Composição do Movimento, Movimentos em Duas Dimensões

1- Introdução

Existem duas formas de se pensar a questão da composição de movimento.

Na primeira forma, o movimento de um objeto é pensado como resultante de dois movimentos tais como, por exemplo, quando dois sistemas de coordenadas estão em movimento relativo. Um primeiro movimento refere-se ao deslocamento de um objeto observado num determinado sistema de referência. O segundo movimento é aquele associado ao deslocamento desse sistema de coordenadas. Por exemplo, em alguns carrosséis de parques de diversão, os cavalos sobem e descem num eixo vertical. Por outro lado, o carrossel gira em relação ao parque. Num referencial fixo no carrossel, o cavalo realiza um movimento retilíneo, ora em uma direção ora na direção oposta. O carrossel realiza um movimento circular e uniforme com relação a um referencial fixo no parque de diversões. Neste referencial fixo no parque, um ponto do cavalo realiza um movimento semelhante a uma senóide numa superfície vertical, mas que se fecha como num cilindro.

Uma segunda forma de se pensar a composição de movimentos (aqui é melhor falar em decomposição de movimentos) é pensar o movimento de um objeto como resultante de dois ou três outros movimentos retilíneos ao longo de eixos ortogonais. Por exemplo, no estudo do lançamento de projéteis, Galileu introduziu a decomposição do movimento em duas componentes, uma horizontal e uma vertical. Dois movimentos, descritos de uma forma simples em dois eixos ortogonais, podem reproduzir um comportamento relativamente complexo. A decomposição de movimentos é, assim, um artifício para equacionar alguns problemas em duas (no plano) ou três (no espaço) dimensões em termos de equações de uma dimensão em função do tempo.

2- Observações do cotidiano

Chuva no para-brisa de um automóvel

Mesmo que a chuva caia na vertical, o motorista - um observador dentro do automóvel em movimento que esteja vendo o para-brisa - vê a chuva bater obliquamente.


Queda de moeda

Se você está parado dentro de um ônibus, em velocidade constante e num trecho reto, deixar cair uma moeda na direção de seus pés, onde cai a moeda? E para um observador fora do ônibus, que movimento a moeda realiza?

Composição de rotações

Existem algumas rodas-gigantes com caçambas dependuradas que giram em torno do eixo de fixação.

3- Movimento em duas dimensões

Existe uma gama relativamente grande de movimentos que ocorrem em duas dimensões, isto é, movimentos que ocorrem num plano. Dentre esses, gostaríamos de destacar neste capítulo o problema de objetos em movimento próximos à superfície da Terra (movimento dos projéteis) e o movimento circular. Posteriormente, analisaremos o movimento dos planetas, satélites e cometas, os quais são também movimentos que ocorrem em duas dimensões.

4- Movimento dos projéteis

Ao tratarmos do movimento dos projéteis, consideraremos a superfície da Terra como sendo plana. Para os fenômenos corriqueiros aqui estudados, essa aproximação é muito boa.

A situação física que gostaríamos de estudar neste capítulo é a seguinte: um projétil é lançado de um ponto num certo instante (tempo t = 0) (uma bala de canhão, por exemplo) dado pelas coordenadas (x_0, y_0). Esse projétil é lançado no espaço com uma velocidade inicial v_0. O vetor velocidade forma um ângulo q com a horizontal (eixo x). Esse ângulo é conhecido como ângulo de tiro.

As componentes do vetor velocidade são, portanto,

$$\vec{v}_{0x} = \vec{v}_0 \cos\theta$$

$$\vec{v}_{0y} = \vec{v}_0 sen\theta$$

Veremos, a seguir, que é possível, a partir dos dados já fornecidos, prever a posição da partícula, bem como prever sua velocidade para qualquer instante de tempo.

Em particular, estaremos interessados em calcular:

a) a altura máxima atingida;

b) o tempo de queda (o tempo de duração do voo livre);

c) o alcance do projétil na posição horizontal.

Para atingir esses objetivos, precisamos primeiramente determinar as equações básicas do movimento.

5- Equações básicas do movimento

Como a aceleração da gravidade aponta na direção perpendicular à superfície terrestre, o sistema de coordenadas cartesianas mais indicadas é aquele no qual um dos eixos é paralelo ao chão (eixo x) e o outro eixo é paralelo à aceleração da gravidade.

Podemos estudar o movimento do projétil com a composição de dois movimentos. Um movimento na direção vertical (eixo y) e outro movimento na direção horizontal (eixo x).

Ao longo do eixo x, e como não existe aceleração nessa direção, o movimento é uniforme e escrevemos:

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

onde é a coordenada inicial (no tempo t = 0) e v_{0x} é a componente da velocidade inicial no eixo x.
A componente da velocidade no eixo x é constante e dada por

$$v_x = v_{0x}$$

Ao passo que, ao longo do eixo y, a aceleração é constante, e dada pela aceleração da gravidade g. O movimento, no eixo y, é, portanto, uniformemente variado e, para a orientação de eixos considerada, escrevemos:

$$y = y_0 + v_{oy} t - \frac{g}{2} t^2$$

A componente da velocidade se escreve:

$$v_y = v_{oy} - gt$$

onde y_0 é coordenada inicial (eixo y) e v_{0y} é a componente da velocidade inicial. A conclusão à qual chegamos é a de que, dadas a posição inicial (x_0, y_0) e a velocidade inicial (v_{0x}, v_{0y}) do projétil, podemos determinar a sua posição e velocidade em qualquer instante (t) depois do lançamento.

Para a posição, basta determinarmos x e y. Essas coordenadas são dadas, para um tempo qualquer, pelas expressões:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

Ao passo que, para a velocidade, a qualquer t, temos a seguinte expressão para suas componentes:

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{oy} - gt$$

Estas são as equações básicas do movimento. Podemos, a partir delas, obter algumas informações sobre esse movimento.

6- Trajetória do projétil

A partir da equação:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

temos:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

Substituindo t pela expressão acima obtida na equação:

$$y = y_0 + v_{oy}t - \frac{g}{2}t^2$$

obteremos para a trajetória a expressão:

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\left(x - x_0\right) - \frac{g}{2v_{ox}{}^2}\left(x - x_0\right)$$

O estudante poderá facilmente verificar que a equação para a trajetória é a equação de uma parábola.

7- Altura máxima

A altura máxima do projétil é atingida quando ele tem a velocidade, no eixo y, igual a zero (ou seja, quando ele para de subir). Isto ocorre decorrido o tempo (t_m) dado por:

$$0 = v_{oy} - g t_m \quad \text{onde} \quad \left(v_y = 0\right)$$

isto é,

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g}$$

A altura máxima $\left(y_m\right)$ é dada, portanto, pela substituição de t por t_m na expressão:

$$y = y_0 + v_{oy} t - \frac{g}{2} t^2$$

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\left(x - x_0\right) - \frac{g}{2 v_{ox}^{\ 2}}\left(x - x_0\right)$$

Portanto,

$$y_m = y_0 + \frac{v_{0y}^{\ 2}}{2g}$$

8- Tempo de queda

O projétil atinge o chão (isto é, y = 0) no instante t_q, tal que,

$$0 = y_0 + v_{oy} t_q - g \frac{t_q^2}{2}$$

A solução dessa equação nos dá:

$$t_q = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^{\ 2} + 2 y_0 g}}{2}$$

9- Alcance do projétil

É a posição do projétil (no eixo x) quando ele cai (x_m). Basta substituir o tempo t pelo tempo de queda t_q na equação $x = x_0 + v_{0x}t$ e obtém-se:

$$x = x_0 + v_{0x}t_q$$

10- Movimento circular - de outra forma

O movimento circular é outro exemplo de movimento em duas dimensões. Ele será estudado agora como a combinação de dois movimentos: um no eixo x e outro no eixo y.

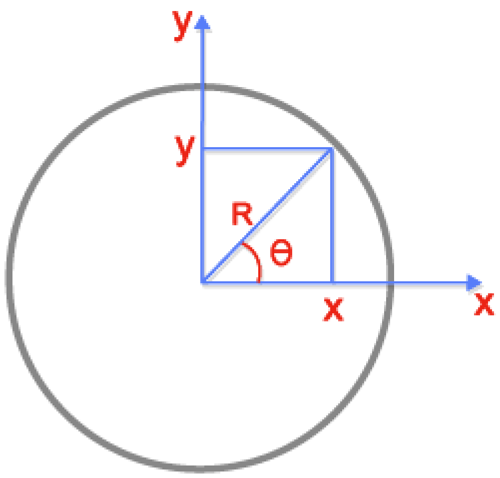
Consideremos o sistema de eixos ortogonais da figura.

Já discutimos a projeção no eixo x e no eixo y do vetor posição.

Para o ângulo q da figura a projeção em x e y nos é dada

$$x = R\cos(\omega t + \theta)$$

$$y = Rsen(\omega t + \theta)$$



Para o movimento uniforme podemos escrever:

$$v_x = -R\omega sen(\omega t + \theta)$$

$$v_y = R\omega\cos(\omega t + \theta)$$

11- Aceleração no movimento circular uniforme

Ao estudarmos o movimento circular uniforme, dissemos que ele não tem aceleração escalar. Isso significa que não existe aceleração na direção tangente ao círculo em cada ponto. No entanto, olhando para as velocidades em cada ponto, percebe-se que existe uma aceleração. Como já vimos, essa é a aceleração centrípeta dada por:

$$a_{cp} = -\omega^2 R$$

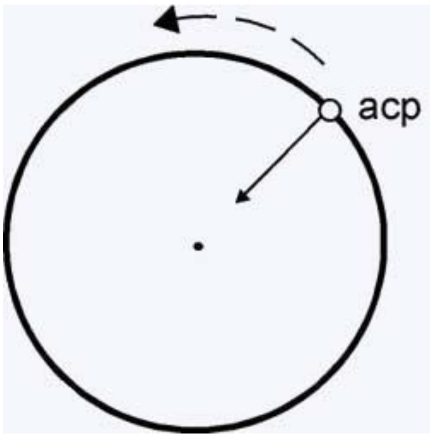
No movimento circular uniforme, essa é a única aceleração. Temos, portanto,

$$a = -\omega^2 R$$

As componentes de aceleração são:

$$a_x = -\omega^2 x = -\omega^2 R\cos(\omega t + \theta)$$

$$a_y = -\omega^2 y = -\omega^2 Rsen(\omega t + \theta)$$



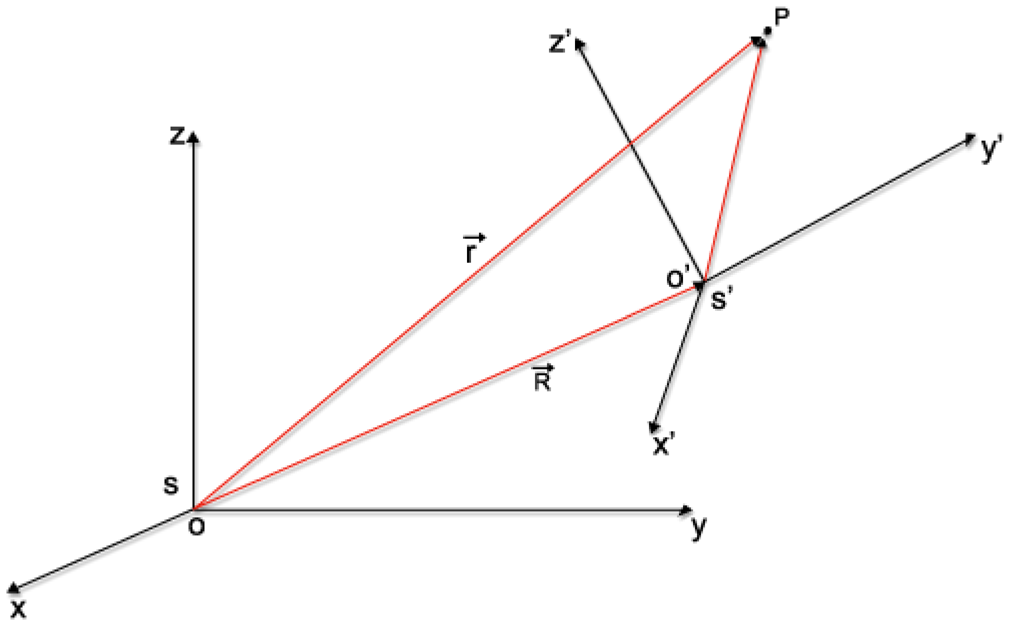
A análise do movimento circular indica que esse movimento é composto por dois movimentos conhecidos como Movimentos Harmônicos Simples. No eixo o movimento é do tipo Harmônico Simples (MHS). O MHS é o tipo de movimento oscilatório mais simples que existe.

12- Composição dos movimentos

Um passageiro se move num trem, o qual está em movimento em relação a um observador em repouso (na superfície terrestre). Esse é um exemplo típico de movimento composto. Nesse caso, o movimento do passageiro é composto por dois movimentos: o do passageiro em relação ao trem e do trem em relação ao solo.

O estudo da composição de movimentos é facilitado pelo uso da noção de vetores e as operações de adição e subtração de grandezas vetoriais.

Para entendermos de uma forma bastante geral esse problema considere dois sistemas de referência. Vamos designá-los por e .



À origem do sistema de coordenadas (O') está associado o vetor de posição.

A posição do ponto P é determinada, no sistema S', pelo vetor
e no sistema S, pelo vetor.

Note-se que

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

Não é difícil concluir que a velocidade da partícula no sistema S (designada aqui por $\vec{v}_0$) é dada pela adição da velocidade da partícula no sistema S' (designada $\vec{v}\,'$) com a velocidade com que o sistema S' se move em relação a S (designada por $\vec{v}$). Isto é,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'$$

Para a aceleração nos dois sistemas, podemos escrever:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$$

onde a_0 é a aceleração do sistema S' em relação a S, e a e a' são as acelerações nos sistemas S e S', respectivamente.