4- O pêndulo simples

4-1 O pêndulo simples, e seus movimentos

Pode-se falar em dois tipos de pêndulos: O pêndulo composto e o pêndulo simples.

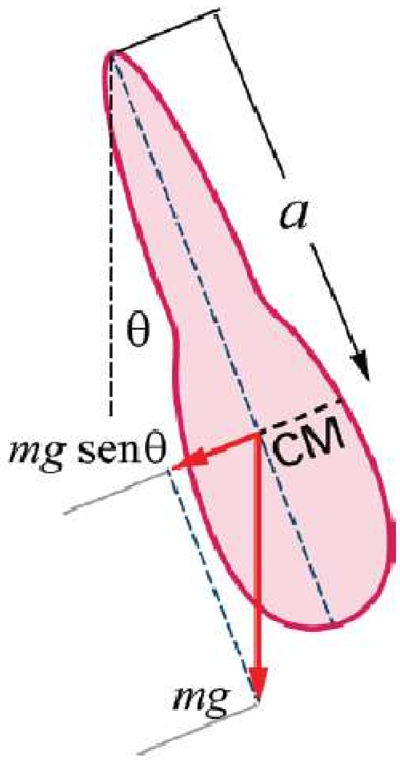


Fig. 44.4. Um corpo qualquer quando preso a um eixo e colocado a oscilar sob a ação da força gravitacional se constitui num pêndulo físico (ou pêndulo composto).

O pêndulo simples consiste num objeto de dimensões desprezíveis (uma pequena esfera, por exemplo) preso por uma corda, ou um fio, de massa igualmente desprezível.

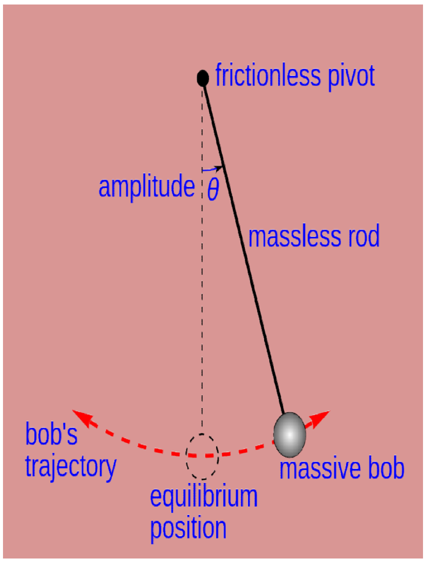


Fig. Ilustração do pêndulo simples.

Numa determinada posição do pêndulo temos duas forças atuando sobre o objeto: a tração da corda e a força peso.

Quando a corda é presa por um ponto (no teto, por exemplo) o corpo preso à corda se move num movimento circular (mas não uniforme). Ele ocupa, em geral, apenas uma parte da circunferência. No entanto, ele pode ocupar cada ponto sobre ela se imprimirmos uma força muito grande sobre o corpo no início do movimento.

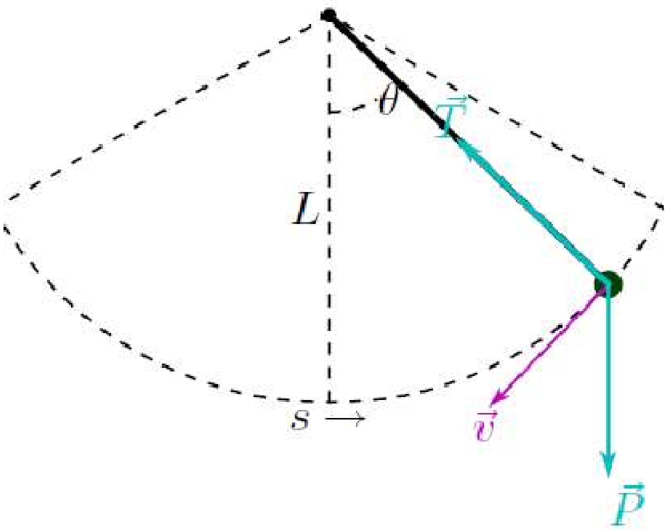


Fig. Forças agindo sobre o pêndulo

O movimento do pêndulo simples pode se constituir num exemplo de movimento harmônico simples. Ele ocorre se o movimento for restrito a pequenas oscilações. Isto é, ângulos de abertura do pêndulo muito pequeno.

O pêndulo também executa movimento harmônico simples. Mas desde que o ângulo da inclinação do pêndulo, de acordo com a figura abaixo, esse ângulo não seja muito grande. De qualquer maneira, o pêndulo sempre exibe um movimento oscilatório. Se nós elevarmos, por exemplo, para um ângulo

Se soltarmos o pêndulo a partir de uma dada posição ele vai executar um movimento oscilatório. Para grandes aberturas o movimento oscilatório não será harmônico simples. Será, no entanto, periódico. Nesse caso sua descrição não é simples.

O fato é que quando solto a partir de uma determinada posição, o pêndulo exibe esse movimento de vai e vem. Ele vai até um ponto e depois volta sobre si mesmo. Esse intervalo de tempo é igual à metade do período. Depois de um período, ele volta a sua posição original e com a mesma velocidade nesse ponto. A força peso e a força tensora. São duas forças que agem sobre a partícula presa pelo fio.

No entanto, considerando a componente tangencial ou da força, ela pode ser escrita como, portanto a equação de movimento agora levando em conta a coordenada ela é igual a

Primeiramente lembramos que para uma abertura do pendulo de um valor θ, a componente tangencial à circunferência da força peso é dada, pela expressão

$$F_{\tan} = -mgsen\theta$$

Para ângulos pequenos, podemos escrever, dentro de uma boa aproximação

$$sen\theta \cong \theta$$

4-2 Equações horárias do pêndulo simples

A aceleração tangencial, que é igual à aceleração escalar, é dada por

$$a_{\tan} = l\alpha$$

Onde α é a aceleração angular do pêndulo.
De acordo com a lei de Newton, podemos escrever:

$$ma_{\tan} = F_{\tan} \Rightarrow lm\alpha = -mgsen\theta$$

Para pequenas amplitudes do movimento, a lei de Newton se escreve:

$$l\alpha = -g\theta$$

Assim, a partir do cálculo diferencial, podemos constatar que a posição da partícula presa ao pêndulo, especificada em termos da variável angular θ, é tal que sua dependência com o tempo é:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Onde θ_0 é a amplitude angular e α é a fase inicial. A frequência angular, no caso do pêndulo é dada por

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Pode-se mostrar que a velocidade angular da partícula depende do tempo de acordo com a expressão:

$$v_{ang}(t) = -\theta_0 \omega sen(\omega t + \alpha)$$

Enquanto que a aceleração angular sendo dada por,

$$\alpha = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

Depende com o tempo da seguinte forma:

$$\alpha(t) = -\theta_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

O movimento é, portanto, harmônico simples, pela definição (0000).

4-3 Período, frequência e amplitude do movimento

O período do pêndulo pode ser obtido a partir das condições:

$$\theta(t) = \theta(t+T)$$

$$v_{ang}(t) = v_{ang}(t+T)$$

Donde obtemos que O período do pêndulo simples é, pois

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

O período é, portanto tanto maior quando maior for o comprimento do pendulo e decresce com o aumento da aceleração da gravidade. Assim, o mesmo pendulo localizado em posições diferentes do globo terrestre exibirá, eventualmente, períodos de oscilação diferentes.

Para a freqüência do movimento, podemos escrever:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Portanto, para oscilações de pequena amplitude, o período do pêndulo simples não depende da amplitude. Esse fato foi verificado experimentalmente por Galileu. Essa propriedade é conhecida como isocronismo. O isocronismo do pêndulo foi determinante no seu uso, depois da descoberta de Galileu, na construção de relógios a pêndulo.

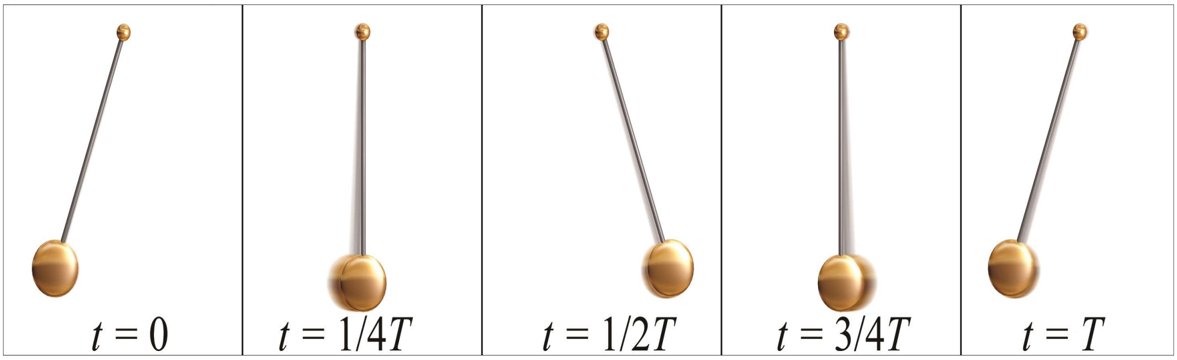


Fig. O pêndulo a diferentes instantes de tempo

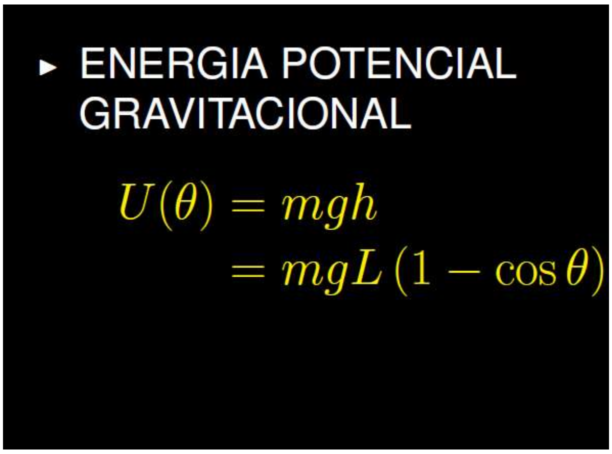
4-4 Energia do pêndulo simples

A energia mecânica do pêndulo simples é conservada. Ela consiste de dois temos. O primeiro é a energia cinética, a qual é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2 v_{ang}{}^2 = \frac{1}{2}ml^2\left[\theta_0 \omega sen\left(\omega t + \alpha\right)\right]^2$$

Ou seja, a energia cinética varia com o tempo.

A segunda forma de energia do pêndulo é a energia potencial. Para um ângulo arbitrário (vide figura) temos:



Para ângulos pequenos podemos fazer a aproximação:

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Assim, para ângulos pequenos escrevemos:

$$U = \frac{1}{2} mgl\theta^2 = \frac{1}{2} mgl\left[\theta_0 \cos\left(\omega t + \alpha\right)\right]^2$$

E, portanto, essa forma de energia também depende do tempo.

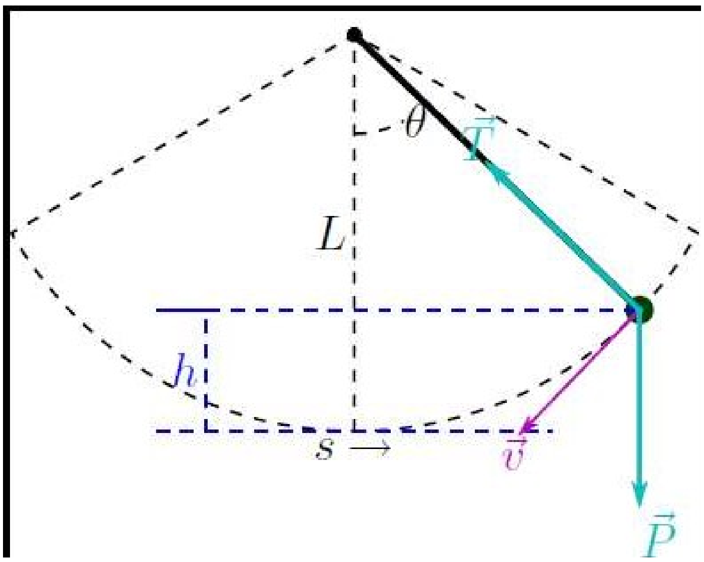


Fig. Relógio a pêndulo.

Assim, para pequenas amplitudes, para as quais o pêndulo executa um movimento harmônico simples, a energia mecânica é dada pela expressão:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m l^2 v_{ang}{}^2 + \frac{1}{2} m g l \theta^2$$

Substituindo-se as expressões para a velocidade angular e o ângulo em função do tempo, encontraremos:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \left[\theta_0 \omega sen\left(\omega t + \alpha \right) \right]^2 + \frac{1}{2} m g l \left[\theta_0 \cos\left(\omega t + \alpha \right) \right]^2$$

Lembrando que

$$sen^2\left(\omega t + \alpha \right) + \cos^2\left(\omega t + \alpha \right) = 1$$

Obtemos;

$$E = \frac{1}{2} m g l \theta_0{}^2$$

Que é como sabemos e como foi verificado explicitamente, constante. A energia depende, de forma essencial do valor da amplitude angular.

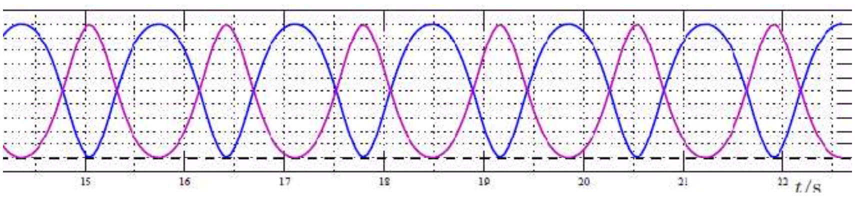


Fig. As energias potencial e cinética variam com o tempo. A energia mecânica, no entanto, permanece constante.

4-5 Aplicações do pêndulo simples

Galileu foi quem primeiro estudou o pêndulo simples e ele percebeu esse fenômeno dos isocronismo do pêndulo. Ou seja, o período do pêndulo não dependa da massa do pêndulo e não depende também da amplitude.

Uma forma de estabelecermos um padrão para a medida de tempo é buscar na natureza fenômenos periódicos, ou seja, fenômenos que se repetem enquanto o tempo passa. Podemos adotar o intervalo de tempo de repetição como um padrão. Nesse caso, podemos fazer uso de desde um pêndulo simples até o período da órbita dos elétrons num átomo. Até cerca de 1580 não havia métodos para determinar, de uma forma precisa, intervalos de tempo relativamente curtos. Essa situação se modificou com a descoberta, por Galileu, do isocronismo do pêndulo. Isto é, o período do pêndulo não depende de amplitude do movimento oscilatório (só depende do comprimento do pêndulo). Essa descoberta serviu de base para a construção de relógios de pêndulos acionados através de pesos ou molas.

Fig. 26.16. Relógio de Galileu.

O primeiro relógio a pêndulo, do tipo mais sofisticado, foi construído por Huygens.

Fig. Relógio a pêndulo.