Aula 04 - Exercícios de Apoio e Atividade Avaliativa

Exercícios de Apoio

1. Sabendo que a órbita de uma partícula-α sendo espalhada por um núcleo de carga *Ze* obedece uma função hiperbólica, deduza a relação entre o parâmetro de impacto da colisão (*b*) e o ângulo de espalhamento (*θ*) da partícula-α (expressão 1 do texto base da aula 4).

Resolução:

A função hiperbólica é dada por:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{b}\sin\varphi+\frac{D}{2b^2}\left(\cos\varphi-1\right)$$

onde *D* é a distância de máxima aproximação das partículas-α aos núcleos (expressão 11 do texto base da aula 4) e *φ* é o ângulo mostrado na figura 4 do texto base da aula 4.

Para o comportamento assintótico das partículas-α, isto é, para $r\rightarrow\infty$,tem-se que:

$$\frac{1}{b}\sin\varphi=\frac{D}{2b^2}\left(1-\cos\varphi\right)$$

$$\frac{2b}{D}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1-\cos\left(\pi-\theta\right)}{\sin\left(\pi-\theta\right)}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

sendo que a relação *φ=π-θ* vem da própria definição desse ângulo, como pode ser visto da figura 4 do texto base da aula 4.

Como podemos escrever as relações trigonométricas:

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$$

que leva a:

$$1+\cos\theta=1-\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Portanto:

$$\frac{2b}{D} = \frac{2\cos^2 \theta/2}{2\sin\theta/2 \cos\theta/2} = \cot\theta/2$$

como se queria demonstrar.

2. Considerando-se apenas a força Coulombiana, calcule a distância de máxima aproximação (*D*) de um projétil de carga *ze* ao núcleo alvo de carga *Ze* (expressão 11 do texto base da aula 4). Em seguida, considerando uma partícula-α (*z=2*) com uma energia cinética de 5 MeV (energia típica de uma emissão radioativa), a partir de que valor de *Z* do núcleo alvo, a aproximação de que esse núcleo é um ponto não é mais razoável? E a partir de que valor aproximado da energia cinética da partícula-α incidindo em um núcleo de $^{197}_{79}Au$, essa aproximação também não é razoável?

Resolução:

A aproximação das partículas-α será máxima aos núcleos no caso de colisões completamente centrais, ou seja, *b=0*. Neste caso, a distância de máxima aproximação (*D*) corresponde à posição em que toda a energia cinética das partículas-α é convertida em energia potencial eletrostática, ou seja:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{Zze^2}{4\pi\varepsilon_0 D}$$

$$D = \frac{Zze^2}{4\pi\varepsilon_0 K}$$

onde *z* é a carga da partícula-α (*z=2*), *m* a sua massa e *v* a sua velocidade. A aproximação de um núcleo pontual deixará de ser razoável quando essa distância for da ordem de grandeza do tamanho do núcleo. Portanto, supondo que essa aproximação não será mais razoável quando *D* for menor do que 10 *fm*, temos que para partículas-α (*z=2*) com uma energia cinética de 5 MeV, o valor de *Z* do núcleo alvo deixa de ser razoável quando:

$$D = \frac{Zze^2}{4\pi\varepsilon_0 K} < 10 \Rightarrow Z < 17$$

pois $e^2/4\pi\varepsilon_0 = 1,44$ *MeV fm*. Esse resultado concorda bem com a observação de Geiger e Marsden de um desvio dos resultados experimentais em relação aos cálculos de Rutherford para alvos de alumínio (*Z=13*).

Para alvos de $^{197}_{79}Au$, o valor de energia cinética a partir do qual esta aproximação deixa de ser razoável é dada por:

$$D = \frac{Zze^2}{4pe_0 K} < 10 \text{ Þ } K > 23MeV$$

3. Mostre que para uma distribuição de carga do núcleo esfericamente simétrica (dependente apenas do raio), o fator de forma *F(q)* extraído dos dados experimentais de espalhamento de elétrons é proporcional a $\left\langle r^2 \right\rangle$ onde, $\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{1}{Ze}\int r'^2 \rho_C\left(\vec{r}'\right) d\vec{r}' = \frac{4\pi}{Ze}\int r'^2 \rho_C\left(r'\right) r'^2\, dr'$

Resolução:

Sendo que:

$$F\left(\vec{q}\right) = \int \rho_C\left(\vec{r}\right) e^{i\vec{q}\bullet\vec{r}}\, d\vec{r}$$

para uma distribuição de carga do núcleo esfericamente simétrica, tem-se $\rho\left(\vec{r}\right) = \rho\left(r\right)$, portanto:

$$F\left(q\right) = \frac{1}{Ze}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{iqr'\cos\theta/\hbar}\rho\left(r'\right) r'^2 \sin\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi$$

Considerando *x=cosθ*, tem-se *dx=sinθdθ* e *θ=0* implica em *x=1*, enquanto *θ=π* implica em *x=-1*. Portanto, a expressão acima resulta em:

$$F\left(q\right) = \frac{2\pi}{Ze}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} e^{iqr'x/\hbar}\rho\left(r'\right) r'^2\, dr'\, dx$$

sendo que a integral em *φ* foi realizada. Fazendo uma nova mudança de variável, com:

$$y = \frac{qr'x}{\hbar} \Rightarrow dy = \frac{qr'}{\hbar}dx$$

e

$$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{qr'}{\hbar}, x = 1 \Rightarrow y = \frac{qr'}{\hbar}$$

tem-se:

$$F\left(q\right) = \frac{2\pi\hbar}{Zeq}\int_{-qr'/\hbar}^{qr'/\hbar}\int_0^{\infty} e^{iy}\rho\left(r'\right) r'\, dr'\, dy = \frac{4\pi\hbar}{Zeq}\int_0^{\infty}\rho\left(r'\right) r' \sin\left(qr'/\hbar\right) dr'$$

Considerando $qr'/\hbar$ pequeno, tem-se que:

$$\sin\left(\frac{qr'}{\hbar}\right) \approx \frac{qr'}{\hbar} - \frac{1}{3!}\left(\frac{qr'}{\hbar}\right)^3$$

e, portanto:

$$F(q) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq}\left[\int_0^\infty \frac{qr'}{\hbar}\rho(r')r'\,dr' - \int_0^\infty \frac{1}{6}\left(\frac{qr'}{\hbar}\right)^3 \rho(r')r'\,dr'\right]$$

$$F(q) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq}\left[\frac{q}{\hbar}\frac{Ze}{4\pi} - \frac{1}{6}\left(\frac{q}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty r'^2 \rho(r') r'^2\,dr'\right] = 1 - \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \frac{\langle r^2 \rangle}{6}$$

4. Sabendo que o raio nuclear (R) é proporcional a $A^{1/3}$ e que a constante de proporcionalidade medida experimentalmente é $r_0=1,2\ fm$ ($R = r_0 A^{1/3}$ - obtida a partir do ajuste dos dados de $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ em função de $A^{1/3}$, figura 8 do texto base da aula 4), calcule o raio dos núcleos de ^{7}Li e ^{208}Pb. O que podemos concluir sobre a força forte, que mantém os prótons e nêutrons ligados no núcleo, desse resultado?

Resolução:

Para o ^{7}Li, tem-se:

$$R = 1,2 \times (7)^{1/3} = 2,29\ fm$$

e para o ^{208}Pb:

$$R = 1,2 \times (208)^{1/3} = 7,11\ fm$$

Como o raio é proporcional a $A^{1/3}$, tem-se que o volume é proporcional a A, uma vez que o volume é proporcional a R^3. Isso significa que o volume nuclear é aditivo, isto é, ao se acrescentar um próton ou nêutron ao núcleo, seu volume cresce proporcionalmente ao número de núcleons adicionados. Isso indica que a força que mantém o núcleo coeso é de curto alcance, pois caso contrário a densidade nuclear deveria aumentar conforme se aumenta o número de prótons ou nêutrons, como acontece com o átomo ao se acrescentar elétrons em sua órbita.

Atividade Avaliativa

5. A partir dos valores obtidos experimentalmente de massa dos prótons ($m_p=938,78\ MeV/c^2$), nêutrons ($m_n=939,56\ MeV/c^2$) e núcleos, calcule a energia de ligação do núcleo dos elementos ^4He ($m_{4He}=3728,40\ MeV/c^2$) e ^6Li ($m_{6Li}=5603,05\ MeV/c^2$) e compare com os valores obtidos da fórmula semi-empírica de massa:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

onde,

a_V = 15,56 MeV
a_S = 17,23 MeV
a_c = 0,697 MeV
a_{sim} = 23,285 MeV

Os resultados são compatíveis? O que podemos concluir sobre a energia de ligação do núcleo de ^4He?

Resolução:

Usando a expressão 17 do texto base da aula 4, tem-se para o ^4He:

$$\begin{aligned} B = &\ Z \times m_p c^2 + N \times m_n c^2 - m(Z,N)c^2 \\ &\ 2 \times 938,78 + 2 \times 939,56 - 3728,40 \\ &\ 28,29 MeV \end{aligned}$$

que leva a uma valor de energia de ligação por núcleon: *B/A=7,07 MeV*

E para o ^6Li:

$$B = 3 \times 938,78 + 3 \times 939,56 - 5603,05 = 31,99 MeV$$

que resulta em *B/A = 5,33 MeV*

Usando a fórmula semi-empírica de massa (expressão 18 do texto base da aula 4, reproduzida no enunciado do problema), tem-se para o ^4He que:

$$B = 15,56 \times 4 - 17,23 \times 4^{2/3} - 0,697 \frac{2(2-1)}{4^{1/3}} - 23,285 \frac{(4-2\times 2)^2}{4} = 17,94 MeV$$

que resulta em uma energia de ligação por núcleon: *B/A = 4,49 MeV*

Para o ^6Li, tem-se:

$$B = 15,56 \times 6 - 17,23 \times 6^{2/3} - 0,697 \frac{3(3-1)}{6^{1/3}} - 23,285 \frac{(6-3\times 3)^2}{6} = 34,17 MeV$$

ou seja, *B/A = 5,69 MeV*.

Portanto, nota-se que os valores de *B/A* medido e calculado pela fórmula semi-empírica de massa para o núcleo ^{6}Li são bem próximos (~7% de diferença), enquanto para o ^{4}He isso não ocorre (~36% de diferença), pois esse núcleo apresenta uma energia de ligação bem maior do que aquela esperada por essa fórmula, indicando que há outros aspectos na estrutura desse núcleo que o torna mais ligado do que seus vizinhos em termos de *A* e *Z*.