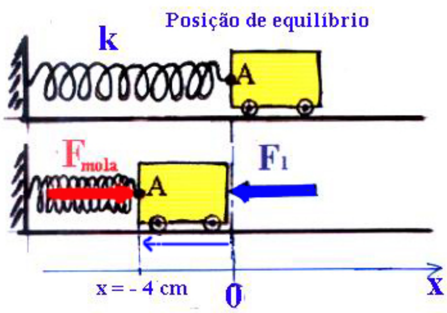
T2-EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXERCÍCIO 1

Uma mola helicoidal tem constante elástica k. Ela funciona, igualmente bem, sob tração e sob compressão. Uma de suas extremidades é fixa numa parede e a outra no ponto A onde ela é presa a um carrinho de massa m que pode mover-se livremente sobre uma plataforma horizontal.



a) Uma força horizontal $\vec{F}_1$ = - 80.$\vec{i}$ (newtons) mantém o carrinho em repouso, produzindo uma elongação de x = - 4 cm na mola (ela fica, assim, comprimida). Determine a constante elástica da mola.

Resposta

Sobre o carrinho atuam quatro forças:

- Na vertical, identificada com a direção do eixo y, atuam a força peso e a força normal: $\vec{p}$ = -mg.$\vec{j}$ e $\vec{N}$ = N.$\vec{j}$. Tais forças não são representadas na figura.
- Na direção Horizontal atuam outras duas forças: a da mola e força horizontal já aludida (escrevemos na notação vetorial: $\vec{F}_{mola}$ = (F_{mola}).$\vec{i}$ e $\vec{F}_1$ = - 80.$\vec{i}$).

De acordo com a 2ª Lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{p} + \vec{N} + \vec{F}_{mola} + \vec{F}_1 = m.\vec{a}.$$

Como a situação é de equilíbrio, então, $\vec{a}$ = 0.
Conclui-se, portanto, que

$$\vec{p} + \vec{N} = [(-mg) + N].\vec{j} = 0 \quad \rightarrow \; N = mg$$

$$\vec{F}_{mola} + \vec{F}_1 = [F_{mola} - F_1].\vec{i} = 0 \;\rightarrow\; F_1 = F_{mola.}$$

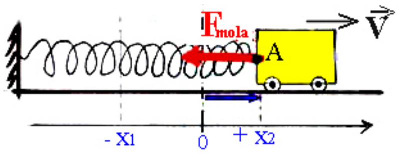
Pela eq (3) do texto, F_{mola} = - kx, o que leva a escrever: F_1 = -kx donde se conclui que: k = - $\frac{F_1}{x}$. Substituindo os valores conhecidos, F,= 80 N e x = - 4cm = - 0,04 m, tem-se que a constante elástica da mola é dada por:

$$k = \frac{-80\ N}{-0{,}04\ m} = 2000\ N/m. = 2\ kN/m$$

b) Quando solto (livre da força $\vec{F}_1$ que o segura), o carrinho é empurrado pela força elástica da mola no sentido positivo do eixo 0x. Determine a força da mola quando ela elongada de x_2= 2,5 cm.

A figura do enunciado mostra a mola comprimida; nesta situação a elongação é negativa (x<0).

Na figura abaixo, a elongação da mola é positiva (x>0), pois a mola encontra-se distendida.



Em ambos as situações (x< 0 ou x >0), o sentido da força da mola é oposto ao sentido da elongação x.

Quando x = 2,5 cm = 0,025 m, a força da mola tem intensidade F_{mola} = -(2.000 M/m)(0,025 m) = - 50 N. O sinal negativo indica que o sentido da força é oposto ao da elongação x.

EXERCÍCIO 2

Determinar a relação $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ usando as eqs (13) e (5) do texto.

Resposta

Primeiramente, determinamos a derivada de 2ª ordem, em relação ao tempo, da equação da elongação [eq.13]

A partir da equação (13), escrevemos a elongação sob a forma: x(t) = A.cos(ωt +θ_0)

A derivada primeira da elongação é a velocidade a qual é dada por:

$$v(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{d[A.\cos(\omega t+\theta_0)]}{dt} = -A\omega.\text{sen}(\omega t + \theta_0);$$

A derivada segunda da velocidade é a aceleração, ou seja:

$$\frac{d^2[x(t)]}{dt^2} = \frac{d[-A\omega.\text{sen}(\omega t+\theta_0)]}{dt} = -A\omega^2.\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2.A.\cos(\omega t + \theta_0).$$

A partir dessa equação inferimos que a aceleração é dada por:

$$a(t) \equiv \frac{d^2[x(t)]}{dt^2} = -\omega^2.x(t)$$

Substituindo-se a elongação e a aceleração na eq(5), escrita agora como:

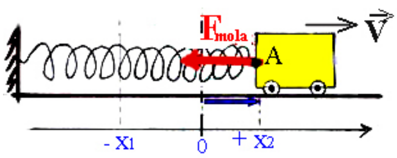
$$m\left(-\omega x(t)\right) = -kx(t)$$

Obtemos a relação entre a frequência angular e as constantes:

m.ω^2 = k ou $\omega^2 = \frac{k}{m}$, resultando em $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

EXERCÍCIO 3

Considere que o carrinho do sistema massa-mola do Ex.01 tenha massa m = 5 kg. Puxado para a esquerda do ponto de equilíbrio e depois solto, o sistema se comporta como um oscilador harmônico simples.



a) Qual o período T deste oscilador?

.

Resposta

Conforme eq (20) o período é inversamente proporcional a constante ω, ou seja, T = $\frac{2\pi}{\omega}$. Por outro lado, conforme eq.(16) ω = $\sqrt{\frac{k}{m}}$ = $\sqrt{\frac{2000\ N/m}{5\ kg}}$ = 20 (1/s).

Portanto, T = $\frac{6{,}28}{20/s}$ = 0,314 s.

O que isto significa? Cada vai-e-vem completo do carrinho tem duração de T = 0,314 s. Em outras palavras, o oscilador executa 100 vibrações completas em 31,4 s.

b) Qual a frequência deste oscilador?

A frequência é o número de vibrações que o oscilador executa na unidade de tempo. Conforme a eq (21), temos:

f = 1/T = 1/0,314 s ≅ 3,18/s = 3,18 hertz

(1 hertz = 1Hz = 1 vibração/s)

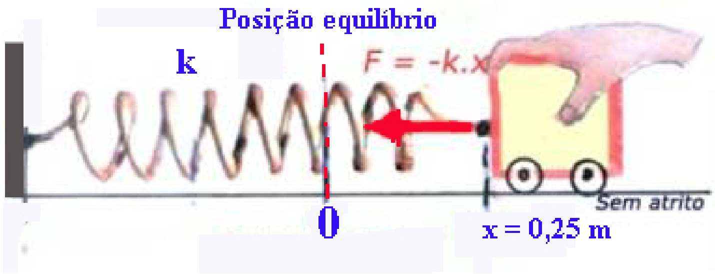
c) Qual deve ser a massa do carrinho para o período seja T = 1 s?

Vamos analisar a eq.19; dela resulta T = $\frac{2\pi}{\omega}$. Para T = 1 s tem-se ω = 2π; como ω = $\sqrt{\frac{k}{m}}$ [eq(16)] igualamos $\sqrt{\frac{k}{m}}$ = 2π. Elevando-se ao quadrado: $\frac{k}{m}$ = $(2\pi)^2$ donde m = $\frac{k}{(2\pi)^2}$ = $2000/39{,}438$ = 50,71 kg. Portanto, para que o período do oscilador em questão seja T = 1 s, a massa total do carrinho deve ser m = 50.71 kg. Como f = 1/T, nestas condições, a frequência do oscilador será f = 1Hz.

EXERCÍCIO 4

Uma mola de constante elástica k = 2.000 N/m tem uma extremidade fixada numa parede e, a outra, num carrinho de massa m = 5 kg que pode se movimentar numa superfície horizontal sem atrito.

T2-EXERCÍCIOS RESOLVIDOS



A partir da posição de equilíbrio o carrinho, é puxado para a direita até que a elongação da mola atinja o valor: x = 0,25 m. Esse á o valor da amplitude $x_M = A$ = 0,25 m.. Depois de solto, o sistema se comporta como um oscilador harmônico, realizando Movimento Harmônico Simples.

a) Determinar o período T e a frequência f deste oscilador harmônico?

Conforme definido na eq(20) do texto, o período e a frequência são dados respectivamente, por:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20/s}. = \frac{\pi}{10}$ s = 0,1π s.

f = 1/T = $\frac{10}{\pi}$ Hz.

b) A partir da equação horária geral da elongação do oscilador harmônico (x(t) = A.cos(ωt + θ_0)); determine as constantes A, ω e θ_0 para o caso em estudo.

Adotando o eixo 0x, horizontal, e orientado para a direita, as condições iniciais do movimento para t = 0 são:

$v_0 = 0$ e x(t=0) = +0,25 m.

- A amplitude do movimento é A = 0,25 m (elongação máxima; ela corresponde á coordenada abscissa do ponto onde o carrinho foi solto).
- A constante frequência angular é dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.000\ N/m}{5\ kg}} = 20\ (\frac{1}{s})$.

Substituindo-se A e ω na equação geral (x(t) = A.cos(ωt + θ_0) temos:

$$x(t) = (0,25).\cos(20t + \theta_0)$$

E, para a velocidade

$$v(t) = 5.sen(20t + \theta_0)$$

Para completar a equação resta determinarmos a fase θ_0. Para tal usamos a condição: v(t = 0) = 0; portanto,

que resulta: $sen\theta_0 = 0$, ou seja, θ_0 = 0°, 360°, 720°, ... Vamos escolher a opção mais simples: θ_0 = 0. Assim, a equação horária da elongação, para as condições iniciais dadas, será:

$$x(t) = (0,25).cos(20t).$$

EXERCÍCIO 5

a) Considere o oscilador harmônico do Exemplo 4. Determinar a equação horária da velocidade do carrinho e responder: em quais instantes v(t) = 0 e em que instantes ela é máxima ou mínima.

Resposta

A velocidade pode ser obtida pela derivada de 1ª ordem da equação horária da elongação. Assim,

$$v(t) = \frac{d[(0,25)\cos(20t)\ ]}{dt} = -\ 5.sen(20t)$$

<u>Velocidade nula</u>

Para se determinar os instantes nos quais v(t) = 0, resolve-se a equação:

$$v(t) = -5.sen(20.t) = 0.$$

O que implica instantes de tempo para os quais sen (20t) = 0, ou seja, o argumento (20t) = 0°, 180°, 360°, 540°, ... ou genericamente, 20t = N$\cdot\pi$ com N = 0, 1, 2, 3,.... Logo, t = $\frac{N\cdot\pi}{20}$ s com N = 0, 1, 2, 3 ... A tabela abaixo consolida os cálculos:

N	t = N$\cdot\pi/20$ s	Argumento: (20.t) (rad)	V(t) = - 5.sen(20t) m/s	x(t) = (0,25).cos(20t). m
0	0	0	0	+ 0,25
1	($\pi/20$) = (T/2)	π	0	- 0,25
2	2($\pi/20$) = T	2π	0	+ 0,25
3	3($\pi/20$) = 3(T/2)	3π	0	- 0,25

T2-EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Observação: como o período é $T = \pi/10$, podemos escrever π = 10T que substituído em $t = \pi/20$ = (10T)/20 = T/2 = $(\frac{1}{2})$T (meio período). E assim sucessivamente.

Constata-se que a velocidade torna-se nula nas posições de elongação máxima (A = 0,25 m) e nas posições de elongações mínimas (A – 0,25 m) que são posições que o carrinho inverte o sentido do movimento.

<u>Velocidade máxima e mínima</u>

A velocidade é expressa pela função v(t) = -5sen(20t). Tal como no cálculo, para se determinar os máximos e mínimos de uma função iguala-se a zero a derivada de 1ª ordem da função.

Assim, $\frac{\mathrm{d\,v(t)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d(-5sen20t)}}{\mathrm{dt}}$ = - 100.cos(20t) = 0.

Para que isto ocorra, devemos ter cos (20t) = 0, ou seja, 20t = 90°, 270°, 450°, etc ou 20t = $N' \cdot \frac{\pi}{2}$ com N' = 1,3,5,..Assim, 20.t = N'$\cdot \frac{\pi}{2}$ donde t = N'$\cdot \frac{\pi}{40}$ s com N' = 1,3,5,...

Para saber se a velocidade é máxima ou mínima, vamos os valores de t na equação da velocidade. A tabela abaixo consolida os cálculos:

N'	t = N'$\cdot \pi/40$ s	Argumento: (20.t) (rad)	V(t) = - 5.sen(20t) m/s	x(t) = (0,25).cos(20t). m
1	$\pi/40$ = T/4	$\pi/2$	- 5	0
3	3($\pi/40$) = 3(T/4)	3($\pi/2$)	+ 5	0
5	5($\pi/40$) = 5(T/4)	5($\pi/2$)	- 5	0
7	7($\pi/40$) = 7(T/4)	7($\pi/2$)	+5	0

Observa-se que a velocidade é máxima quando o carrinho passa pela posição de equilíbrio x = 0. A velocidade é máxima (v = + 5 m/s) quando o carrinho passa por x = 0 no sentido positivo do eixo 0x e, é mínima (v = - 5 m/s) quando passa em sentido oposto.

b) Determinar a equação horária da aceleração do carrinho. Em quais situações ela é nula? E em quais ela é máxima ou mínima?

T2-EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

A aceleração é obtida por meio da derivada de 1ª ordem da velocidade, ou seja, a = $\frac{dv(t)}{dt}$ (ou que é equivalente, pela derivada de 2ª ordem da elongação, ou seja, a = $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$). Portanto:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d[-5.sen(20t)]}{dt} = -100.cos(20t).$$

Aceleração nula.

A aceleração é nula quando -100.cos(20t) = 0. Isto ocorre quando o argumento da função cosseno for tal que (20t) = N.$\frac{\pi}{2}$ com N = 1,3,5,7,.... O tempo correspondente será t = N.$(\pi/40)$s. A tabela consolida as posições onde a = 0.

N	t = N· $(\pi/40)$ s	Argumento: (20.t) (rad)	a(t) = - 100.cos(20t) m/s	x(t) = (0,25).cos(20t). m
1	$\pi/40$ = T/4	$\pi/2$	0	0
3	3($\pi/40$) = 3(T/4)	3($\pi/2$)	0	0
5	5($\pi/40$) = 5(T/4)	5($\pi/2$)	0	0
7	7($\pi/40$) = 7(T/4)	7($\pi/2$)	0	0

Quando o carrinho passa (em qualquer sentido) pela posição de equilíbrio (x=0) a aceleração do carrinho é momentaneamente zero.

Aceleração máxima ou mínima.

Os máximos e mínimos de uma função podem ser obtidos igualando a zero a derivada primeira da função. No caso da aceleração temos: a(t) = -100.cos(20t). Portanto, $\frac{d\,a(t)}{dt} = \frac{d[-100.cos(20t)]}{dt}$ = 0, ou seja, 2000.sen(20t) = 0. Portanto, para o argumento (20t) = N'.π, com N' = 0, 1, 2, 3,... a aceleração será um máximo ou um mínimo. A tabela consolida as informações.

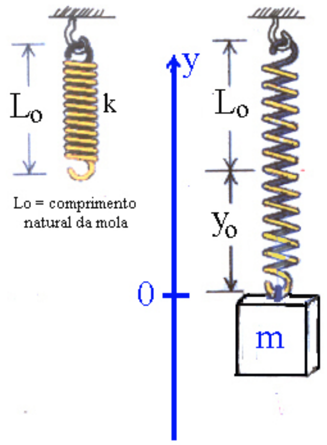
N'	t = N'· $\pi/20$ s	Argumento: (20.t) (rad)	a(t) = - 100.cos(20t) m/s²	x(t) = (0,25).cos(20t). m
0	0	0	- 100	+ 0,25
1	($\pi/20$) = (T/2)	π	+ 100	- 0,25
2	2($\pi/20$) = T	2π	- 100	+ 0,25
3	3($\pi/20$) = 3(T/2)	3π	+100	- 0,25

Constata-se que a aceleração é mínima (a = -100 m/s²) quando a elongação é máxima (x = + 0,25 m) e, é máxima (a = + 100 m/s²) quando a elongação é mínima. Em x = + 0,25 m, a aceleração é para a esquerda (no sentido negativo do eixo 0x) e em x = -0,25 m, ela é para a direita (sentido positivo do eixo 0x)

Vamos resolver um exemplo no qual o sistema massa- mola oscila na vertical. Neste caso, as elongações devem ser medidas em relação à situação de equilíbrio.

EXERCÍCIO 6

Uma mola cuja constante elástica é k = 400 N/m, tendo uma de suas extremidades fixa no teto do laboratório, pende livremente na vertical.



Como o movimento acontece na vertical
Adotaremos o eixo 0y ao invés do eixo 0x.
Nas equações troca x por y.

Na sua extremidade livre é preso um objeto de massa m = 4 kg. A mola alonga-se de um montante y_0 até encontrar a posição de equilíbrio.

Em seguida o objeto é erguido até uma elongação y = -0,10 m (em relação ao ponto de equilíbrio) de onde, após solto, funciona como um oscilador harmônico simples (MHS). Adotar g = 10 N/kg.

a) Determinar o alongamento y_0 da mola.
b) Escrever a equação do MHS deste sistema massa-mola.
c) O período do movimento
d) As equações da velocidade e da aceleração.

T2-EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Respostas

a) alongamento y_0 .

Na situação de equilíbrio o peso do objeto é equilibrado pela força elástica da mola, ou seja, mg = -ky_0 donde: $-y_0 = \frac{mg}{k} = \frac{4x10\ kg.N/kg}{400\ N/m} = 10^{-1}$ m = 0,1 m.

Portanto, como resultado do peso do objeto pendurado, a mola distende-se de 10 cm.

b) equação do MHS.

A equação geral do MHS é dada pela eq. 26 do texto (trocando x por y):

$$y(t) = A.\cos[\omega.t + \theta_0]$$

Devemos descobrir, para este caso, quais os valores das constantes A, ω, e θ_0.

- A amplitude A do movimento.

  No instante t = 0, a velocidade é v(t = 0) = 0; a elongação é y(t=0) = -0,10 m. Assim, a amplitude do movimento é A = 0,10 m. Observação: se o eixo 0y fosse orientado para baixo, teríamos nesse caso y(t=0) = 0,10 m.
- A constante ω do movimento.

  É determinada pela massa e pela constante da mola eq.(16):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\ N/m}{4\ kg}} = \sqrt{100} x \sqrt{\frac{(kg.\frac{m}{s^2})/m}{kg}} = 10\ (\tfrac{1}{s}).$$

Podemos então escrever a equação do movimento a menos da fase θ_0;

y(t) = (0,10).cos[10.t + θ_0] (SI)

A fase θ_0 pode ser determinada com as informações das condições iniciais. Para t = 0, temos v(t=0) = 0; logo 0 = 1sen[$10x0 + \theta_0$] o que resulta 0 = sen (θ_0), donde, $\theta_0 = 0$ ou N.π rad. A solução mais simples e compatível com a condição inicial para y é $\theta_0 = \pi$.

Portanto, a equação do movimento pode ser assim expressa:

y(t) = (0,10).cos[10.t + π] = - (0,10).cos(10.t)

c) O período do movimento.

Conforme a eq.20 do texto, o período do movimento é dado por:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{10(\frac{1}{s})}$ = 0,628 s.

d) As equações da velocidade e da aceleração a qualquer tempo.

A velocidade é obtida a partir da derivada de 1ª ordem da equação horária da coordenada y (no caso, da equação do MHS). Assim:

$$v(t)= \frac{dy(t)}{dt} = \frac{[-0{,}1.\cos(10.t)}{dt} = -(0{,}10).[-\,\text{sen}(10.t\,)].(10) = \text{sen}(10.t\,)$$

A aceleração é obtida a partir da derivada de 1ª ordem da velocidade, ou seja,

$$a(t) = \frac{d[\text{sen}(10.t]}{dt} = \cos(10.t)(10) = 10.\cos(10.t)$$

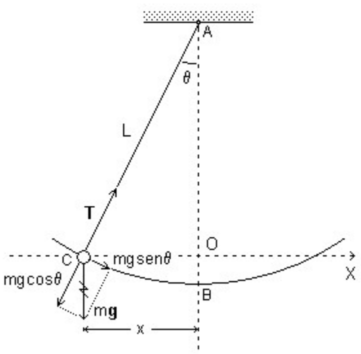
EXERCÍCIO 7

Um pêndulo com massa m = 100 g e comprimento L é posto a oscilar com pequenas amplitudes. O período mensurado foi T = 1 s. Considere g = 9,8 m/s².

Determinar:

a) O comprimento L deste pêndulo.

Resposta



A partir da eq.(38) do texto, T = $2\pi\sqrt{L/g}$, o comprimento do pêndulo em estudo pode ser determinado. Elevando ao quadrado essa expressão obtemos

$$L = \frac{T^2.g}{4\pi^2} = (1s)^2(9{,}8\,\frac{m}{s^2})/4(3{,}14)^2 = 0{,}2485\ m \cong 25\ cm.$$

Portanto, o período de um pêndulo de comprimento L = 25 cm é T = 1 s.

b) Qual seria o período deste pendulo quando colocado a oscilar na superfície da Lua, onde a aceleração da gravidade é 1,63 N/kg (m/s²)?

Diferentemente do sistema massa-mola onde o período não depende da gravidade, no pêndulo simples ele é fundamental. Em particular, um pêndulo não oscila numa região onde inexista gravidade. No caso da lua, o período é dado por

$$T_{Lua} = 2\pi\sqrt{L/g} = 6{,}28\sqrt{0{,}25/1{,}63}$$

Donde inferimos que o mesmo pêndulo quando colocado a oscilar na lua teria um período de $T_{Lua} = 2{,}46$ s.