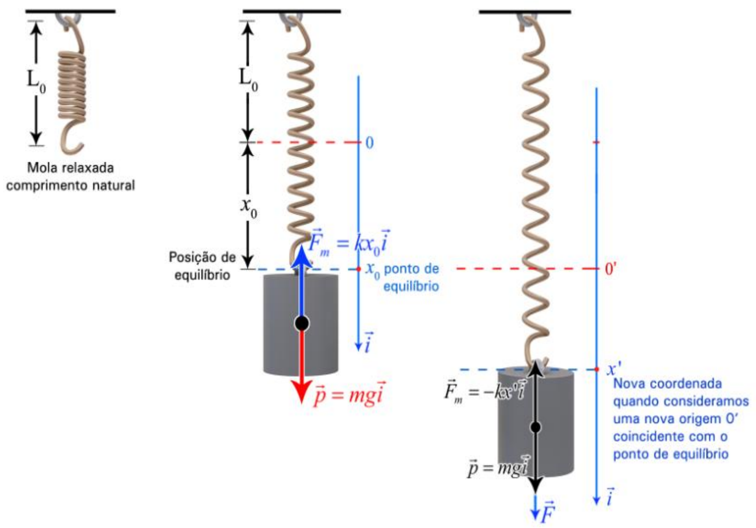


Fig. a posição, a velocidade e a aceleração da partícula presa à mola variam com o tempo

## 3-3 Gráficos do MHS

Na figura (000) esboçamos o gráfico da posição, bem como da velocidade como função do tempo.

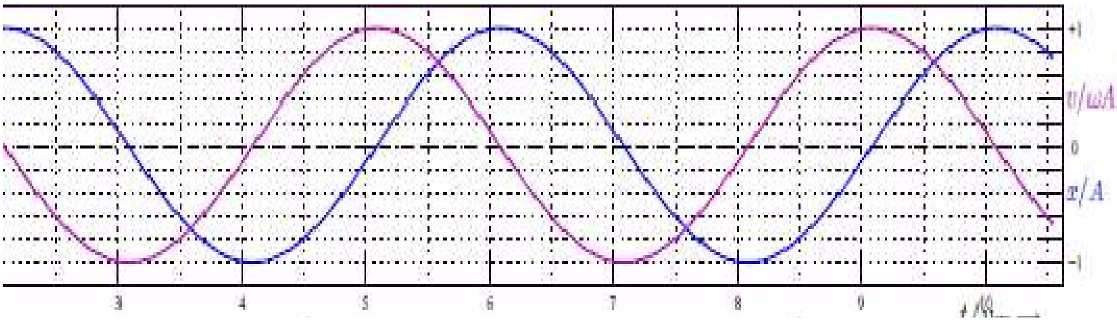


Fig. gráfico da posição e da velocidade da partícula como funções do tempo

Na próxima figura apresentamos os gráficos da velocidade, da aceleração e da coordenada $x$ como função do tempo.

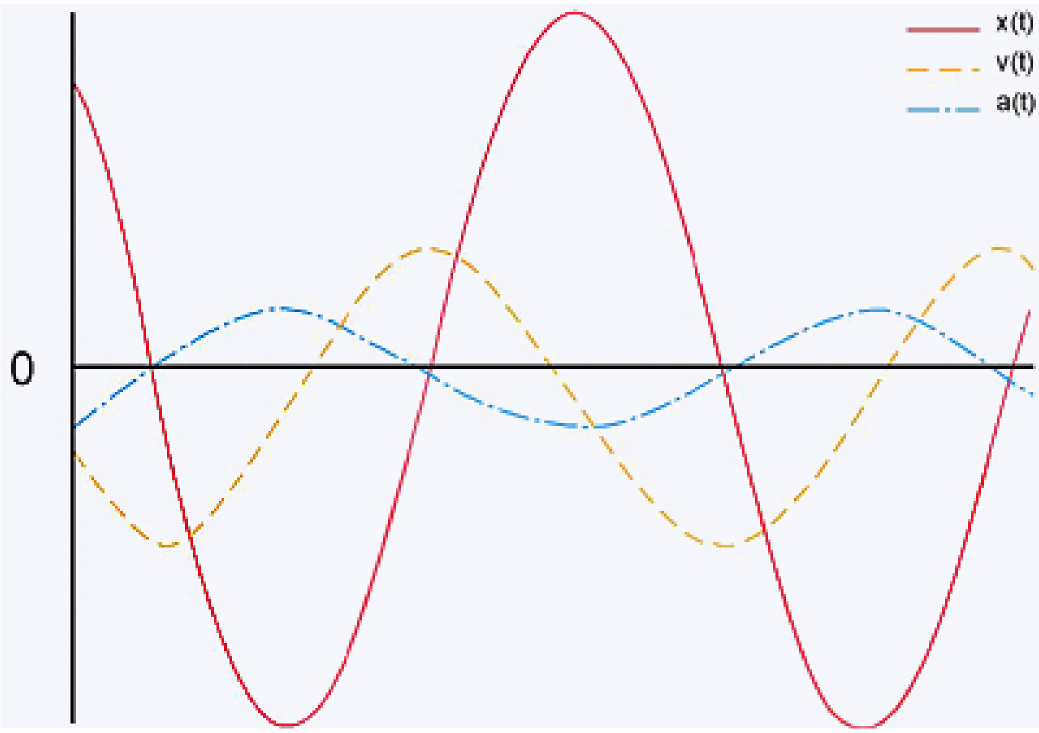


Fig. Gráficos de v × t e a × t do movimento harmônico simples

## 3-4 Energia no MHS

A energia mecânica é conservada ao longo de todo o movimento do oscilador harmônico. Como sabemos, ela consiste de dois temos. O primeiro é a energia cinética, a qual é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[A\omega sen\left(\omega t+\alpha\right)\right]^2 = \frac{1}{2}m\left(A\omega\right)^2\left[sen\left(\omega t+\alpha\right)\right]^2$$

Ou seja, a energia cinética varia com o tempo ao longo do movimento.

A segunda forma de energia do pêndulo é a energia potencial. Ela depende da coordenada da partícula de acordo com a expressão:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

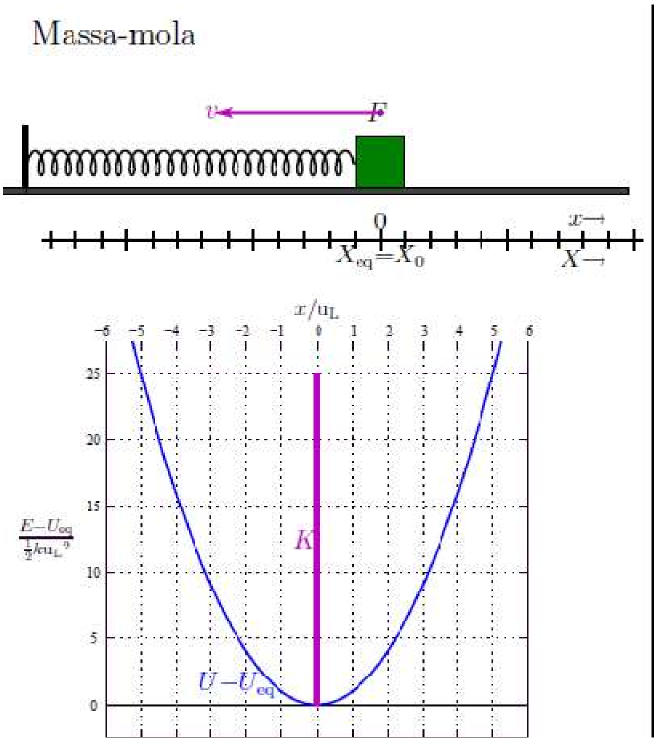


Fig. Gráfico da energia potencial.

Logo, substituindo-se a expressão para a coordenada como função do tempo, encontramos:

$$U = \frac{1}{2}k\left[A\cos\left(\omega t+\alpha\right)\right]^2 = \frac{1}{2}kA^2\left[\cos\left(\omega t+\alpha\right)\right]^2$$

E, portanto, essa forma de energia também depende do tempo.

Assim no caso do movimento harmônico simples, a energia mecânica é dada pela expressão:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Substituindo-se as expressões para a velocidade angular e o ângulo em função do tempo, encontraremos:

$$E = \frac{1}{2}m(A\omega)^2\left[sen(\omega t + \alpha)\right]^2 + \frac{1}{2}kA^2\left[\cos(\omega t + \alpha)\right]^2$$

Tendo em vista que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Obtemos

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left[sen(\omega t + \alpha)\right]^2 + \frac{1}{2}kA^2\left[\cos(\omega t + \alpha)\right]^2 = \frac{1}{2}kA^2\left(\left[sen(\omega t + \alpha)\right]^2 + \left[\cos(\omega t + \alpha)\right]^2\right)$$

Finalmente, lembrando que

$$sen^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha) = 1$$

Obtemos;

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Que é como sabemos e como foi verificado explicitamente, constante. A energia depende do quadrado da amplitude.

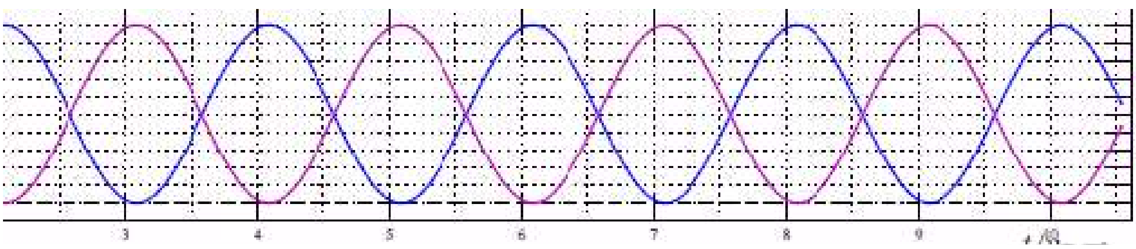


Fig. As energias potencial e cinética variam com o tempo. A energia mecânica, no entanto, permanece constante