

1: Introdução ao conceito de onda

Para entendermos a propagação de uma onda e outros aspectos físicos relacionados à luz vamos inicialmente rever algumas idéias ligadas ao conceito de onda. Começaremos analisando uma onda mecânica, que é uma perturbação que caminha num meio material. Um exemplo bastante conhecido é o de uma corda estirada no chão sobre a qual se exerce um rápido puxão para cima. Sabemos que se forma um pulso nesta corda e que ele caminha (ou propaga-se) ao longo dela. Esta situação corresponde ao caso de propagação em uma dimensão (direção), ilustrado na Fig. 4.1. Outro exemplo de onda mecânica é o caso de uma pedra que cai na superfície absolutamente calma de um lago. Ao tocar na água, a pedra provoca um movimento do líquido, na forma de um círculo que aumenta radialmente. Neste caso, temos uma onda que se propaga em duas dimensões, sobre o plano definido pela superfície do lago. Estes são exemplos de perturbações que podem ser caracterizados como movimentos ondulatórios chamados pulsos.

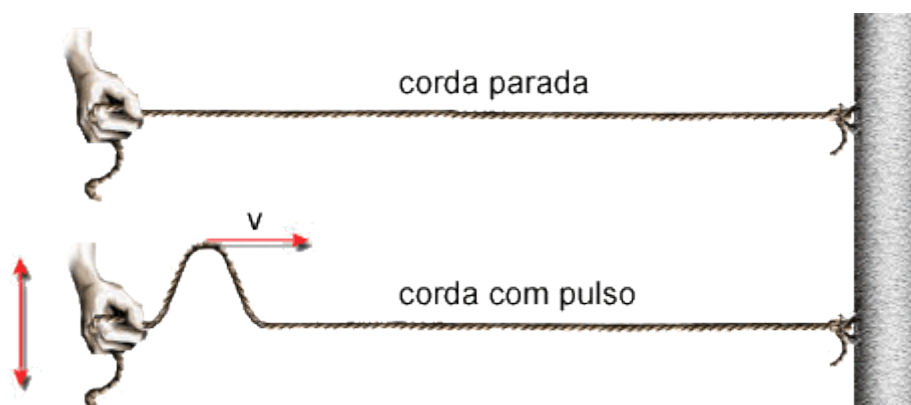


Fig. 4.1 - Ilustração de um pulso propagando-se numa corda.

Uma pergunta pertinente seria: podemos descrever este efeito matematicamente? A resposta é obviamente sim e a equação que descreve a propagação da onda, bem como sua solução, já eram conhecidas desde o século XVIII. Se estivermos tratando com ondas unidimensionais, que caminham apenas na direção z , por exemplo, a equação que descreve sua propagação é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

que envolve derivadas parciais de segunda ordem com relação às variáveis espaço e tempo. A função u representa a perturbação provocada pela onda no

Autor: Sergio Carlos Zilio

meio, como por exemplo, a altura do pulso na corda. Por sua vez, v é a velocidade com que a onda caminha. Esta equação diferencial tem como soluções possíveis quaisquer funções que possuam o argumento descrevendo um movimento retilíneo uniforme, dado por: $z = z_0 \pm vt$, ou alternativamente, $z \pm vt = \text{constante}$. Nesta última expressão, o sinal negativo corresponde a um movimento na direção do eixo z , enquanto que o sinal positivo descreve um movimento na direção negativa do eixo z . Estas soluções referem-se às ondas que se propagam sem dispersão, isto é, o pulso caminha com velocidade constante, sem que haja distorção no seu formato. No [Cap. 5](#) trataremos do caso mais geral em que existe dispersão, a qual provoca mudanças no formato do pulso ao se propagar.

Uma onda pode ser descrita de maneira geral como: $u_1 = f(z - vt)$ e $u_2 = g(z + vt)$, onde f e g são funções quaisquer. Se houver no meio ondas se propagando simultaneamente nas duas direções, a solução geral é dada pela combinação linear:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 = a_1 f(z - vt) + a_2 g(z + vt) \quad (4.2)$$

onde u_1 e u_2 representam respectivamente, pulsos caminhando nas direções $+z$ e $-z$. A combinação linear das ondas presentes no meio, expressa pela eq. (4.2), é conhecida como princípio da superposição e será abordada no problema 4.1. A forma de cada pulso é estabelecida pelas funções f e g , e depende das condições iniciais do problema, isto é, de como se gera o pulso no meio. Ao contrário das ondas mecânicas, as ondas eletromagnéticas, que discutimos a seguir, não precisam de um meio material para se propagarem.

[2: Ondas eletromagnéticas](#)

Por volta de 1870, James Clerk Maxwell introduziu um conjunto de equações envolvendo os campos elétrico e magnético, colocando de forma clara as equações empíricas existentes na época. Também introduziu o conceito de corrente de deslocamento, tornando a lei de Ampère mais geral. Estas equações, conhecidas atualmente como equações de Maxwell, estão discutidas em detalhes nos textos básicos de eletromagnetismo (ver referência 4.1). Temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.3a)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.3d)$$

onde o sistema internacional (MKSA) foi adotado. O último termo da eq. (4.3d) representa a corrente de deslocamento introduzida por Maxwell. Cada uma destas equações corresponde a uma lei física descoberta empiricamente. De acordo com a ordem usada acima temos: lei de Gauss, inexistência de monopolo magnético, lei da indução de Faraday e lei de Ampère-Maxwell. O significado das grandezas que aparecem neste conjunto de equações é o usual: \vec{E} é o campo elétrico, \vec{B} é a indução magnética, r é a densidade de portadores livres, \vec{J} é a densidade de corrente devida aos portadores livres, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ é o deslocamento elétrico e $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ é o campo

magnético. Introduzimos assim, a polarização elétrica e a magnetização, que correspondem à resposta do meio devido à presença dos campos elétrico e magnético, respectivamente. As

constantes $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$ e $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \frac{H}{m}$, determinadas

empiricamente, são denominadas respectivamente de permissividade e permeabilidade do vácuo.

As equações de Maxwell podem ser combinadas de forma a gerar uma nova equação que descreve a onda eletromagnética. Antes, porém, vamos fazer hipóteses simplificadoras para as relações constitutivas que nos dão a resposta do meio à presença dos campos. Vamos supor relações lineares do tipo $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{\chi} \vec{E}$, $\vec{M} = \vec{\chi}_m \vec{B}$ e $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (conhecida como lei de Ohm), onde $\vec{\chi}$ e $\vec{\chi}_m$ são respectivamente as susceptibilidades elétrica e magnética e σ é a condutividade elétrica. Em geral $\vec{\chi}$ é um tensor, de forma que as polarizações e os campos podem não ser paralelos. Entretanto, neste capítulo vamos considerar apenas meios isotrópicos, nos quais $\vec{\chi}$ e $\vec{\chi}_m$ são escalares, isto é, $\vec{\chi}_{ij} = \vec{\chi} \delta_{ij}$. Voltaremos a abordar o caráter tensorial destas grandezas quando tratarmos da propagação da luz em meios anisotrópicos dentre os quais se enquadram diversos tipos de cristais. Desta forma, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$, onde \vec{D} e \vec{E} são paralelos.

Autor: Sergio Carlos Zilio

Analogamente, $\vec{B} = m\vec{H}$, onde $\mu = \mu_0 \left(\frac{1}{\chi_m} \right)$. Definiremos constante dielétrica

como $k_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi)$ e permeabilidade magnética como $k_m = \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_m)$.

Estamos interessados em estudar a propagação de ondas eletromagnéticas num meio livre e homogêneo, isto é, $\rho = \vec{J} = 0$, μ e ϵ não dependem da posição. Tomando-se o rotacional da eq. (4.3c) temos:

$$\vec{\nabla}_x (\vec{\nabla}_x \vec{E}) = -\vec{\nabla}_x \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_x \vec{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_x \vec{H}) \quad (4.4)$$

Usando a eq. (4.3d) com $\vec{J} = 0$, a identidade vetorial $\vec{\nabla}_x (\vec{\nabla}_x \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ e o fato que num meio livre e homogêneo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, obtemos a equação usando as eq. (4.3b) e (4.3c), obtemos uma equação similar para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Se considerarmos a propagação em apenas uma dimensão (apenas na direção de ondas:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Analogamente, tomando o rotacional da lei de Ampère-Maxwell e

z, por exemplo), o Laplaceano se transforma numa derivada segunda com relação a z, e assim as eq. (4.5) e (4.6) tem a forma da equação de ondas dada por (4.1). Este tipo de equação já era conhecido na época, de forma que Maxwell pode concluir que se tratava de uma onda com velocidade de propagação $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$. É interessante enfatizar que quando estas equações

foram obtidas pouco se conhecia sobre a natureza da luz. Apenas quando Maxwell substituiu os valores de ϵ e μ , conhecidos empiricamente através de medidas de capacitância e indutância, obteve-se que a onda eletromagnética tinha uma velocidade de propagação igual à da luz, e assim pode ser feito o relacionamento entre a óptica e o eletromagnetismo. No caso tridimensional, as equações (4.5) e (4.6) são cada uma um conjunto de três equações para as componentes, isto é:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\nabla^2 E_x = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (4.7a)$$

$$\nabla^2 E_y = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (4.7b)$$

$$\nabla^2 E_z = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (4.7c)$$

Existe ainda um conjunto de equações similares para o campo magnético. Todas são equações diferenciais lineares, de segunda ordem, que podem ter uma infinidade de soluções, dependendo das condições de contorno impostas pela geometria de cada situação particular. Na seção seguinte vamos discutir os tipos de soluções mais comuns.

3: Ondas harmônicas unidimensionais

A equação para a onda eletromagnética unidimensional tem a forma da equação para u e portanto, sua solução se constitui de pulsos do tipo:

$$E = E(z \pm vt) \quad (4.8a)$$

$$H = H(z \pm vt) \quad (4.8b)$$

caminhando com velocidade $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{k_e \epsilon_0 k_m \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{k_2 k_m}}$, onde c é a velocidade da luz no vácuo ($k_2 = k_m = 1$). Para meios dielétricos e não magnéticos ($k_m = 1$), temos $v = \frac{c}{\sqrt{k_2}} = \frac{c}{n}$ onde $n = \sqrt{k_e}$ é o índice de refração do meio.

Um caso particular muito interessante das soluções expressas pelas eq. (4.8a) e (4.8b) é o das ondas harmônicas, que são perturbações periódicas da forma:

$$E = E_0 \cos[k(z \pm vt)] = E_0 \cos[(kz \pm \omega t)] \quad (4.9a)$$

$$H = H_0 \cos[k(z \pm vt)] = H_0 \cos[(kz \pm \omega t)] \quad (4.9b)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

onde definimos:

$$\omega = kv \quad (4.10)$$

sendo a frequência angular da onda e k a constante de propagação ou módulo do vetor de propagação. Posteriormente, veremos com mais detalhes o significado físico destas grandezas. Assim como a expressão co-senoidal apresentada acima, soluções do tipo seno também satisfazem a equação de ondas e também são chamadas de ondas harmônicas. Como exemplo, no caso das ondas mecânicas funções do tipo seno ou co-seno podem ser obtidas conectando um diapasão numa das extremidades de uma corda esticada. Existe ainda uma terceira maneira de se expressar a onda harmônica, mais conveniente para a realização da operação de multiplicação dos campos, que é a forma exponencial:

$$E = E_0 \exp\{i[k(z \pm vt)]\} = E_0 \exp\{i[(kz \pm \omega t)]\} \quad (4.11)$$

que também satisfaz a equação de ondas. De acordo com a forma de Euler ($\exp\{i\theta\} = \cos\theta + i\sin\theta$) esta expressão contém um termo real e outro imaginário. Como o campo elétrico (assim como o magnético) deve ser uma variável real, é costume tomar-se apenas a parte real (ou imaginária) da eq. (4.11).

Vamos enfatizar aqui que uma onda tem três partes importantes: a) a amplitude (E_0), b) a orientação espacial dos campos (polarização) e c) a fase ($kz \pm \omega t$). A amplitude está ligada à intensidade, que determina a potência que está sendo transportada pela onda. A polarização dos campos está vinculada à orientação do vetor campo elétrico no espaço. Esta orientação define o que chamamos de polarização de uma onda e será tema de muitas discussões ao longo do texto, como por exemplo, quando estudarmos os fenômenos de reflexão e refração. Veremos ainda que a fase, que é o argumento da função que descreve a onda, é um elemento fundamental no entendimento de vários fenômenos, como por exemplo o da interferência de ondas.

O argumento das funções dadas nas eq. (4.8a) e (4.8b) possui um termo descrevendo a variação espacial da onda, e outro, a temporal. De fato, não é algo simples a visualização conjunta das variações no espaço e no tempo, e a maneira mais funcional para analisar a fase é fazê-la separadamente. Para simplificar ainda mais a discussão, faremos uso das ondas harmônicas definidas nas eq. (4.9a) e (4.9b). Vamos somar 2 ao argumento da função, o

Autor: Sergio Carlos Zilio

que não altera o valor da amplitude do campo da onda pois $\cos\phi = \cos(\phi + 2\pi)$. Ao fazermos este incremento de fase, sua origem pode ser oriunda tanto da parte espacial quanto temporal, isto é, a variação pode ser no valor de z ou no de t .

Tomemos inicialmente a variação de fase como sendo de origem temporal. Consideremos um dado instante de tempo t e que decorrido um intervalo de tempo T , a fase se altera como um todo de 2π . Desta forma, temos:

$$E = E_0 \cos[kz \pm \omega(t + T)] = E_0 \cos[kz \pm \omega t + \omega T] = E_0 \cos[kz \pm \omega t + 2\pi].$$

Neste caso, $\omega T = 2\pi$ que nos leva a:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4.12)$$

O intervalo de tempo T para o qual a onda harmônica se repete é chamado de período temporal da onda. A eq. (4.12) define a relação que deve existir entre período, frequência angular ω e frequência f .

Tomemos a seguir a variação de 2π na fase como sendo oriunda da parte espacial. Desta forma, consideramos a onda em um dado ponto z e, no mesmo instante, o ponto $(z + \lambda)$, tal que este deslocamento espacial gere a variação de fase citada. Temos então que

$$E = E_0 \cos[k(z + \lambda) \pm \omega t] = E_0 \cos[kz \pm \omega t + k\lambda] = E_0 \cos[kz \pm \omega t + 2\pi]$$

Disto vem que $k\lambda = 2\pi$ e conseqüentemente:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.13)$$

Portanto, chegamos à conclusão que existe um período espacial dado por λ , à semelhança do período temporal já discutido. A eq. (4.13) define a relação entre o módulo do vetor de propagação e este período espacial, chamado de comprimento de onda. Isto evidencia que as partes espacial e temporal de uma onda participam em pé de igualdade, ou seja, tanto é possível haver alteração de uma onda através da passagem do tempo quanto da mudança de posição no espaço. A Fig. 4.2 ilustra o comportamento de uma onda harmônica como função da variável espacial para diversos tempos, isto é, como se a onda fosse fotografada periodicamente. A mudança de uma onda no tempo é algo muito comum em eletrônica, enquanto que a mudança de fase no espaço é algo próprio da óptica. Assim sendo, em eletrônica se faz a modulação de sinal no

Autor: Sergio Carlos Zilio

tempo, enquanto em óptica se pode modular não apenas no tempo, mas também no espaço.

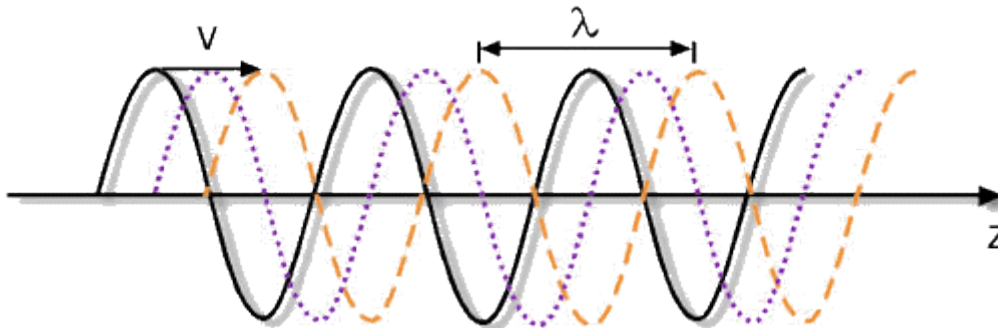


Fig. 4.2 - Evolução temporal-espacial de uma onda harmônica. Conforme o tempo passa, a onda caminha para a direita com velocidade v constante

4: Ondas planas e esféricas

O caso discutido acima é o das ondas harmônicas unidimensionais, para as quais a propagação ocorre apenas ao longo do eixo z . No caso de uma onda que se propaga numa direção qualquer do espaço, além de z , as coordenadas x e y também aparecem na solução da equação de ondas se utilizarmos o Laplaceano em coordenadas cartesianas. Assim, generalizando a eq. (4.11) temos:

$$E = E_0 \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t)\} = E_0 \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)\} \quad (4.14)$$

onde o vetor $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$ define a direção de propagação da onda e é

chamado de vetor de propagação, cujo módulo, como já vimos é $\frac{2\pi}{\lambda}$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é chamado de vetor posição. Os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} indicam a direção e sentido dos eixos x , y e z , do sistema de coordenadas cartesianas. A solução dada por (4.14) é de extrema importância uma vez que qualquer pulso $f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)$ pode ser gerado fazendo uma superposição de campos elétricos $E(\omega)$, isto é, calculando a transformada de Fourier de $E_0(\omega)$:

$$E = E_0 \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t)\} = E_0 \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)\} \quad (4.15)$$

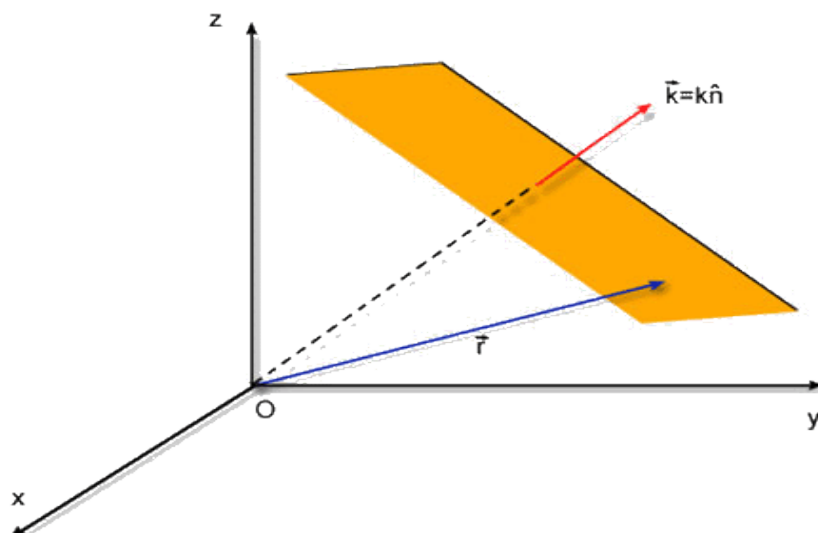
Autor: Sergio Carlos Zilio

sendo que w_0 entra nos limites de integração. Desta forma podemos ver que a solução harmônica é uma espécie de onda básica e as soluções mais complicadas são derivadas a partir dela. Voltaremos a este assunto no Cap. 8, quando estudarmos a resolução espectral de um trem de ondas finito.

Entretanto, devemos afirmar que embora esta solução seja importante do ponto de vista matemático, ela não tem significado físico, já que as condições de contorno demandariam fontes de dimensões infinitas (planos), como veremos a seguir.

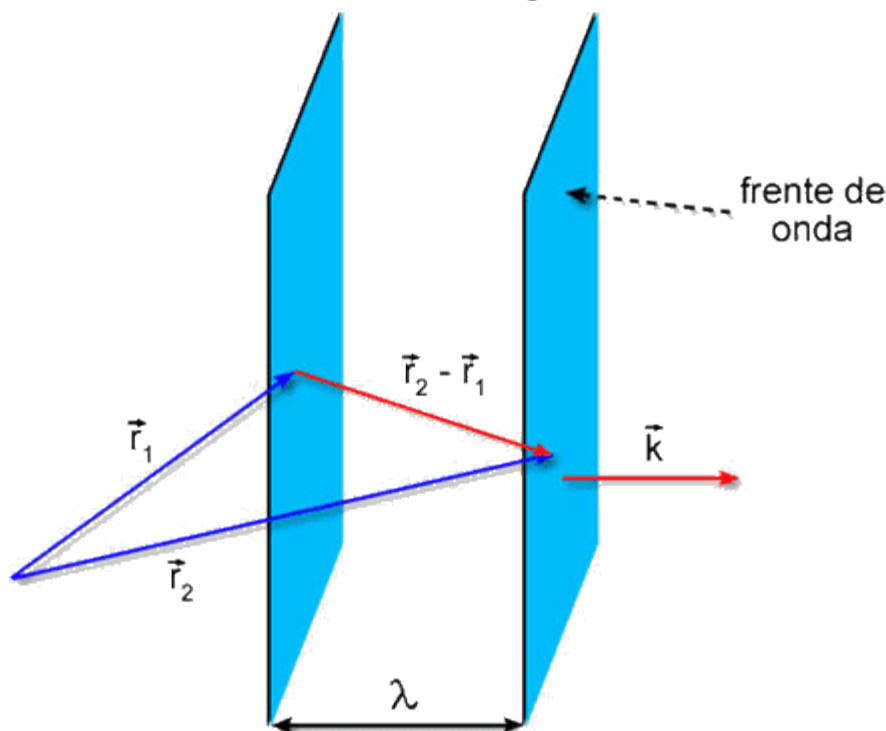
De acordo com a eq. (4.14), a fase da onda é $\phi(r, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$. Vamos encontrar para quais pontos no espaço esta fase tem o mesmo valor, isto é, queremos determinar as superfícies equifases. Assim, para um dado instante de tempo t deve ser constante e isto só é possível se $\vec{k} \cdot \vec{r} = k\hat{n} \cdot \vec{r} = \text{constante}$. Aqui, \hat{n} é um versor que especifica a direção e o sentido do vetor de propagação \vec{k} . A realização do produto escalar nos leva a: $k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$, que é a equação do plano visto na Fig. 4.3, cuja normal é o próprio vetor de propagação. Desta forma concluímos que a onda plana possui como superfícies equifases, planos que se propagam na direção de \vec{k} , com velocidade v .

Para entendermos melhor o significado de \vec{k} vamos fazer uso da Fig. 4.4, que representa duas superfícies equifases tais que os argumentos das funções seno diferem exatamente de 2π , significando que a onda se repete. Logo, a separação entre os dois planos é λ , como discutido anteriormente. Assim, para um certo tempo t , $\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t = \text{const}$ e $\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t = \text{const.} + 2\pi$. Subtraindo estas duas igualdades temos: $\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi$. Levando em conta que o produto escalar seleciona apenas a componente

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 4.3 - Superfície equifase de uma onda plana.**

de \vec{r} paralela a \vec{k} (portanto perpendicular aos planos equifases), e que esta corresponde à separação entre os dois planos consecutivos, concluímos que $k\lambda = 2\pi$ e conseqüentemente $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, como no caso da onda unidimensional. Como para a translação com velocidade constante, o espaço é igual à velocidade vezes o tempo, temos $\lambda = T v = \frac{v}{f}$. Assim obtemos

$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$, que é a velocidade de fase da onda, que será abordada com maiores detalhes no final do capítulo.

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 4.4 - Significado de .**

Um outro tipo de solução para a equação de ondas é a onda esférica, que está ligada à condição de contorno correspondente à radiação emitida por uma fonte pontual. Quando tal fonte emite radiação eletromagnética, a onda gerada se espalha em todas as direções, como mostrado na Fig. 4.5, diferentemente da onda plana que caminha apenas na direção do vetor de propagação \vec{k} . Neste caso, o campo elétrico é dado por:

$$E = \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (4.16)$$

Nesta expressão vemos que a amplitude decresce com r e a razão para isto está ligada ao princípio da conservação de energia. A potência (energia por unidade de tempo) é o produto da intensidade pela área atravessada pela onda, que no caso da esfera é $A = 4\pi r^2 l$. Logo, devido à conservação de energia (ou potência), $4\pi r^2 l$ deve ser constante conforme a onda esférica se propaga. Como veremos no final do capítulo, $l \propto E^2$ (ver eq. (4.41)) de onde concluímos que E depende de $1/r$. Conforme mostra a Fig. 4.5, o produto kr dá origem a uma superfície equifase esférica, dependente de r . Note que no argumento da exponencial aparecem apenas os módulos dos vetores \vec{k} e \vec{r} , e não o seu produto escalar.

Autor: Sergio Carlos Zilio

Fig. 4.5 - Onda esférica.

Existem outros tipos de soluções para a equação de ondas e um dos mais comuns é a solução do tipo gaussiana, que abordaremos na seção 4.5.

Uma identidade importante é a que relaciona \vec{H} e \vec{E} . Para derivá-la devemos notar que de acordo com a expressão da onda plana,

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} + i\vec{k}_x \vec{E} \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E} \quad (4.17b)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\omega \vec{H} \quad (4.17c)$$

Como $\vec{\nabla}_x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu \partial \vec{H}}{\partial t}$, temos $i\vec{k}_x \vec{E} = i\mu\omega \vec{H}$, isto é, \vec{H} e \vec{E} são perpendiculares entre si. Por outro lado,

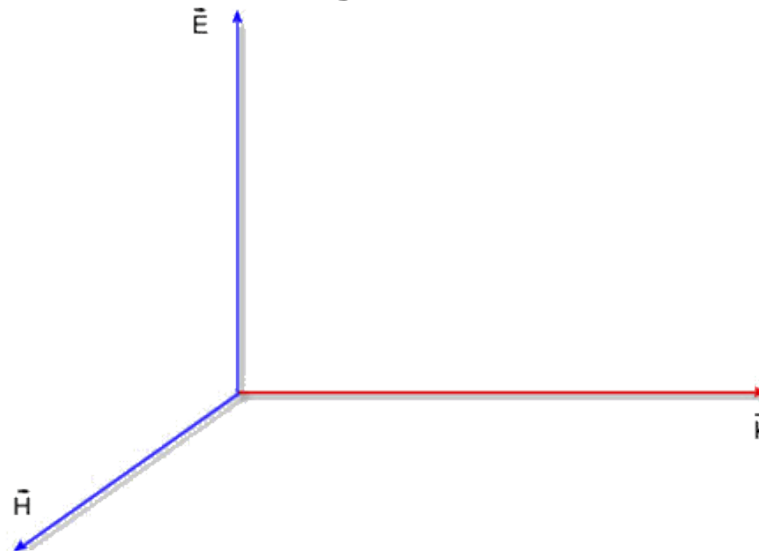
$$\vec{\nabla} \vec{E} = i\vec{k} \vec{E} = 0 \quad (4.18a)$$

significando que \vec{k} e \vec{E} são perpendiculares. Também,

$$\vec{\nabla} \vec{H} = i\vec{k} \vec{H} = 0 \quad (4.18b)$$

e assim, \vec{k} e \vec{H} são perpendiculares. Logo, concluímos que \vec{k}, \vec{H} e \vec{E} são mutuamente perpendiculares, como mostra a Fig. 4.6. É claro que isto só é

válido em meios isotrópicos, onde $\vec{\nabla} \vec{E} = 0$. Nos meios anisotrópicos, a condição a ser utilizada é $\vec{\nabla} \vec{D} = 0$, e neste caso, \vec{k}, \vec{H} e \vec{D} são mutuamente perpendiculares.

Autor: Sergio Carlos Zilio**Fig. 4.6 - Geometria dos vetores**

5: Ondas Gaussianas

Uma solução importante da equação de ondas é aquela obtida ao se utilizar o Laplaceano em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.19)$$

onde ∇_T^2 é a parte associada à coordenada radial. Fisicamente, o uso destas coordenadas implica que o meio possui condições de contorno com simetria azimutal, isto é, podem existir obstáculos circulares, meios do tipo lente como discutido no Cap. 2, etc. A solução que vamos obter a seguir é de observação bastante comum em laboratórios de óptica, pois corresponde ao tipo de luz emitida pela maioria dos lasers. Como o sistema de coordenadas particulares escolhido para o Laplaceano não tem influência na parte temporal do campo elétrico, é de se esperar que, como nos dois casos discutidos na seção anterior, ele seja dado por uma expressão do tipo:

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp\{-i\omega t\} \quad (4.20)$$

Substituindo esta solução tentativa na eq. (4.5), obtemos a equação de ondas na forma reduzida, que envolve apenas as coordenadas espaciais:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2(r) \vec{E} = 0 \quad (4.21)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

onde $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$ pode depender da coordenada radial se tivermos um meio do tipo lente. Entretanto, com o objetivo de simplificar os cálculos seguintes, vamos supor que o meio seja homogêneo, isto é, k é constante. Tomando apenas uma componente vetorial de \vec{E} e supondo que a onda tem sua propagação confinada em torno do eixo z , fazemos a mudança de variáveis:

$$E(r, z) = \psi(r, z) \exp\{-ikz\} \quad (4.22)$$

que quando substituída na eq. (4.15) resulta em:

$$\nabla_T^2 \psi - 2ik\psi' = 0 \quad (4.23)$$

onde $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ e o termo proporcional a ψ'' foi desprezado. Esta é ainda uma equação difícil de ser resolvida e sem nenhuma justificativa ad hoc, vamos tentar uma solução do tipo:

$$\psi(r, z) = \psi_0 \exp\left\{-i\left[P(z) + \frac{Q(z)r^2}{2}\right]\right\} \quad (4.24)$$

Substituindo na eq. (4.23) obtemos:

$$Q^2 r^2 + 2iQ + kr^2 Q' + 2kP' = 0 \quad (4.25)$$

onde as derivadas de P e Q são relativas a z . Como esta igualdade é válida para qualquer r , devemos analisar as partes que possuem a mesma potência em r . Assim,

$$Q^2 + kQ' = 0 \quad (4.26a)$$

$$iQ + kP' = 0 \quad (4.26b)$$

Desta forma, obtemos equações diferenciais, que embora não lineares, são de primeira ordem, e conseqüentemente fáceis de serem resolvidas. A solução da eq. (4.26a) resulta em:

$$Q(z) = \frac{k}{z + q_0} \quad (4.27)$$

onde q_0 é uma constante de integração, que será analisada posteriormente. Utilizando este resultado na eq. (4.26b) é fácil mostrar que:

$$P(z) = -i \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) \quad (4.28)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

Podemos agora substituir os valores de $P(z)$ e $Q(z)$ na eq. (4.24) para encontrarmos a função $y(r,z)$. Antes porém, vamos re-escrever a constante de integração como $q_0 = iz_0$, com z_0 real. A razão de se considerar q_0 imaginário é que esta é a única maneira de se obter uma solução que está confinada em torno do eixo z ; caso contrário, o campo elétrico se estenderia exponencialmente até o infinito e esta é uma solução que não nos interessa. Desta forma temos:

$$\begin{aligned} \exp\{-iP(z)\} &= \exp\left\{-\ln\left[1-i\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{1-i\left(\frac{z}{z_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} \exp\left\{itg^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \exp\left\{-i\frac{Q(z)r^2}{2}\right\} &= \exp\left\{-i\frac{k}{2}\left(\frac{r^2}{z+iz_0}\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{-i\frac{kr^2}{2}\left(\frac{z-iz_0}{z^2+z_0^2}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{r^2}{w^2(z)} - \frac{ikr^2}{2R(z)}\right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde as grandezas $w(z)$ e $R(z)$ foram introduzidas como:

$$w^2(z) = \frac{2z_0}{k} \left\{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)\right\}^2 = w_0^2 \left\{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)\right\}^2 \quad (4.31a)$$

onde $w_0 = \frac{2z_0}{k}$ é o valor de $w(z)$ na origem ($z = 0$) e

$$R(z) = z \left\{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)\right\}^2 \quad (4.31b)$$

Com estas definições o campo elétrico fica:

$$E(r,z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left\{-\frac{r^2}{w^2(z)}\right\} x \exp\left\{-i\left[kz - \eta(z) + \frac{ikr^2}{2R(z)}\right]\right\} \quad (4.32)$$

Autor: Sergio Carlos Zilio

onde $\eta(z) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right)$. Podemos agora fazer uma interpretação do significado

desta expressão. A primeira parte da eq. (4.32) está ligada à amplitude do campo. Vemos que ao se modificar a coordenada radial o campo decai exponencialmente, de forma a seguir uma função gaussiana. O comportamento de E contra r está mostrado na Fig. 4.7. Para uma distância $r = w(z)$, o valor

de E decai para $\frac{1}{e}$ do valor em $r = 0$. Esta distância é chamada de raio do

feixe. Na origem, o raio mínimo é w_0 , de acordo com a eq. (4.31a). Nesta posição temos a "cintura do feixe". Ainda de acordo com esta equação, vemos

que $z_0 = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{nw_0^2}{\lambda}$. Este parâmetro é chamado de intervalo de Rayleigh.

Para $z = z_0$, o raio do feixe aumenta de um fator $\sqrt{2}$ quando comparado com o valor em $r = 0$. Ainda com relação à amplitude do campo, para $r = 0$, o feixe vai se abrindo conforme z aumenta e a amplitude decai com z, de acordo com

$\frac{w_0}{w(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}}$. É interessante notar que existe um tamanho mínimo para

o diâmetro do feixe e isto está ligado ao fenômeno de difração, que veremos no Cap. 9. Para z muito maior que z_0 , a eq. (4.31a) prediz que $w(z) = \frac{w_0 z}{z_0}$.

Usando a relação entre w_0 e z_0 , e considerando que o diâmetro do feixe satisfaz $r = w(z)$, temos:

$$r = \frac{\lambda}{\pi n w_0} z \quad (4.33)$$

que é a equação de uma reta, que nos dá o ângulo de divergência do feixe como $\operatorname{tg} \theta = \theta = \frac{\lambda}{\pi n w_0}$. Iremos obter uma expressão similar a esta quando

tratarmos da difração de luz por uma fenda circular de raio w_0 .

Autor: Sergio Carlos Zilio

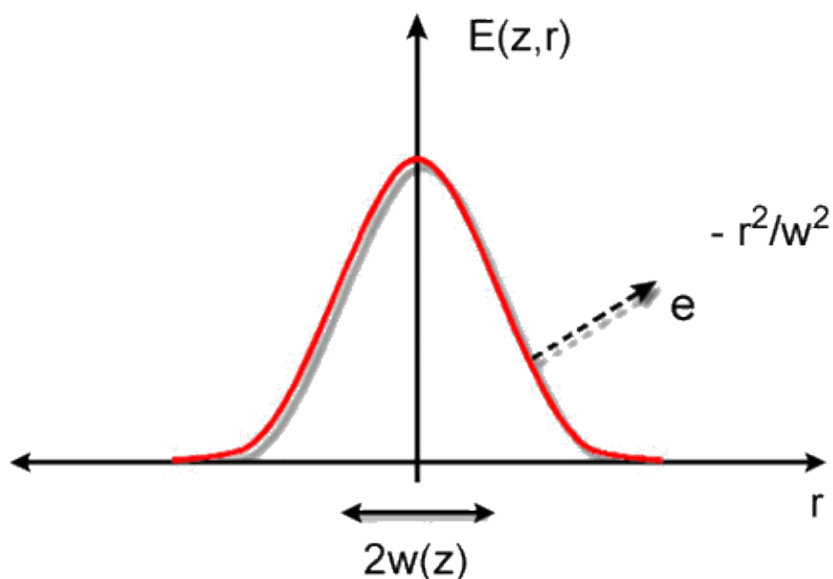


Fig. 4.7 - Variação da amplitude do campo com a coordenada radial.

A segunda metade da eq. (4.32) está ligada à fase da onda. O termo mais interessante é o que possui $R(z)$, que corresponde ao raio de curvatura da frente de onda, como discutido na seção 3.5. Quando a onda se propaga, a curvatura do feixe vai mudando conforme mostra a Fig. 4.8. Para $r=0$ e $r=\infty$ o raio de curvatura é infinito. O valor mínimo de $R(z)$ ocorre para $z=\pm z_0$ e vale $R_{\min} = 2z_0$. Para $z < 0$, o raio de curvatura é positivo e se a luz caminha para a direita temos a divergência do feixe. Por outro lado para $z > 0$, o raio de curvatura é negativo e o feixe estará convergindo.

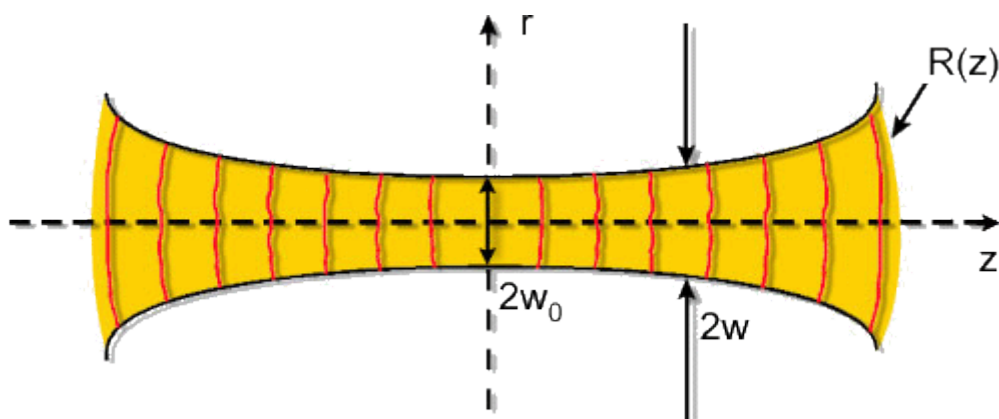


Fig. 4.8 - Propagação de um feixe gaussiano (a) e variação da amplitude do campo com coordenada radial.

Autor: Sergio Carlos Zilio

O feixe definido pela eq. (4.32) é chamado feixe gaussiano de ordem zero (TEM_{00}), podendo existir feixes de ordem superior, cujas distribuições de intensidade na direção radial são mostrados na Fig. 4.9. Embora não demonstremos aqui, a amplitude do campo elétrico é modulada por um polinômio de Hermite. Alguns pontos a serem enfatizados com relação à eq. (4.32) são: (i) o raio da curvatura $R(z)$ e o diâmetro do feixe mudam conforme ele se propaga na direção z , implicando numa divergência (ou convergência) do mesmo, (ii) em $w(z)$ o campo é $1/e$ do valor em $r = 0$, (iii) o parâmetro confocal $z_0 = \frac{pw_0^2 n}{\lambda}$ é a distância z em que o raio $w(z)$ do feixe aumenta por um fator $\sqrt{2}$, (iv) w_0 é o raio mínimo do feixe, obtido no ponto focal e (v) a propagação do

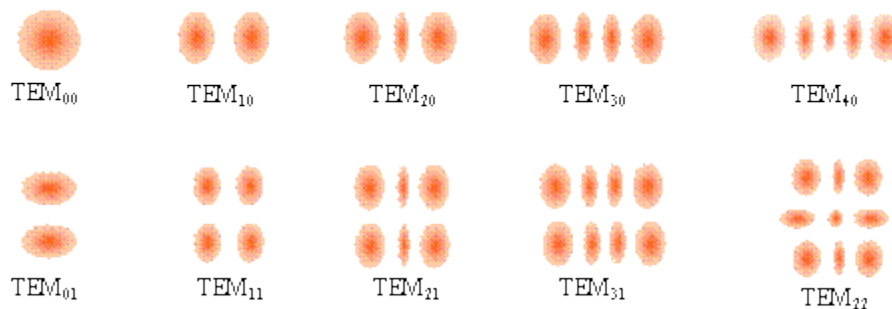


Fig. 4.9 - Distribuições transversais de intensidade para feixes gaussianos de várias ordens.

feixe não segue as leis da óptica geométrica devido à difração da luz no ponto focal, mas pode ser descrita através de matrizes (lei ABCD), como discutido na referência 4.3, e na seção seguinte.

6: Propagação do feixe Gaussiano

Como mencionamos na seção anterior, a propagação de um feixe gaussiano não segue as leis da óptica geométrica, mas sim da óptica ondulatória, onde o fenômeno de difração é importante. O que devemos fazer para caracterizar o feixe gaussiano é determinar como $w(z)$ e $R(z)$ variam conforme a onda se propaga. Isto é feito através da lei ABCD que discutiremos a seguir. Vamos definir um parâmetro $q(z) = \frac{k}{Q(z)}$, tal que para a propagação num meio

homogêneo obtemos $q(z) = q_0 + z$, como indica a eq. (4.27). Por outro lado, vemos da eq. (4.30) que:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{Q(z)}{k} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi n w^2(z)} \quad (4.34)$$

Desta forma, sabendo como $q(z)$ varia com z , a parte real de $1/q(z)$ dará $R(z)$, enquanto que a parte imaginária está ligada a $w(z)$. Se conhecermos w_0 , podemos encontrar z_0 e $q_0 = iz_0$. Substituindo em $q(z) = q_0 + z$ obtemos a eq. (4.31). Entretanto, um dado sistema óptico pode conter componentes tais como lentes, sistemas ópticos, etc. Neste caso, a variação do parâmetro q é dado pela lei ABCD:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (4.35)$$

onde q_1 e q_2 se referem a dois planos quaisquer perpendiculares ao eixo óptico (z), enquanto que A , B , C , e D são os elementos da matriz que caracteriza a propagação geométrica de um raio de luz entre os planos 1 e 2, como vimos no Cap. 3. No caso da propagação por um meio homogêneo, usamos a matriz de translação calculada no problema 3.1, onde $A=1$, $B=z$, $C=0$ e $D=1$, e obtemos $q_2 = q_1 + z$, como anteriormente. O cálculo da propagação do feixe gaussiano em alguns sistemas particulares será deixado como exercício.

7: Vetor de Poynting intensidade

A energia por unidade de área que se propaga na direção é dada pelo vetor de Poynting, que é definido como:

$$\vec{S} = \vec{E}_x \vec{H} \quad (4.36)$$

Usando a relação entre \vec{E} e \vec{H} dada logo após as eq. (4.11) temos:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E}_x \frac{(\vec{k}_x \vec{E})}{\mu\omega} = \frac{1}{\mu\omega} \left[-\vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{E}) + \vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}) \right] = \\ &= \frac{E^2}{\mu\omega} \vec{k} = \frac{E_0^2}{\mu\omega} \cos^2[\vec{k}\vec{r} - \omega t] \vec{k} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Os detectores existentes não possuem velocidade suficiente para acompanhar a variação rápida do campo elétrico e fazem uma média temporal do sinal. Portanto, devemos calcular a média temporal do vetor de Poynting, isto é:

Autor: Sergio Carlos Zilio

$$\langle \vec{S} \rangle = -\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{S}(\vec{r}, t) dt = \frac{E_0^2}{\mu\omega T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) dt \quad (4.38)$$

Usando a identidade $\cos^2 y = \frac{1}{2}[1 + \cos 2y]$ obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{E_0^2}{2\mu\omega^2 T} \left\{ \omega T - \frac{1}{2} \text{sen}[2](\vec{k}\vec{r} - \omega t_0 - \omega T) \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{sen} \left[2(\vec{k}\vec{r} - \omega t_0) \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Integrando em um período, que é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtemos:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu\omega} \vec{k} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E}^x \vec{H} \} \quad (4.40)$$

Definimos densidade de fluxo radiante ou intensidade como:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{E_0^2 k}{2\mu\omega} = \frac{E_0^2}{2\mu v} = \frac{1}{2} c n \epsilon_0 E_0^2 \quad (4.41)$$

que possui unidades de $\frac{W}{m^2}$. Esta é uma expressão bastante útil na prática

pois permite relacionar a intensidade da luz com o campo elétrico.