Autor: Roberto A. Salmeron

1: Introdução

Desloque um eletroscópio ao redor do terminal de uma máquina eletrostática desligada. Qualquer que seja a região na qual o eletroscópio é colocado, as suas folhas permanecem fechadas, indicando que ele não se eletriza (fig. 37-a). Depois faça a máquina eletrostática funcionar e desloque o eletroscópio pelos mesmos lugares anteriores. Verá que agora existe uma região ao redor do terminal da máquina na qual o eletroscópio mantém suas folhas abertas, indicando que nessa região ele se eletriza por indução (fig. 37-b). Portanto, na mesma região em que o eletroscópio antes não sofria nenhuma ação, ele agora se eletriza. Concluímos que a carga elétrica que apareceu no terminal da máquina modificou a região que envolve esse terminal. Essa região adquiriu propriedades novas, pois só depois do aparecimento da carga elétrica se notou algum fenômeno elétrico dentro da região.

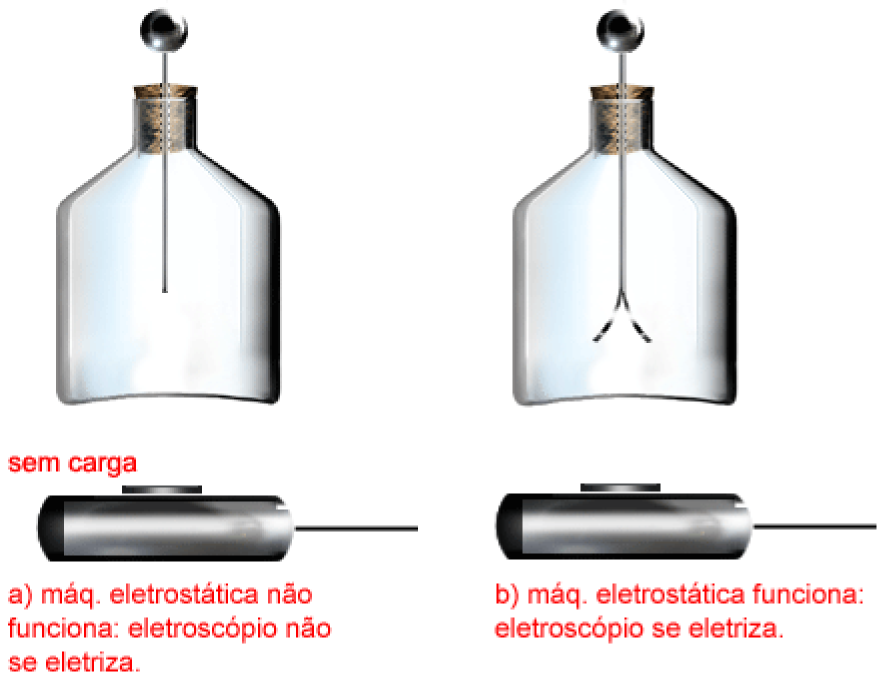


Figura 37

Sempre que uma carga elétrica Q é colocada em certa posição P, a região que envolve essa carga adquire propriedades novas. Assim, uma carga elétrica q colocada nessa região, fica sujeita a uma força $\vec{F}$; outra carga q_1, colocada nessa região fica sujeita a uma força; $\vec{F}_1;\vec{F}$ e $\vec{F}_1$ podem ser de atração ou repulsão, conforme os sinais de Q, q e q_1 (fig. 38). Como essas forças são de origem elétrica, chama-se campo de forças elétricas, ou simplesmente campo elétrico, à região que envolve.

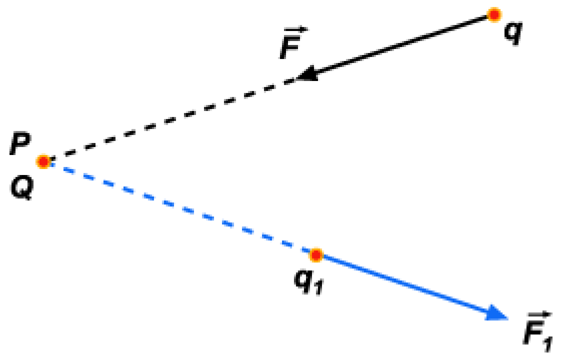


Figura 38

Chama-se campo elétrico de uma carga elétrica à região que envolve essa carga e dentro da qual a carga consegue exercer ações elétricas.

Em Física, chama-se campo de força a qualquer região tal que, se dentro dela for colocado um corpo, ele fica sujeito a forças. Por exemplo, um gás encerrado num recipiente constitui um campo de forças, porque um corpo colocado nesse recipiente fica sujeito a forças exercidas pelo gás. Um líquido em equilíbrio num vaso, ou em movimento num canal, é um campo de forças, porque um corpo colocado no vaso ou no canal fica sujeito a forças. Todos sabem que existe uma região vastíssima ao redor da Terra, que tem a propriedade seguinte: todo corpo colocado nessa região é atraído para a Terra (fig. 39). Essa região é um campo de forças chamado campo gravitacional da Terra. Existe um campo gravitacional ao redor de cada corpo. A região que envolve um ímã é também um campo de forças, pois um pedaço de ferro, colocado nessa região, é atraído pelo ímã; esse campo é chamado campo de forças magnéticas, ou simplesmente campo magnético. Como vemos por esses exemplos, o campo elétrico é um

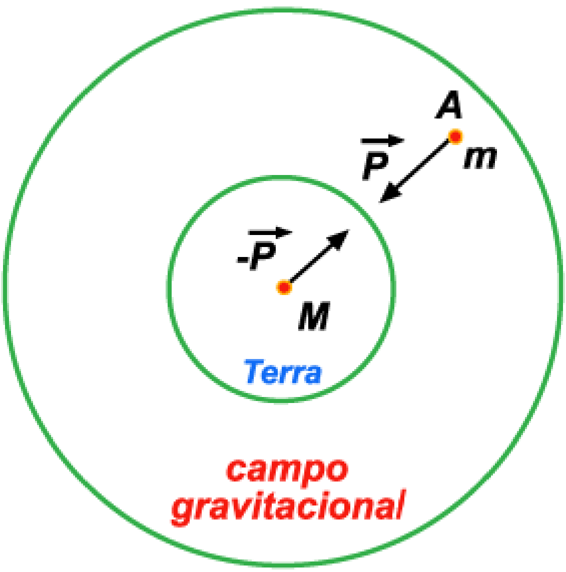


Figura 39

caso particular de campos de força.

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades importantes dos campos elétricos. As propriedades que estudaremos valem para qualquer tipo de carga elétrica, puntiforme ou não. Mas, como um dos objetivos deste curso é apresentar a eletricidade exclusivamente com matemática elementar, para evitar o uso de matemática não elementar faremos as demonstrações para o caso particular em que as cargas elétricas são puntiformes.

2: Campo Newtoniano, ou Coulombiano

Um campo de forças é chamado newtoniano, ou coulombiano, quando satisfaz às duas condições seguintes:

1a) as forças desse campo obedecem a uma equação do tipo da equação de Coulomb:

$$F = \pm \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q_1.Q_2}{d^2}$$

2a) as forças que se exercem entre duas partículas 1 e 2 colocadas no campo, exercem-se segundo a reta determinada pelas partículas (fig. 40).

Figura 40

Essas forças que se exercem entre duas partículas tem igual módulo, mas sentidos opostos. Por isso, se uma for representada por $\vec{F}$, a outra deverá ser representada por $-\vec{F}$.

Existem três exemplos de campos newtonianos na natureza: o elétrico, o magnético e o gravitacional. Esses três campos tem propriedades idênticas, e seguem as mesmas equações. Uma diferença de comportamento entre eles está no fato de existirem forças de atração e de repulsão nos campos elétricos e magnéticos enquanto que no gravitacional só há forças de atração. Salvo essa restrição, tudo o que diremos neste Capítulo III vale para os três campos.

Autor: Roberto A. Salmeron

3: Propriedade fundamental do campo elétrico

Antes de estudarmos a propriedade fundamental do campo elétrico, recordemos a propriedade fundamental do campo gravitacional, que é conhecida de todos. Consideremos um ponto A situado no campo gravitacional da Terra. A Terra tem massa que chamaremos M e suporemos concentrada em seu centro. Imaginemos que no ponto A seja colocado um corpo qualquer desses que estão na superfície da Terra, como uma pedra, um avião, etc.. Seja m a massa desse corpo. Sabemos que m é sempre muito menor que a massa da Terra e que por isso, quando colocamos em A a massa m o campo gravitacional da Terra não é alterado. A massa M da Terra atrai a massa m com uma força $\vec{P}$, que chamamos peso do corpo. E a massa m atrai a Terra com uma força de igual módulo e contrária, que é $\vec{P}$ (fig. 39).

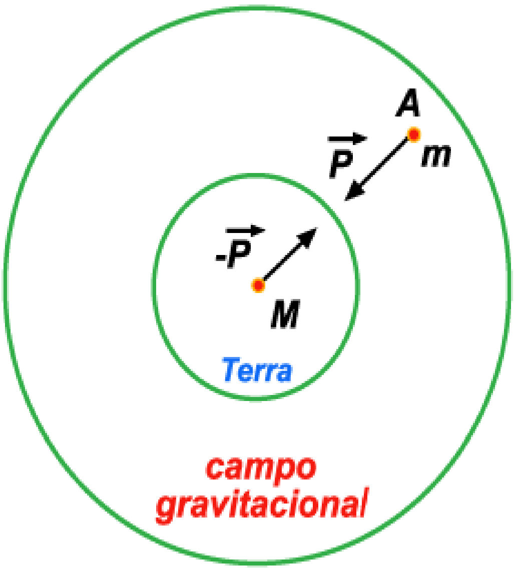


Figura 39

Suponhamos que retiremos do ponto A aquele corpo e coloquemos sucessivamente, no mesmo ponto A, outros corpos de massa $m_1, m_2, ..., m_n$, todas suficientemente pequenas para não alterarem o campo gravitacional da Terra. Esses outros corpos ficarão sujeitos respectivamente às forças $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n$. A propriedade fundamental do campo gravitacional é: o quociente dessas forças pelas massas correspondentes é uma grandeza vetorial constante para o mesmo ponto A. Isto é,

$$\frac{\vec{P}}{m} = \frac{\vec{P}_1}{m_1} = \frac{\vec{P}_2}{m_2} = ... = \frac{\vec{P}_n}{m_n} = \vec{g}$$

$\vec{g}$ sendo constante em módulo, direção e sentido para o mesmo ponto A. A grandeza $\vec{g}$ é chamada aceleração da gravidade no ponto A. Isolando só uma igualdade, teremos:

Autor: Roberto A. Salmeron

$$\frac{\vec{P}}{m} = \vec{g}, \text{ ou } \vec{P} = m\vec{g}$$

Essa expressão nos mostra que a força $\vec{P}$ que atua numa massa m depende de dois fatores: um, é a própria massa m; o outro é a aceleração da gravidade $\vec{g}$, que não depende da massa m, mas depende unicamente do ponto A no qual a massa m é colocada.

Considerando os módulos de $\vec{P}$ e $\vec{g}$, temos: $|\vec{P}| = m|\vec{g}|$. Quando $m = 1$, fica: $|\vec{g}| = |\vec{P}|$. Significa que a intensidade da aceleração da gravidade num ponto é igual à intensidade do peso de um corpo de massa unitária colocada nesse ponto.

Caso do campo elétrico – Imaginemos o campo elétrico de uma carga puntiforme Q. Suponhamos que num ponto A desse campo coloquemos uma carga elétrica q, suficientemente pequena para não alterar o campo de Q. A carga q ficará sujeita a uma força $\vec{F}$, e Q à força $-\vec{F}$. Suponhamos que a carga q seja retirada do ponto A, e que no mesmo ponto, seja colocada uma carga q_1; esta carga q_1 ficará sujeita a uma força $\vec{F}_1$. Suponhamos que continuemos essa operação colocando sucessivamente no ponto A as cargas elétricas $q_1, q_2, ..., q_n$, todas elas suficientemente pequenas para não alterarem o campo de Q. Elas ficarão sujeitas respectivamente, às forças $\vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ (fig. 41).

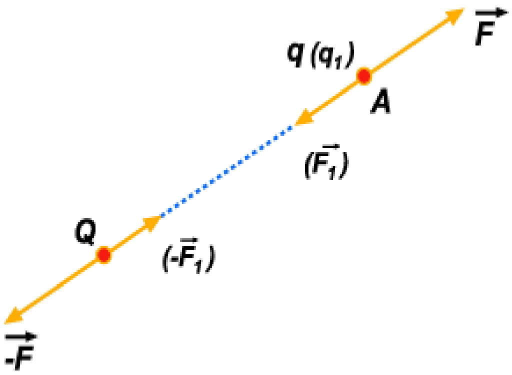


Figura 41

A propriedade fundamental do campo elétrico é a seguinte: o quociente dessas forças pelas cargas elétricas correspondentes colocadas em A é uma grandeza vetorial constante para o mesmo ponto A do campo elétrico. Isto é,

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = ... = \frac{\vec{F}_n}{q_n} = \vec{E}$$

(constante em módulo, direção e sentido, para o mesmo ponto A).

Essa grandeza vetorial é chamada vetor campo elétrico, ou vetor campo, ou simplesmente o campo no ponto A. Isolando uma igualdade, teremos:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}, \text{ou } \vec{F} = q.\vec{E}$$

Dizer que o quociente da força $\vec{F}$ pela carga q e uma grandeza constante, significa que essa grandeza não depende de q nem de $\vec{F}$. Para um mesmo campo, ela depende exclusivamente do ponto A escolhido dentro desse campo. A propriedade fundamental consiste na existência dessa grandeza vetorial $\vec{E}$ perfeitamente determinada para cada ponto do campo elétrico.

Na equação $\vec{F} = q.\vec{E}$, $\vec{E}$ representa o vetor campo no ponto A do campo elétrico produzido pela carga Q, e $\vec{F}$ a força que atua sobre uma carga q colocada nesse ponto A. Portanto, a força $\vec{F}$ que atua sobre a carga q depende da carga q e de um fator $\vec{E}$ que não depende da carga, mas do ponto em que ela é colocada.

Considerando os módulos de $\vec{F}$ e $\vec{E}$, temos:

$\left|\vec{F}\right| = |q|\left|\vec{E}\right|$. Quando $|q| = 1$, fica: $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{E}\right|$

Significa que o módulo do campo elétrico num ponto é igual ao módulo da força que atua sobre a unidade de carga elétrica colocada nesse ponto.

Vemos então que o campo gravitacional e o elétrico tem essa propriedade em comum. E que a equação $\vec{F} = q.\vec{E}$ é análoga à equação $\vec{P} = m\vec{g}$. O campo $\vec{E}$ corresponde, em eletricidade, à aceleração da gravidade na mecânica, e a carga elétrica q à massa mecânica m.

4: Características do vetor campo

Uma grandeza física vetorial é caracterizada por quatro elementos: 1) significado físico;

2)módulo;
3)direção;
4) sentido.

1) O significado físico do vetor campo elétrico foi dado; é o quociente de uma força por uma carga elétrica.

Autor: Roberto A. Salmeron

2) Módulo – Suponhamos, no campo elétrico da carga elétrica puntiforme Q, um ponto A situado à distância d dessa carga (fig. 42). Colocando em A a carga elétrica puntiforme q ela ficará sujeita à força $\vec{F}$. O campo em A será $\vec{E}$, tal que $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$

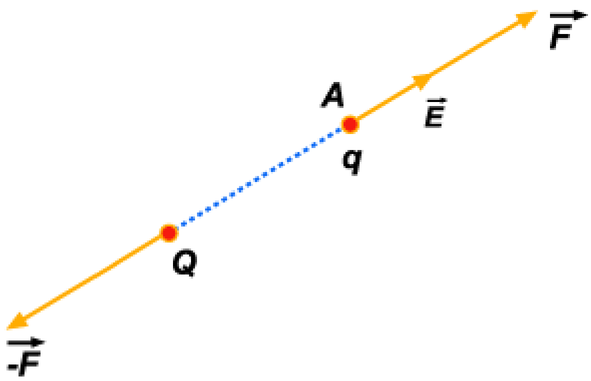


Figura 42

O módulo de $\vec{E}$ será igual ao quociente do módulo de $\vec{F}$ pelo valor absoluto de q, isto é:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Mas, pela fórmula de Coulomb, vale:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{\varepsilon}.\frac{|Q||q|}{d^2}.$$

Então,

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\frac{1}{\varepsilon}.\frac{|Q||q|}{d^2}}{|q|}$$

Resulta:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}.\frac{|Q|}{d^2}$$

Essa expressão mostra que o módulo do campo elétrico num ponto é diretamente proporcional à carga que produz o campo inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à carga e inversamente proporcional à constante dielétrica do meio. O campo depende então da natureza do meio. Mas, observemos que ele não depende da carga q.

O módulo do campo é também chamado intensidade do campo.

3) Direção – O vetor $\vec{E}$, sendo o quociente do vetor $\vec{F}$ pelo número q, tem a mesma direção que. Como se trata de um campo coulombiano, a direção de $\vec{F}$ é a direção da reta QA. Logo, essa é também a direção de $\vec{E}$ (fig. 42).

Autor: Roberto A. Salmeron

4) Sentido – Para estudar o sentido de $\vec{E}$ é preciso lembrar que, sendo $\vec{E}=\vec{F}/q$, o sentido de $\vec{E}$ é o mesmo de $\vec{F}$ quando q é positivo, e é contrário ao de $\vec{F}$ quando q é negativo (ver Introdução § 4). Há dois casos para o sentido de $\vec{E}$.

1º caso – A carga que produz o campo é positiva. Neste caso, q pode ser positivo ou negativo.

Sub-caso a) -q é positivo (fig. 43-a). A força $\vec{F}$ é de repulsão, pois Q e q têm mesmo sinal. Sendo q positivo, o sentido de $\vec{E}$ é o mesmo de $\vec{F}$. Logo, $\vec{E}$ tem o sentido de Q para A.

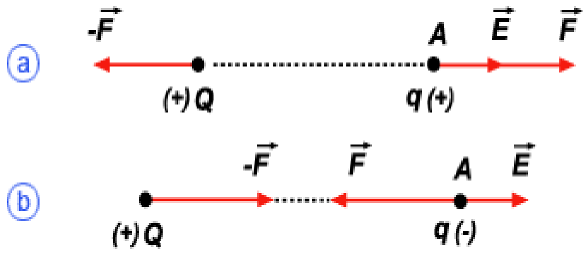


Figura 43

Sub-caso b) -q é negativo. A força $\vec{F}$ é de atração (fig. 44-a). Sendo q negativo, o sentido de $\vec{E}$ é oposto ao de $\vec{F}$. Logo, $\vec{E}$ tem o sentido de Q para A.

Conclusão: Q sendo positivo, o sentido de $\vec{E}$ é sempre o sentido de Q para A, qualquer que seja o sinal de q. Mudando o sinal de q mudaremos o sentido da força $\vec{F}$, mas não o do campo $\vec{E}$, consequência do fato de $\vec{E}$ independer de q.

2º caso – A carga Q que produz o campo é negativa.

Subcaso a) -q é positivo. A força $\vec{F}$ é de atração. Sendo q positivo, o sentido de $\vec{E}$ é o mesmo de $\vec{F}$. Logo, $\vec{E}$ tem o sentido de A para Q.

Autor: Roberto A. Salmeron

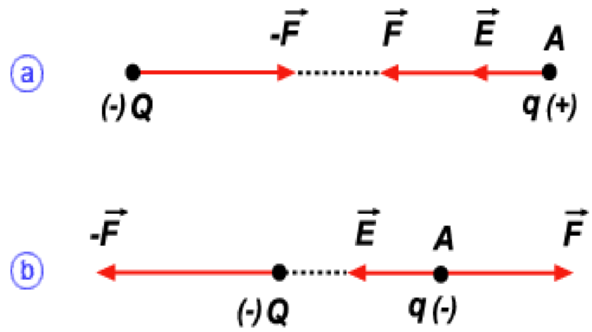


Figura 44

Sub-caso b) -q é negativo. A força $\vec{F}$ é de repulsão. Sendo q negativo, o sentido de $\vec{E}$ é inverso ao de $\vec{F}$. Logo, $\vec{E}$ tem o sentido de A para Q (fig. 44-b).

Conclusão: Q sendo negativo, o sentido de $\vec{E}$ é sempre o sentido de A para Q, qualquer que seja o sinal de q.

Observação

Pelas características do vetor campo , observamos que ele não depende da carga q em módulo, nem direção, nem sentido, de acordo com o que dissemos quando definimos . Essa carga q que usamos para estudar as características do vetor é uma carga simplesmente auxiliar para raciocínio e não influi nos resultados. O mesmo acontece com a aceleração da gravidade; essa aceleração, num ponto qualquer ao redor da Terra não depende da massa de nenhum corpo que por ventura seja colocado nesse ponto. Depende da posição do ponto ao redor da Terra.

5: Unidades de intensidade de campo

Já vimos que a intensidade de campo é o módulo do vetor campo. A sua unidade é deduzida da expressão:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{|q|}$$

a. Sistema CGSES

Neste sistema devemos considerar $q = 1 \text{ ues CGSq}$ e $\left|\vec{F}\right| = 1d$. Resulta:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{|q|} = \frac{1d}{1 \text{ ues CGSq}} = 1\left(\frac{d}{\text{ues CGSq}}\right) \text{ ou } 1 \text{ ues CGS}\left|\vec{E}\right|$$

Indica-se por $d/\text{ues CGSq ou ues CGS } \left|\vec{E}\right|$. Logo, uma unidade CGSES de intensidade de campo elétrico é a intensidade do campo elétrico em um ponto tal que, uma carga puntiforme de uma unidade CGSES de carga colocada nesse ponto, fica sujeita à força de um dine.

b. Sistema MKS

Neste sistema devemos considerar $q = 1c$ e $\left|\vec{F}\right| = 1N$. Resulta:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{|q|} = \frac{1N}{1c} 1\left(\frac{N}{c}\right) \text{ ou } 1 \text{ u MKS } \left|\vec{E}\right|$$

Esta unidade é indicada por N/c ou u MKS $\left|\vec{E}\right|$. Portanto, uma unidade MKS de intensidade de campo elétrico é a intensidade de campo elétrico em um ponto tal que, uma carga puntiforme de um coulomb colocada nesse ponto fica sujeita à força de um newton.

Relação entre as unidades – Sendo $1N = 10^5 d$ e $1c = 3.10^9 \text{ ues CGSq}$ e, resulta:

$$1 \text{ u MKS } \left|\vec{E}\right| = \frac{1N}{1c} = \frac{10^5 d}{3.10^9 \text{ ues CGSq}} = \frac{1}{3.10^4} \frac{d}{\text{ues CGSq}}$$

$$1 \text{ u MKS } \left|\vec{E}\right| = \frac{1}{3.10^4} \text{ues CGSq}\left|\vec{E}\right|$$

6: Campo produzido por mais que uma carga pontual

Autor: Roberto A. Salmeron

Suponhamos duas cargas elétricas pontuais Q_1 e Q_2 suficientemente próximas para que haja uma interpenetração de seus campos. Haverá pontos. como A, sujeitos simultaneamente aos dois campos elétricos. Se existisse só a carga Q_1, ela produziria em A, um campo $\vec{E}_1$. Se existisse só Q_2, ela produziria em A um campo $\vec{E}_2$. A experiência nos mostra que o campo que realmente existe em A é o campo $\vec{E}$ obtido pela soma vetorial dos dois campos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ (fig. 45). Esse fato, de que os vetores campos de um mesmo ponto são somados, é um caso particular de um princípio geral que existe em eletricidade e que se chama princípio da superposição dos efeitos. De acordo com esse princípio, quando vários efeitos são produzidos simultaneamente num ponto, esses efeitos se somam. Se os efeitos são representados por grandezas escalares elas são somadas escalarmente; se são representados por grandezas vetoriais elas são somadas vetorialmente.

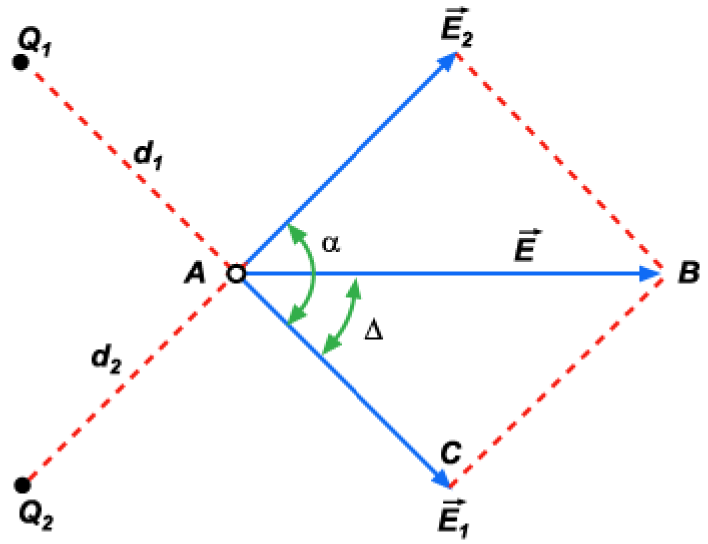


Figura 45

O campo $\vec{E}$ resultante tem as seguintes características:

a. Módulo

Sendo o ângulo formado por $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$, temos:

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\left|\vec{E}_1\right|^2 + \left|\vec{E}_2\right|^2 + 2\left|\vec{E}_1\right|\left|\vec{E}_2\right|\cos\alpha}$$

b. Direção

Podemos assinalar a direção do campo $\vec{E}$ em relação a um dos componentes. Chamado ao ângulo Δ que $\vec{E}$ faz com $\vec{E}_1$, temos:

$$sen\Delta = \frac{\left|\vec{E}_2\right| sen\alpha}{\left|\vec{E}\right|}$$

c. Sentido

Não podemos exprimir algebricamente.

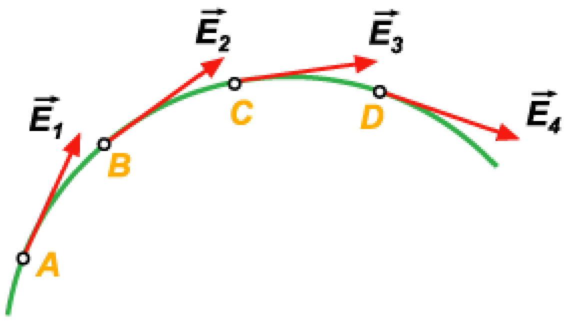
Quando existirem mais que duas cargas elétricas pontuais produzindo o campo, calculamos o campo devido a cada carga separadamente, e efetuamos a soma vetorial de todos os campos parciais.

7: Linha de força

Definição

Chama-se linha de força de um campo elétrico a uma linha que em cada ponto é tangente ao vetor campo desse ponto.

Assim, se nos pontos A, B, C, D,... o vetor campo é respectivamente $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4, ...$ a linha de força que passa por todos esses pontos é a linha ABCD... tangente a $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4, ...$ (fig. 46).



Autor: Roberto A. Salmeron

Figura 46

Não é só o campo elétrico que tem linhas de força. O campo magnético e o da gravidade, por exemplo, também tem. No caso da gravidade, a linha de força é uma linha que em todos os seus pontos se mantém tangente ao vetor aceleração da gravidade, $\vec{g}$; sabemos que a linha que satisfaz a essa condição é a vertical; isto é, as linhas de força do campo gravitacional são as verticais. A linha de força tem, assim, uma definição puramente geométrica. Mas, vejamos duas conclusões que podemos tirar dessa definição.

1ª conclusão – Se conhecemos uma linha de força ABCD..., saberemos qual a direção do campo $\vec{E}$ em qualquer um de seus pontos; é a direção da tangente à linha nesse ponto.

2ª conclusão – Suponhamos uma carga q colocada em um ponto A de uma linha de força (fig. 47). O campo $\vec{E}$ é tangente à linha de força no ponto A. A força $\vec{F}$ que atua em q, que vale $\vec{F} = q.\vec{E}$, tem a mesma direção que $\vec{E}$; logo $\vec{F}$, também é tangente à linha de força no ponto A. Portanto, em cada ponto, a tangente à linha de força dá a direção de força que atua numa carga elétrica posta nesse ponto.

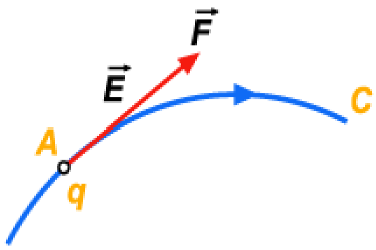


Figura 47

Para fixar idéias, consideremos as linhas de força do campo gravitacional, isto é, as verticais. As duas conclusões apresentadas acima para o campo elétrico também valem para o campo gravitacional, e são bem conhecidas de todos. Assim, a primeira conclusão significa que, se conhecermos uma vertical, como consequência conheceremos a direção da aceleração da gravidade $\vec{g}$ em cada um de seus pontos: é a tangente à vertical. A segunda conclusão significa que, em cada ponto, a tangente à vertical dá a direção da força com que a Terra atrai um corpo. Qual o interesse de conhecermos as linhas de força de um campo elétrico? A importância das linhas de força está exatamente nas duas conclusões citadas acima. É que, conhecendo as linhas de força, conhecemos as direções do vetor $\vec{E}$ e das forças que atuam nas cargas colocadas no campo. É por isso que costumamos representar geometricamente um campo elétrico por meio das suas linhas de força. É o caso da figura abaixo em que o campo é formado por duas cargas elétricas, sendo uma positiva e uma negativa,

Autor: Roberto A. Salmeron

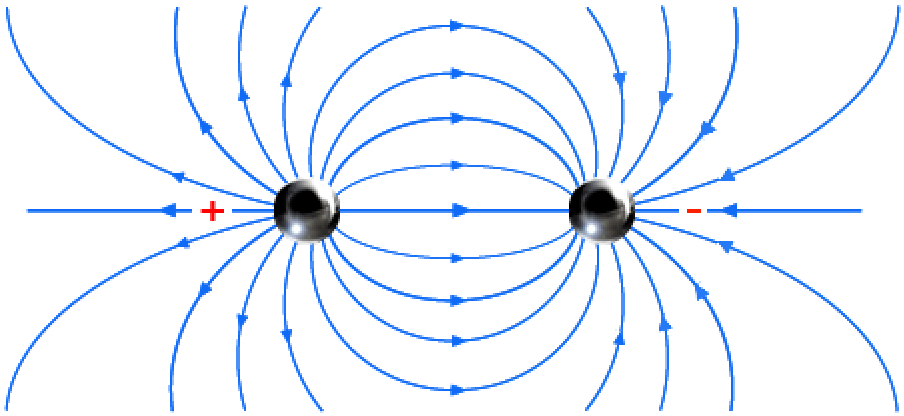


Figura 52

e o da próxima figura, em que o campo é formado por duas cargas positivas.

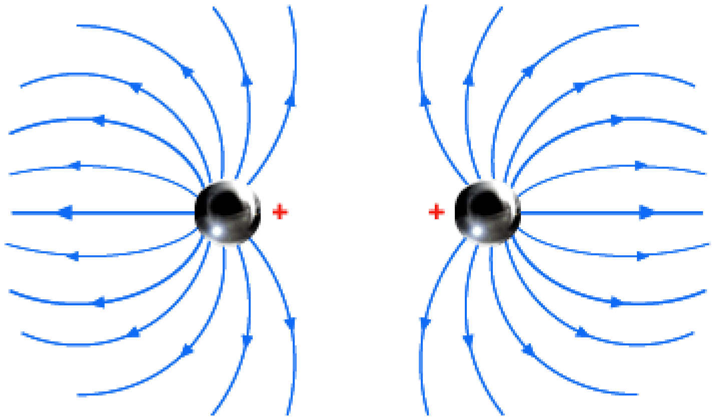


Figura 53

Uma propriedade importante – Duas linhas de força de um mesmo campo elétrlco nunca se cruzam. A demonstração dessa propriedade se faz por absurdo. Suponhamos que duas linhas de força (1) e (2) se cruzassem no ponto A (fig. 48). Como em cada ponto o vetor campo é tangente à linha de força, concluiríamos que existiria um vetor $\vec{E}_1$ tangente à linha de força (1), e um vetor $\vec{E}_2$ tangente à linha de força (2). Logo, no mesmo ponto A existiriam dois campos, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$. Mas, isso não pode acontecer, pois pela propriedade fundamental do campo elétrico, em cada ponto só existe um vetor campo, perfeitamente determinado em

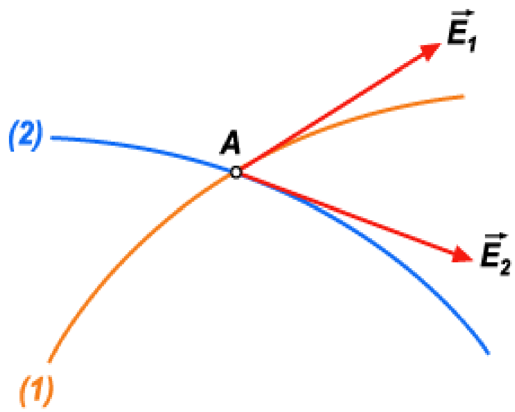


Figura 48

intensidade, direção e sentido.

Essa propriedade mostra então que, apesar de no campo elétrico existir uma infinidade de linhas de força, por cada ponto do campo passa uma e uma só linha de força.

Exemplos de linhas de força

1. Campo elétrico de uma só carga

Suponhamos o campo elétrico produzido por uma única carga elétrica. Vimos no tópico ***"Campo Newtoniano, ou Coulombiano"*** que o campo elétrico é coulombiano. Portanto, se colocarmos uma carga q num ponto A do campo da carga Q, a força $\vec{F}$ que atuará em Q e em q terá a direção da reta r que une as duas cargas (fig. 49). Como o vetor $\vec{E}$ no ponto A tem a mesma direção que a força $\vec{F}$, então $\vec{E}$ tem a direção da reta r. Isso, qualquer que seja o ponto A da reta r em que for colocada a carga q. Mas, se em todos os pontos da reta r os vetores $\vec{E}$ tem a própria direção da reta r, esta reta é tangente a todos esses vetores: logo, ela é uma linha de força.

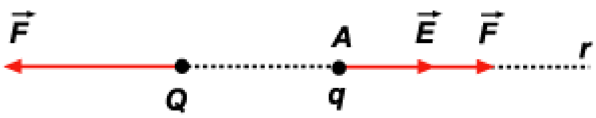
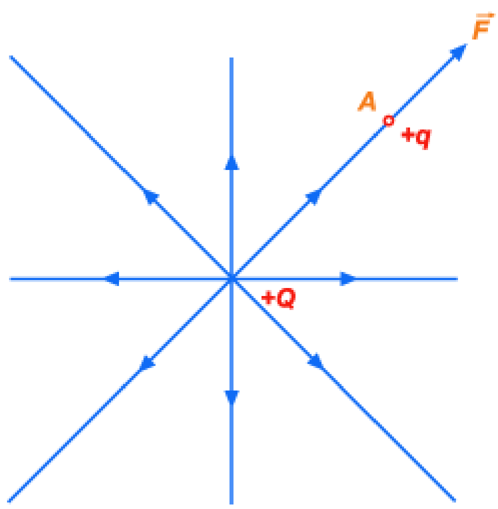


Figura 49

Concluímos que as linhas de força do campo elétrico produzido por uma só carga puntiforme são retas que passam por essa carga. Veja os exemplos das figuras abaixo.



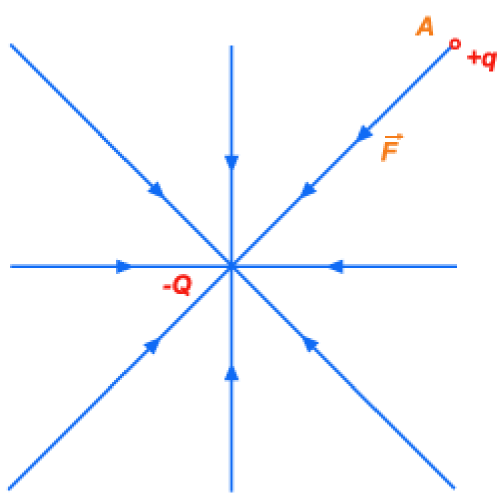


Figura 50 Figura 51

2. Campo de mais de uma carga

Quando o campo elétrico é produzido por mais que uma carga as linhas de força não são mais retas: são curvas. Como por exemplo:

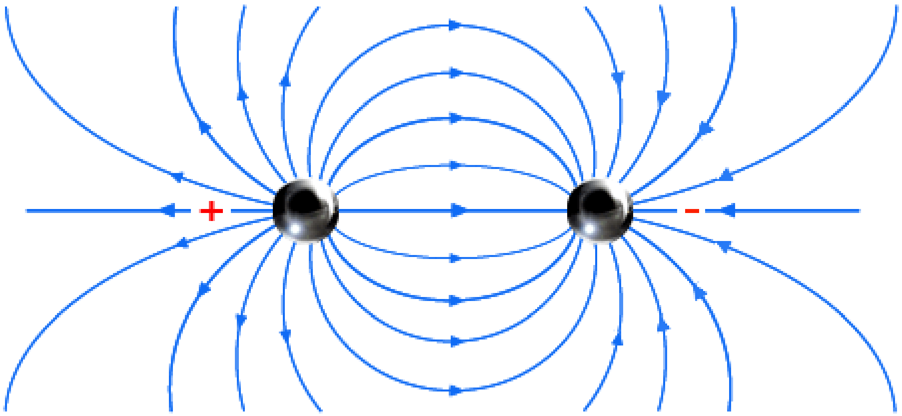


Figura 52

Sentido da linha de força

Atribuímos um sentido positivo de percurso a uma linha de força. Consideramos como positivo o sentido em que seria deslocada uma carga elétrica puntiforme positiva colocada sobre a linha. Na figura ao lado a carga puntiforme positiva q seria deslocada de A para B. Logo, esse é o sentido da linha de força.

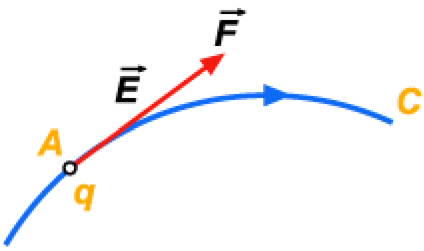


Figura 47

Autor: Roberto A. Salmeron

Vimos acima que, quando o campo é produzido por uma só carga puntiforme Q, as linhas de força são retas que passam por essa carga. Suponhamos que a carga Q que produz o campo seja positiva; então uma carga q positiva colocada no ponto A será repelida; logo, o sentido da linha de força é o sentido QA.

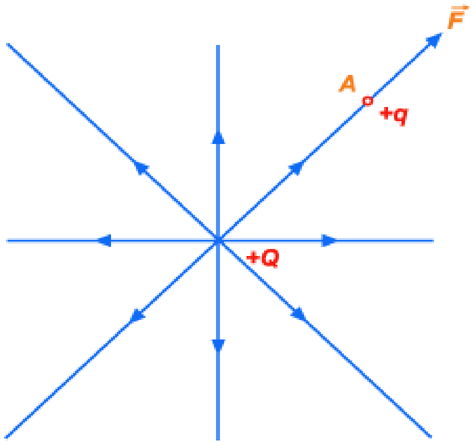


Figura 50

Suponhamos agora que a carga Q que produz o campo seja negativa; então uma carga q positiva, colocada no ponto A será atraída; logo, o sentido da linha de força é AQ. Costumamos exprimir esses fatos dizendo que quando Q é positiva as linhas de força "saem" da carga; e que, quando Q é negativa as linhas de força "entram" na carga.

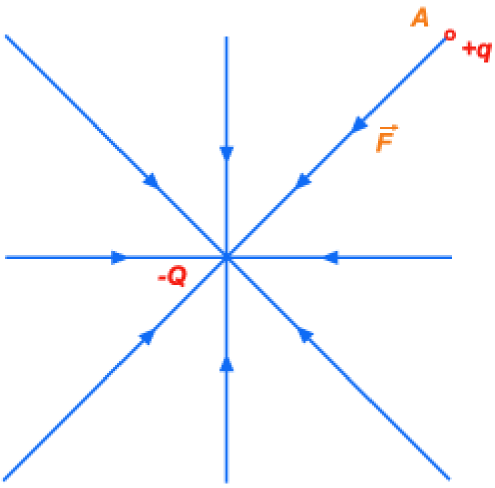


Figura 51

É fácil verificar que na figura a seguir o sentido das linhas de força é o que está assinalado.

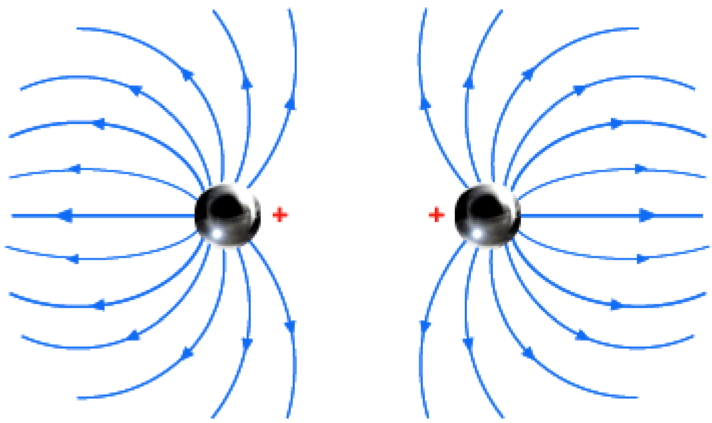


Figura 53

Autor: Roberto A. Salmeron

8: Campo elétrico uniforme

Definição

Chama-se campo elétrico uniforme àquele em que o vetor campo tem mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido em todos os pontos. Como as linhas de força de um campo são sempre tangentes ao vetor campo, concluímos que num campo uniforme as linhas de força são retas e paralelas.

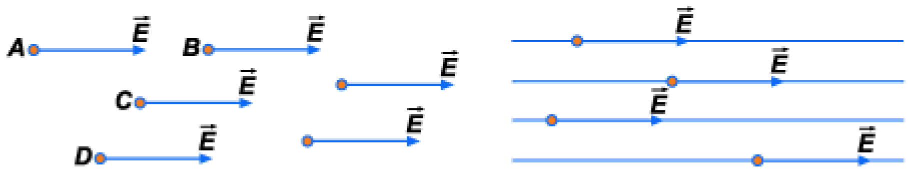


Figura 54

Exemplo – Suponhamos dois condutores planos, paralelos e próximos. Se eles forem carregados com cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos, o campo elétrico que se formará entre eles será uniforme. As linhas de força são paralelas entre sí e perpendiculares aos planos; apenas nos bordos o campo deixa de ser uniforme: as linhas de força se curvam, como mostra a figura 55.

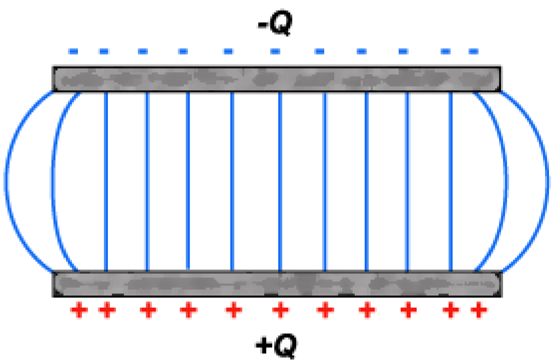


Figura 55

9: Tubo de força

Autor: Roberto A. Salmeron

Imaginemos em um campo elétrico uma linha fechada a, qualquer. Chama-se tubo de força ao conjunto de todas as linhas de força que passam pelos pontos da linha a (fig. 56).

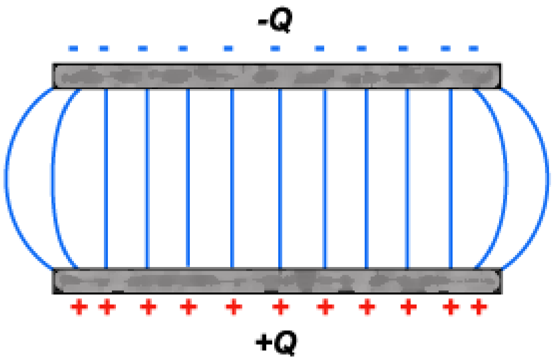


Figura 55

É evidente que em qualquer ponto do tubo de forças o campo $\vec{E}$ é tangente ao tubo, pois este é formado de linhas de forças.

10: Fluxo elétrico num campo uniforme

Nota: Antes de vermos a definição de fluxo elétrico, vejamos um problema de Mecânica.

Imaginemos que num canal de secção transversal constante esteja escoando água com velocidade constante $\vec{v}$. Consideremos uma secção qualquer plana de área S no canal. Calculemos o volume de água que passa por essa secção durante um segundo. Uma gota d'água que num instante qualquer está em S, depois de um segundo terá percorrido uma distância igual ao módulo da velocidade, $|\vec{v}|$. Então, o volume de água que passa por S em um segundo é o volume de um cilindro gerado por S se S deslocar-se paralelamente a sí mesmo de uma distância igual a $|\vec{v}|$.

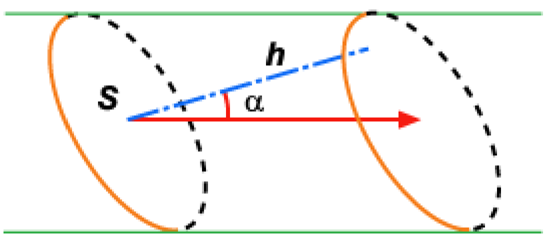


Figura 56-a

O volume desse cilindro é igual ao produto da área da base, S, pela altura h (perpendicular comum às bases)(fig. 56-a). Representaremos esse volume por ϕ:

$$\phi = S.h$$

Sendo o ângulo α que faz com $\vec{v}$, vemos pela figura que:

$$h = |\vec{v}| \cos\alpha$$

Substituindo em ϕ, teremos:

$$\phi = |\vec{v}|.S.\cos\alpha$$

Concluímos que o volume de água que atravessa a superfície de área num segundo é dado pelo produto do módulo da velocidade, pela área da superfície, pelo coseno do ângulo que a normal à superfície faz com a velocidade.

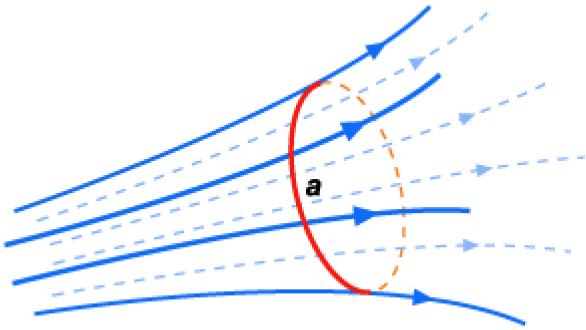


Figura 56

Esse volume é chamado vazão, ou fluxo de água que atravessa a superfície S.

Insistamos então no seguinte: o fluxo ϕ de água é dado pelo produto de três fatores: o módulo de uma grandeza vetorial (velocidade), uma área e um coseno. Essa expressão ϕ dada pela fórmula anterior é muito importante. Ela é importante sob o aspecto matemático porque se conhecermos certas propriedades da grandeza ϕ poderemos depois concluir propriedades da grandeza $\vec{v}$, e, como consequência, propriedades do movimento daquele líquido no canal.

Fluxo elétrico num campo uniforme

Suponhamos uma superfície plana de área colocada num campo elétrico uniforme de intensidade $|\vec{E}|$. Seja n a normal à superfície e α o ângulo que a normal faz com as linhas de força do campo (fig. 57).

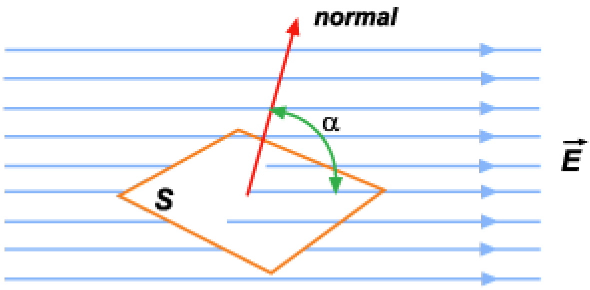


Figura 57

Por definição, chama-se fluxo elétrico que atravessa uma superfície plana colocada num campo elétrico uniforme ao produto da área da superfície, pelo módulo do campo, pelo coseno do ângulo que a normal à superfície faz com a direção do campo. Representaremos por $\vec{E}$:

$$\phi = \left|\vec{E}\right|.S.\cos\alpha$$

Vemos então que o fluxo elétrico é definido por analogia com o fluxo de água. Acontece, porém, que o fluxo de água tem um significado físico fácil de se compreender: representa um volume de água que passa por uma superfície em um segundo. Enquanto que, do fluxo elétrico, não podemos fazer uma imagem física: ele é simplesmente uma expressão matemática na qual aparece o vetor $\vec{E}$. Veremos exemplos da importância dessa grandeza nos tópicos "***Teorema de Coulomb***" e "***Campo Elétrico Criado por Condutor Esférico***", nos quais, aplicando propriedades de ϕ concluiremos propriedades do campo $\vec{E}$.

Quisemos colocar antes o exemplo do fluxo de água para que o leitor perceba bem que, embora o fluxo elétrico seja uma simples expressão matemática que muito nos auxilia, a sua definição foi copiada de uma fórmula que já existia, e que por sua vez surgiu com um problema físico muito simples (o problema de saber quanta água passa por uma secção de um canal). O leitor deve ficar sempre prevenido com as definições. Embora elas, em geral, sejam apresentadas sem maiores explicações, é preciso lembrar que qualquer definição tem sua origem física: não é um produto da imaginação.

Variação do fluxo

Em muitas questões interessa-nos saber se o fluxo que atravessa uma superfície varia ou não, e, no caso de variar, como varia. Pela própria definição de fluxo vemos que ele pode variar de três modos:

1º – variando o módulo campo $\vec{E}$;
2º – variando a área da superfície S;
3º – variando o ângulo α, isto é, a posição da superfície em relação ao campo.

Na prática se usa o terceiro processo, por ser mais simples: faz-se a superfície girar em torno de um eixo perpendicular ao campo para que haja variação da posição da superfície em relação ao campo.

Variação de Φ em função de α

Façamos a superfície dar uma volta completa em torno de um eixo perpendicular ao campo, partindo da posição em que $\alpha = 0^o$. Permanecendo constantes os valores de $\left|\vec{E}\right|$ $e\ S$, os valores do fluxo serão proporcionais aos de $\cos\alpha$. Durante essa variação do fluxo, poderemos considerar alguns casos particulares que nos interessam, e que estão assinalados nas figuras 58.

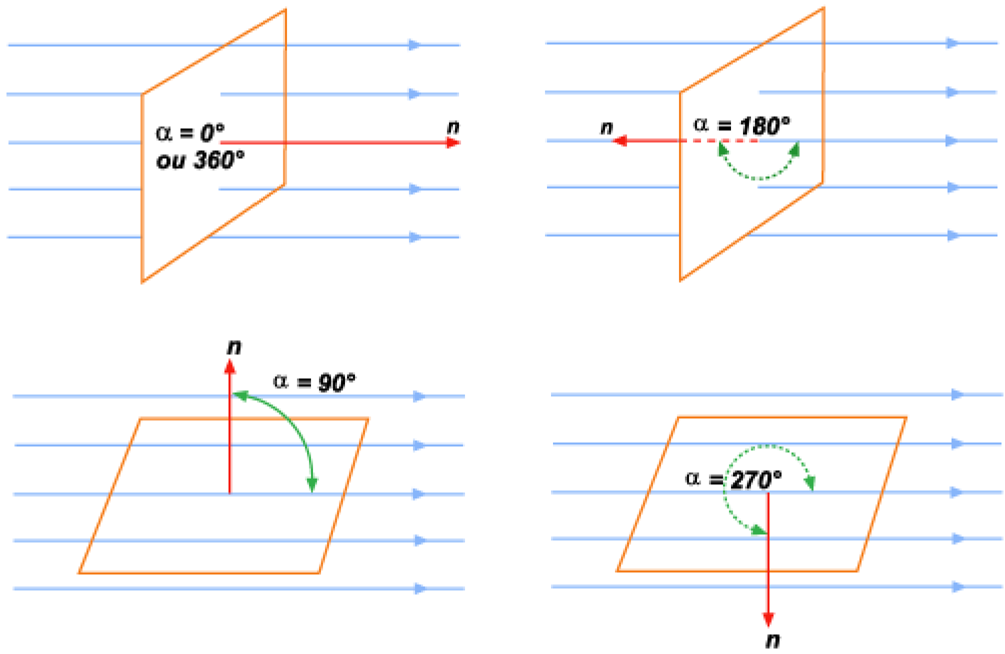


Figura 58

1º) $\alpha = 0^o$. A superfície é perpendicular ao campo. Neste caso, $\cos\alpha = \cos 0^o = 1$. Fica:

$$\phi = \left|\vec{E}\right|.S.1 \therefore$$

$$\phi_{max.} = \left|\vec{E}\right|.S$$

Como o valor +1 é o máximo do coseno, neste caso temos o máximo do fluxo.

2º) $\alpha = 90^o$. A superfície é paralela ao campo. Neste caso, $\cos\alpha = \cos 90^o = 0$. Fica:

$$\phi = \left|\vec{E}\right|.S.(0) \therefore$$

$$\phi = 0$$

3º) $\alpha = 180^o$. A superfície é novamente perpendicular ao campo, mas o fluxo penetra pela face oposta àquela por onde penetrava no 1º caso. Sendo $\cos\alpha = \cos 180^o = -1$, fica:

$$\phi = \left|\vec{E}\right|.S.(-1) = -\left|\vec{E}\right|.S$$

Ou

$$\phi = \phi_{\max}.$$

Vemos que, neste caso, o fluxo é o máximo com sinal negativo.

4º) $\alpha = 270^o$. A superfície é novamente paralela ao campo. Neste caso, $\cos\alpha = \cos 270^o = 0$. Fica:

$$\phi = \left|\vec{E}\right|.S.(0)$$

ou

$$\phi = 0$$

5º) $\alpha = 360^o$ é a mesma posição de $\alpha = 0^o$.

Representação gráfica – Fazendo uma representação gráfica do fluxo em função do ângulo α obtemos uma cosenoide, como indica a figura. Os máximos dessa cosenoide correspondem ao valor $\left|\vec{E}\right|.S$ do fluxo; os mínimos, ao valor $-\left|\vec{E}\right|.S$.

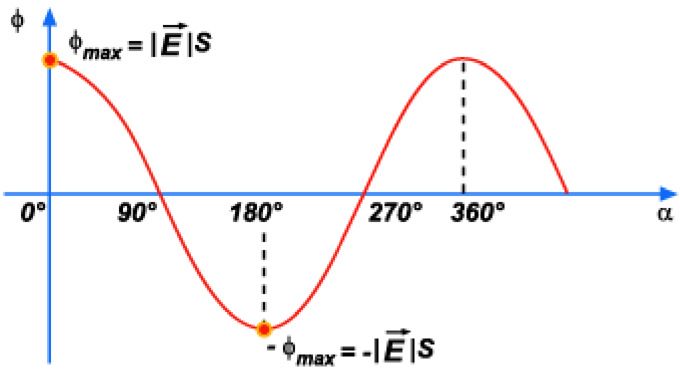


Figura 59

11: Unidades de fluxo elétrico

Autor: Roberto A. Salmeron

A unidade de fluxo é tirada da equação de definição: $\phi = \left|\vec{E}\right|.S.\cos\alpha$. Para defini-la devemos considerar: $\left|\vec{E}\right| = 1, S = 1$ e $\cos\alpha = 1$, portanto $\alpha = 0^o$. Caso em que a superfície é normal ao campo. Logo: a unidade de fluxo elétrico é o fluxo que atravessa uma superfície plana de unidade de área colocada perpendicularmente a um campo elétrico uniforme de unidade de intensidade.

a. Sistema CGSES

Devemos considerar: $\left|\vec{E}\right| = 1$ ues CGS $\left|\vec{E}\right|$, $S = 1cm^2$, $\cos\alpha = 1$, isto é, $\alpha = 0^o$, o que corresponde à superfície perpendicular ao campo. Resulta:

$$\phi = 1 \text{ ues CGS } \left|\vec{E}\right| 1cm^2 = 1 \text{ ues CGS}\phi$$

A unidade CGSES de fluxo elétrico é o fluxo elétrico que atravessa uma superfície plana de área um centímetro quadrado colocada perpendicularmente a um campo elétrico uniforme de intensidade uma CGS $\left|\vec{E}\right|$. Indica-se por ues CGSϕ.

b. Sistema MKS

Neste sistema é preciso fazer $\left|\vec{E}\right| = 1$ u MKS$\left|\vec{E}\right|$, $S = 1m^2$, $\cos\alpha = 1$, isto é, $\alpha = 0^o$, resulta:

$$\phi = 1 \text{ u MKS } \left|\vec{E}\right| 1m^2.1 = 1 \text{ u MKS}\phi$$

A unidade MKS de fluxo elétrico é o fluxo elétrico que atravessa uma superfície plana de área um metro quadrado colocada perpendicularmente a um campo elétrico uniforme de intensidade uma u MKS $\left|\vec{E}\right|$. Indica-se por u MKSϕ.

Relação entre as unidades

Sabemos que:

$$1 \text{ u MKS } \left|\vec{E}\right| = \frac{1}{3.10^4} \text{ues CGS } \left|\vec{E}\right|$$

$1m^2 = 10^4 cm^2$.

Então,

$$1\text{u MKS}\phi = 1\text{u MKS}\left|\vec{E}\right|.1m^2 = \frac{1}{3.10^4}\text{ues CGS } \left|\vec{E}\right|.10^4 cm^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\text{ues CGS } \left|\vec{E}\right| cm^2$$

Ou

$$1\text{u MKS}\phi = = \frac{1}{3}\text{ues CGS}\phi$$

12: Fluxo elétrico do campo produzido por carga puntiforme, através de superfície pequena

A definição de fluxo dada anteriormente, $\phi = \left|\vec{E}\right|.S.\cos.\alpha$, vale para um campo elétrico uniforme e uma superfície plana. Suponhamos agora uma carga elétrica Q puntiforme e uma superfície de área ΔS muito pequena, situada à distância R da carga Q (fig. 60). A superfície sendo muito pequena, podemos considerar o vetor campo $\vec{E}$ igual para todos os pontos da superfície, isto é, podemos considerar o campo uniforme em S. O módulo desse campo valerá:

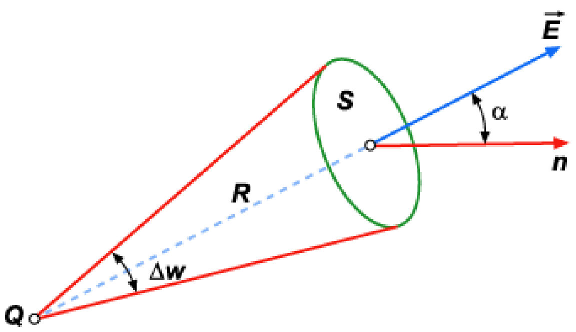


Figura 60

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}.\frac{Q}{R^2}$$

Sendo α o ângulo que a normal à superfície faz com a direção do campo, o fluxo que atravessa a superfície é:

$$\Delta\phi = \left|\vec{E}\right|.\Delta S.\cos\alpha, \text{ ou } \Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon}.\frac{|Q|.\Delta S.\cos\alpha}{R^2}$$

Mas, a superfície ΔS e o ponto ocupado pela carga Q determinam um ângulo sólido muito pequeno de valor $\Delta\omega$. Sabemos que, neste caso,

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S.\cos\alpha}{R^2}$$

Substituindo em $\Delta\phi$, temos:

$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon}.Q.\Delta\omega$$

13: Fluxo através de uma superfície fechada

Quando uma superfície fechada é considerada dentro de um campo elétrico, ela é atravessada por um fluxo, que deve sempre ser considerado com o seu sinal. Há diversas convenções para atribuirmos um sinal a esse fluxo. Adotaremos a seguinte: o fluxo será considerado positivo quando as linhas de força saem da superfície, e negativo, quando elas entram. Na figura 61, o fluxo que penetra pela face ABC da superfície fechada é negativo; o que sai pela face oposta é positivo.

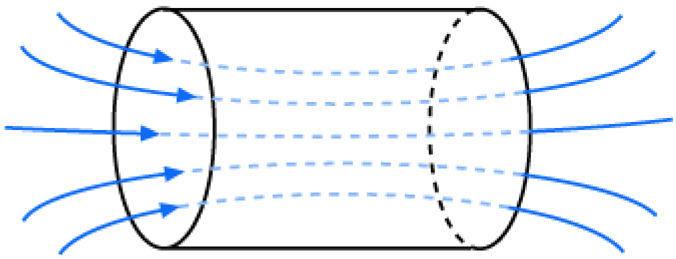


Figura 61

14: Teorema de Gauss

Este teorema se refere ao fluxo através de uma superfície fechada, no caso em que o campo elétrico é produzido por cargas colocadas no interior da superfície. Suponhamos inicialmente uma só carga Q puntiforme colocada dentro da superfície. Consideremos na superfície um elemento de área ΔS muito pequena. Esse elemento e o ponto ocupado por determinam um ângulo sólido $\Delta\omega$ também pequeno.

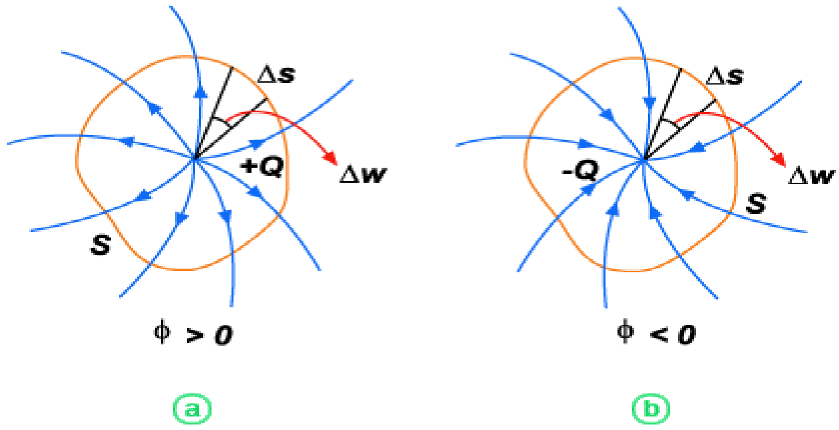


Figura 62

De acordo com o que vimos no tópico "***Fluxo Elétrico do Campo Produzido por Carga Puntiforme, Através de Superfície Pequena***", o elemento de superfície é atravessado por um fluxo cujo valor absoluto é:

$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon}.Q.\Delta\omega$$

O fluxo total, através de toda a superfície, valerá a soma de todos os fluxos $\Delta\phi$ considerados através de todos os elementos ΔS de superfície. Portanto,

$$|\phi| = \sum|\Delta\phi| = \sum\frac{1}{\varepsilon}|Q|\Delta\omega$$

Sendo $\frac{1}{\varepsilon}|Q|$ constante, podemos colocar em evidência:

$$|\phi| = \frac{1}{\varepsilon}|Q|\sum\Delta\omega$$

Mas, $\sum \Delta\omega$ representa o ângulo sólido total ao redor de um ponto. Então $\sum \Delta\omega = 4\pi$ esferadianos. Fica $|\phi| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi |Q|$

Essa igualdade foi demonstrada para valores absolutos. Provemos que o sinal do primeiro membro coincide sempre com o do segundo. Suponhamos Q positivo; então as linhas de força "saem" de Q, e, portanto, saem da superfície (fig. 62). Mas, nós convencionamos no parágrafo anterior que quando as linhas de força saem de uma superfície fechada o fluxo que atravessa a superfície seja positivo. Logo, quando Q é positivo, ϕ também é positivo.

De igual modo se prova que quando Q é negativo, ϕ também é negativo (fig. 62-b). Considerando os sinais de Q e de ϕ a última fórmula pode ser escrita:

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi Q$$

Teorema de Gauss

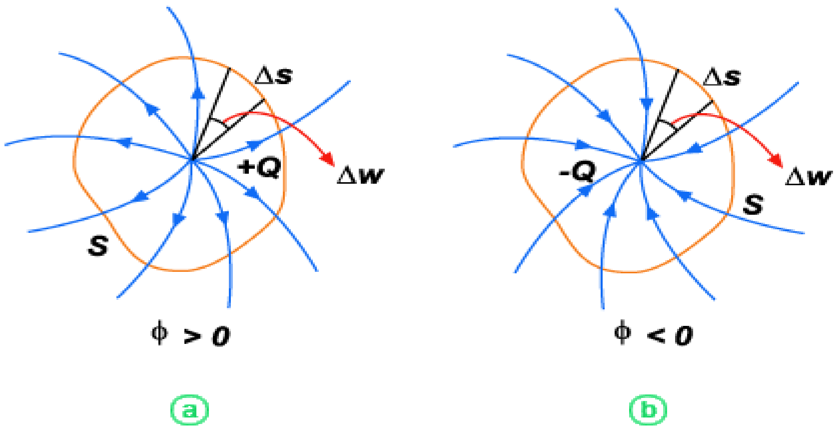


Figura 62

Suponhamos agora que, em vez de uma só carga $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, sejam colocadas no interior da superfície várias cargas. Cada uma delas produzirá um fluxo. O fluxo total será a soma algébrica dos fluxos que elas produzem separadamente:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi Q_1 + \frac{1}{\varepsilon} 4\pi Q_2 + \ldots + \frac{1}{\varepsilon} 4\pi Q_n$$

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \left(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n \right) \qquad \text{(soma algébrica)}$$

Ou

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \sum_{i=1}^{n} Q_1$$

onde $\sum_{i=1}^{n} Q_1$ representa a soma algébrica das cargas internas à superfície. O teorema de Gauss pode então ser enunciado da seguinte maneira: "o fluxo total através de uma superfície fechada, e produzido pelas cargas internas é igual ao produto de $\frac{1}{\varepsilon}.4\pi$ pela soma algébrica das cargas internas".

15: Campo no interior de um condutor

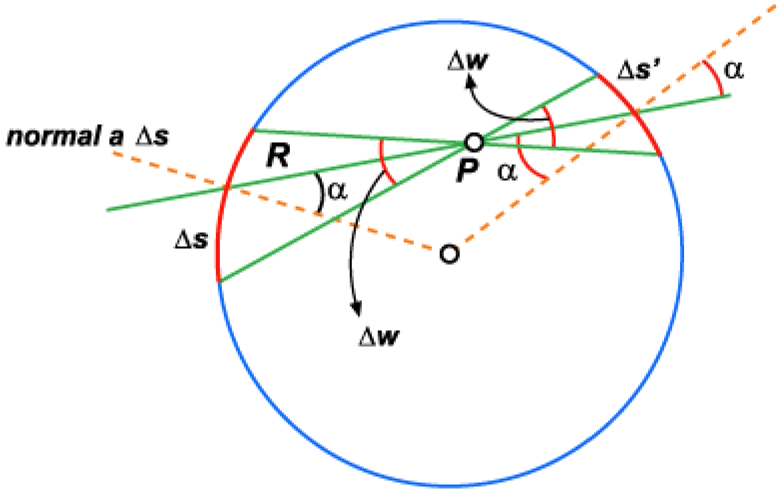
No interior de um condutor o campo elétrico é sempre nulo.

Faremos a demonstração para o caso particular de uma esfera eletrizada. Neste caso a demonstração é simples, porque uma esfera é sempre uniformemente eletrizada, isto é, a densidade elétrica superficial é constante.

Consideremos um elemento de superfície muito pequeno, de Área ΔS. Esse elemento contém uma carga elétrica ΔQ, que vale: $\Delta Q = \sigma \Delta S$, em que σ é a densidade elétrica da esfera. Em um ponto interno qualquer P a carga ΔQ produz um campo $\Delta \vec{E}$ cujo módulo vale (fórmula $\left| \vec{E} \right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{|Q|}{d^2}$).

$$\left|\Delta\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left|\Delta Q\right|}{R^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left|\sigma\right|\Delta S}{R^2}$$

em que R é à distância ΔS de ao ponto P.



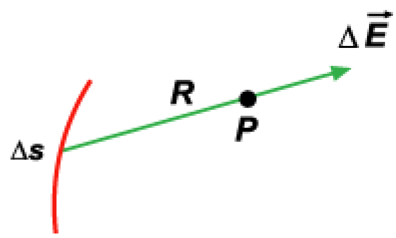


Figura 63

Mas, ΔS e o ponto P determinam um ângulo sólido $\Delta\omega$. Sendo o ângulo que a normal a ΔS faz com (a normal é o próprio raio da esfera), $\Delta\omega$ vale (fórmula na Introdução):

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S.\cos\alpha}{R^2}$$

de onde:

$$\frac{\Delta S}{R^2} = \frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}$$

Substituindo em $\left|\Delta\vec{E}\right|$, temos:

$$\left|\Delta\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left|\sigma\right|\Delta\omega}{\cos\alpha}$$

Os prolongamentos das semirretas que determinam formam um outro ângulo sólido, oposto pelo vértice de $\Delta\omega$, e, portanto, igual a $\Delta\omega$. Esse ângulo sólido determina, no outro lado da superfície esférica, um elemento de área $\Delta S'$, que dista de R' do ponto. A normal a $\Delta S'$ faz com R' um ângulo igual a α (esse ângulo vale α porque o triângulo ABO é isósceles). Podemos então escrever que:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S'.\cos\alpha}{R'^2}$$

de onde:

$$\frac{\Delta S'}{R'^2} = \frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}$$

Em $\Delta S'$ há uma carga elétrica $\Delta Q' = \sigma\Delta S'$. Essa carga produz em P um campo $\Delta\vec{E}'$, cujo módulo é:

$$\left|\Delta\vec{E}'\right| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left|\Delta Q'\right|}{R'^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left|\sigma\right|\left|\Delta S'\right|}{R'^2}$$

Ou

$$\left|\Delta\vec{E}'\right| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\left|\sigma\right|\Delta\omega}{\cos\alpha}$$

Comparando $\left|\Delta\vec{E}\right|$ com $\left|\Delta\vec{E}'\right|$ vemos que são iguais. E como os dois campos, $\Delta\vec{E}$ e $\Delta\vec{E}'$, tem mesma direção e sentidos opostos, eles se anulam. O mesmo raciocínio se aplica a qualquer outro elemento ΔS da superfície da esfera: sempre há um outro elemento $\Delta S'$ cujo campo anula o campo produzido por ΔS. Por causa disso o campo resultante em será nulo.

16: Teorema de Coulomb

Autor: Roberto A. Salmeron

Calculemos o campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto muito próximo da superfície de um condutor fechado. Consideremos um elemento de superfície do condutor de área e densidade elétrica. A carga elétrica contida em ΔS vale: $\Delta Q = \sigma \Delta S$.

Consideremos um cilindro determinado por:

a) o tubo de força determinado por ΔS;
b) um plano paralelo a ΔS e passando por ;
c) um plano paralelo a ΔS e interno ao condutor.

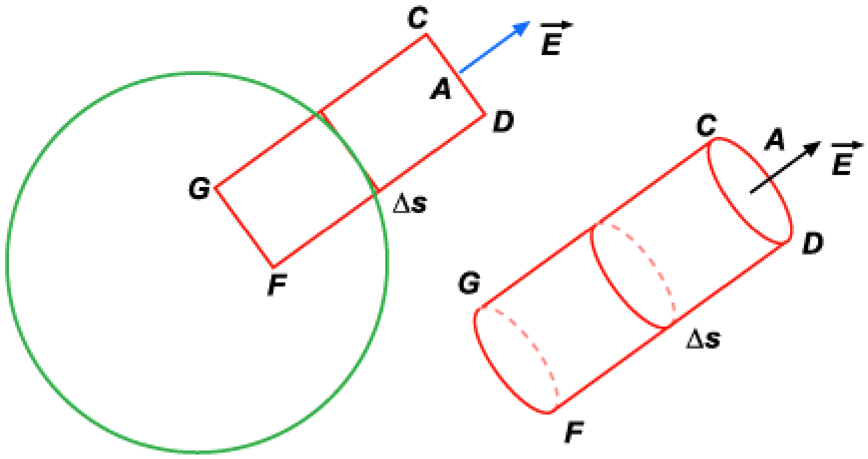


Figura 64

Esse cilindro é uma superfície fechada. Podemos então aplicar o teorema de Gauss, para o fluxo que atravessa a superfície do cilindro:

$$\phi_{total} = \frac{1}{\varepsilon}.4\pi \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Mas, dentro desse cilindro só existe ΔQ, contida em ΔS, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \Delta Q |\sigma| \Delta S$$

Então, em módulo:

$$\phi_{total} = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi |\sigma| \Delta S ...(*)$$

O fluxo total é a soma de três fluxos.

a) Fluxo através de CD. Sendo $\vec{E}$ o campo em A, esse fluxo vale: $\Delta S\left|\vec{E}\right|$.

b) Fluxo através de GF. É nulo, porque GF é interno ao condutor, e, no interior do condutor o campo é nulo.

c) Fluxo através da parede lateral do cilindro. É nulo, porque essa parede lateral é formada por linhas de força, que são tangentes ao campo. Então,

$$\phi_{total} = \Delta S\left|\vec{E}\right| + 0 + 0 = \Delta S\left|\vec{E}\right|$$

Comparando com (*), temos:

$$\Delta S\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\left|\sigma\right|\Delta S$$

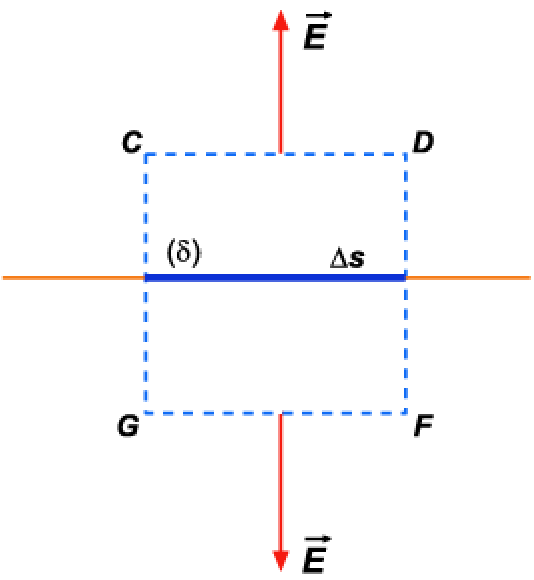
Ou

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\left|\sigma\right|$$

Essa expressão é o "teorema de Coulomb": a intensidade do campo elétrico em um ponto infinitamente próximo de um condutor fechado vale, em que σ é a densidade elétrica nos pontos do condutor próximos do ponto considerado.

17: Campo elétrico em um ponto próximo de um plano

Suponhamos um plano eletrizado com densidade σ, por exemplo, positiva. Para calcularmos o campo em um ponto muito próximo do plano, repetimos o raciocínio anterior. Consideramos o cilindro CDFG (fig. 45), idêntico ao do caso anterior. A única carga elétrica interna é a carga contida no elemento de superfície ΔS de valor $\Delta Q = \sigma\Delta S$. Pelo teorema de Gauss



$$\phi_{total} = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\left|\sigma\right|\Delta S$$

O fluxo total é a soma dos fluxos através das bases com o fluxo lateral, isto é, $\phi total = \phi CD + \phi FG + \phi lateral$. Pelo motivo já exposto, $\phi lateral = \phi$. O fluxo através de CD vale: $\phi CD = \left|\vec{E}\right| \Delta S$, e é positivo porque as linhas de força saem da superfície, desde que supusemos σ positivo. O fluxo através de FG também vale $\phi FG = \left|\vec{E}\right| \Delta S$, e é positivo, porque também sai da superfície. Logo,

Figura 65

$$\phi total = \left|\vec{E}\right| \Delta S + \left|\vec{E}\right| \Delta S + 0 = 2\left|\vec{E}\right| \Delta S$$

Substituindo na expressão do teorema de Gauss:

$$2\left|\vec{E}\right| \Delta S = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \left|\sigma\right| \Delta S$$

Ou

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} 2\pi \left|\sigma\right|$$

Esse é o valor da intensidade do campo em um ponto muito próximo de um plano eletrizado com densidade elétrica σ. Veremos uma aplicação muito importante desta fórmula no estudo dos condensadores planos (Capítulo V).

Nota: Tanto no caso de condutor plano, como no caso de condutor fechado, o sentido do vetor $\vec{E}$ é o seguinte: quando o condutor é eletrizado positivamente, é dirigido do condutor para for a $\vec{E}$; quando o condutor é eletrizado negativamente, $\vec{E}$ tem o sentido contrário, o que é fácil de concluir.

Autor: Roberto A. Salmeron

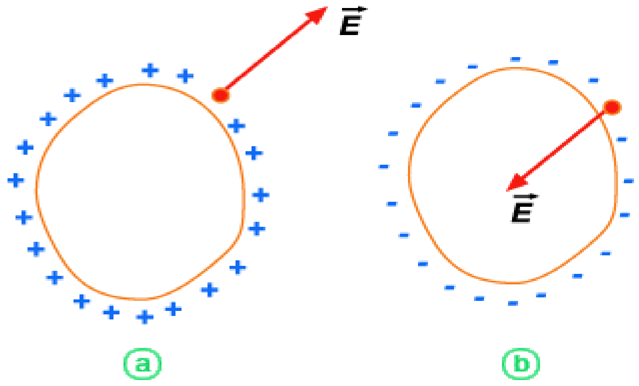


Figura 65

18: Tensão eletrostática

Consideremos na superfície de um condutor um elemento de área muito pequena. Nessa superfície haverá uma carga ΔQ de valor $\Delta Q = \sigma \Delta S$. O restante do condutor produz um campo elétrico, que chamaremos $\vec{E}_1$. A carga ΔQ, estando situada em um campo elétrico $\vec{E}_1$, fica sujeita a uma força $\vec{F} = \vec{E}_1 \Delta Q$. Chama-se tensão eletrostática em ΔS_1, ao quociente do módulo da força pela área ΔS:

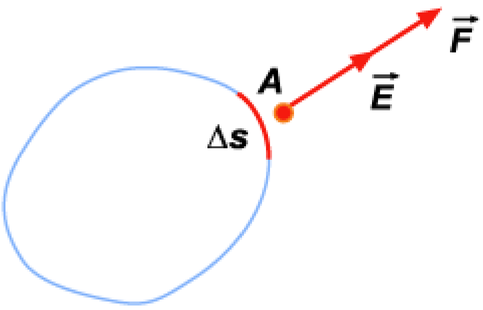


Figura 67

$$T = \frac{|\vec{F}|}{\Delta S} = \frac{|\vec{E}_1||\Delta Q|}{\Delta S} = |\vec{E}_1||\sigma|$$

Em um ponto muito próximo da parte central de ΔS a intensidade do campo é:

$$|\vec{E}_1| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\sigma$$

Esse campo é a soma de dois campos: um E_2, produzido pela carga Q contida em S, outro E_1, produzido pela carga contida no restante do condutor. A superfície S sendo muito pequena, pode ser considerada como plana. Logo, o campo que ela produz em tem a intensidade:

$$\left|\vec{E}_2\right| = \frac{1}{\varepsilon} 2\pi |\sigma|$$

Temos portanto:

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E}_1\right| + \left|\vec{E}_2\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}\right| - \left|\vec{E}_2\right| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi |\sigma| - \frac{1}{\varepsilon} 2\pi |\sigma|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| = \frac{1}{\varepsilon} 2\pi |\sigma|$$

Esse é o campo produzido pela parte restante do condutor em um ponto muito próximo de ΔS. Logo é também a intensidade do campo produzido em ΔS. Substituindo na expressão de T, fica:

$$T = \left|\vec{E}_1\right| |\sigma| = \frac{1}{\varepsilon} 2\pi |\sigma| |\sigma|$$

Essa é fórmula, que tínhamos mencionado no ***"Unidades de Densidade Elétrica"*** sem demonstrá-la. Observemos que a tensão eletrostática é proporcional ao quadrado da densidade elétrica superficial. Isso explica o poder das pontas σ, pois nas pontas é muito grande, como consequência a tensão eletrostática é grande, e então as cargas elétricas tem grande tendência de sair (veja ***"O Poder das Pontas"***).

19: Campo elétrico criado por condutor esférico

O teorema de Gauss e o de Coulomb são dois dos mais importantes da Eletricidade. Veremos agora uma aplicação interessante de ambos para o estudo do campo elétrico produzido por um condutor esférico. Seja uma esfera de raio R e carga Q (fig. 68). Um ponto pode ocupar, relativamente à esfera, três posições: ou é interno, ou pertence à esfera, ou é externo. Calculemos o campo elétrico em cada um desses casos.

Autor: Roberto A. Salmeron

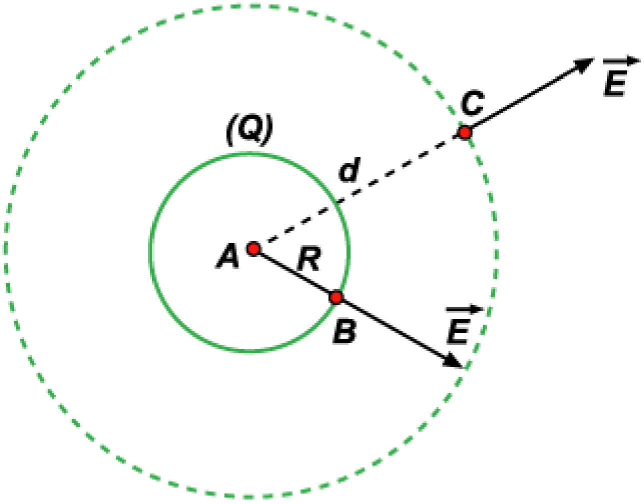


Figura 68

1º caso) Ponto A interno – Foi provado, no tópico ***"Campo no Interior de um Condutor"*** , que o campo é nulo neste ponto.

2º caso) Ponto B pertencente à esfera – Pelo teorema de Coulomb, em um ponto infinitamente próximo de um condutor fechado o campo vale :

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \left|\sigma\right|$$

Esse também é o campo em um ponto da própria superfície do condutor. Tratando-se de uma esfera, a área vale: $S = 4\pi R^2$. Então:

$$\left|\sigma\right| = \frac{\left|Q\right|}{S} = \frac{\left|Q\right|}{4\pi R^2}$$

Fica:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \frac{\left|Q\right|}{4\pi R^2} \text{ ou } \left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\left|Q\right|}{R^2}$$

3º caso) Ponto C externo – Seja d a distância de C ao centro da esfera. Consideremos uma superfície esférica imaginária de raio d concêntrica à esfera de raio R. Como há uma simetria, o campo elétrico em todos os pontos dessa superfície tem o mesmo módulo $\left|\vec{E}\right|$. O fluxo através dessa superfície é então, em módulo:

$$\left|\phi\right| = S\left|\vec{E}\right|$$

Mas, $S = 4\pi R^2$. Então:

$$|\phi| = 4\pi d^2 \left|\vec{E}\right|$$

A carga Q, que se encontra distribuída sobre a esfera de raio R, é interna a essa esfera de raio d. Aplicando o teorema de Gauss para o fluxo que atravessa a superfície imaginária, temos:

$$|\phi| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \sum Q_1 = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi |Q|$$

Então:

$$4\pi d^2 \left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi |Q|$$

de onde:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{|Q|}{d^2}$$

As expressões $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{|Q|}{R^2}$ e $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{|Q|}{d^2}$ mostram que o campo produzido na superfície ou num ponto externo de uma esfera pode ser calculado admitindo-se que a carga da esfera seja puntiforme e colocada no centro da esfera, em vez de estar distribuída pela superfície. Pois essas expressões dão o módulo do campo produzido por uma carga puntiforme Q, num meio de constante dielétrica ε, em pontos situados, respectivamente, às distâncias R e d (veja fórmula $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{|Q|}{d^2}$).

20: Trabalho no campo elétrico

Calculemos o trabalho realizado durante o deslocamento de uma carga dentro de um campo elétrico. Seja o campo elétrico produzido pela carga elétrica puntiforme Q. Uma outra carga puntiforme q, colocada no campo, ficará sujeita a uma força $\vec{F}$. Se nada impedir, essa força $\vec{F}$ deslocará a carga q e realizará então um trabalho. Calculemos o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ para um deslocamento de q até de A um ponto B (fig. 69). Imaginemos sempre a carga q suficientemente pequena para não alterar o campo de Q. Quando a carga q está em A a força vale:

$$F = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Qq}{d^2}$$

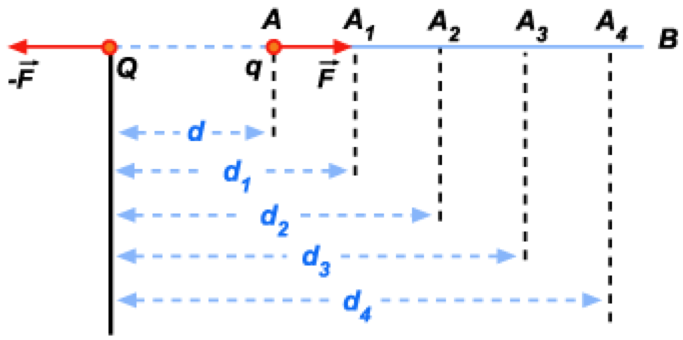


Figura 69

Mas, à medida que a carga é deslocada, a distância d varia, e a força também. Não podemos calcular elementarmente o trabalho realizado por uma força variável. Por causa disso vamos decompor a trajetória AB em número muito grande de partes $AA_1, A_1A_2, A_2, A_3, etc.,$ sendo essas partes suficientemente pequenas para que possamos admitir a força como constante dentro de cada uma delas. Assim, entre A e A_1 admitamos a força constante e com valor que ela possui em A. O trabalho realizado entre A e A_1 será:

$$\tau AA_1 = FAA_1$$

Sendo d_1 a distância de A_1 à carga Q, temos $AA_1 = d_1 = -d$. Substituindo os valores de F e AA_1 em τAA_1, fica:

$$\tau AA_1 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Qq}{d^2}(d_1 - d)$$

$$\tau AA_1 = \frac{1}{\varepsilon}Qq\left(\frac{d_1 - d}{d^2}\right)$$

Como admitimos A e A_1 muito próximos, as distâncias de d_1 são quase iguais. Podemos então fazer $d^2 \cong dd_1$ e substituir, na equação de τAA_1 o valor d^2 pelo produto dd_1.

Fica:

$$\tau AA_1 = \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{d_1 - d}{d^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{d_1}{dd_1} - \frac{d}{dd_1}\right)$$

ou

$$\tau AA_1 = \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{1}{d} - \frac{d}{d_1}\right)$$

Chamamos $d_2, d_3, ..., d_n$ respectivamente às distâncias dos pontos $A_2, A_3, ...B$ até a carga, e repetindo o raciocínio para os trabalhos realizados nos trechos $A_1A_2, A_2A_3 ... A_{n-1}B$ encontraremos as seguintes expressões para esses trabalhos:

$$\tau_{A_1A_2} = \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) ...$$

$$\tau_{A_2A_3} = \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3}\right) ...$$

$$\tau_{A_{n-1}B} = \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{1}{d_{n-1}} - \frac{1}{d_n}\right) ...$$

O trabalho total entre A e B é a soma desses trabalhos parciais:

$$\tau_{AB=} \tau_{AA_1} + \tau_{A_1A_2} + \tau_{A_2A_3} + ... + \tau_{A_{n-1}B}$$

Somando membro a membro as expressões (1), (2), (3), (4) e colocando em evidência $\frac{1}{\varepsilon}.Qq$, temos:

$$\tau_{AB=} \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} + ... + \frac{1}{d_{n-1}} - \frac{1}{d_n}\right)$$

$$\tau_{AB=} \frac{1}{\varepsilon} Qq\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_n}\right)$$

ou

$$\tau_{AB=}q\left(\frac{1}{\varepsilon}.\frac{Q}{d}-\frac{1}{\varepsilon}.\frac{Q}{d_n}\right)$$

21: Conceito de potencial

Suponhamos que o ponto esteja infinitamente afastado, isto é, tende para o infinito. A expressão que calculamos dará então o trabalho que a força eletrostática F realiza para deslocar a carga puntiforme q do ponto A ao infinito. Nesse caso,

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d_n}$$

se anula, e resulta:

$$\tau_{A_\infty}=q\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$$

Como as expressões $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$ e $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d_n}$ tem o mesmo sinal, quando $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d_n}$ é nulo a diferença entre elas é máxima. Isso corresponde ao caso

Conceito de potencial

que estamos examinando. Concluímos que o trabalho realizado quando a carga q é deslocada do ponto A ao infinito é o máximo trabalho que se pode obter a partir do ponto A. Esse trabalho máximo representa a energia potencial da carga q quando ela é colocada em A, pois a energia potencial em certa posição representa o máximo trabalho que se pode extrair a partir dessa posição. Concluímos que a expressão da energia potencial da carga puntiforme q, quando ela está no ponto A, é:

$$E_{pot}=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}q$$

considerando a carga como a unidade de carga, a energia potencial dessa unidade de carga será então numericamente igual a $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$. Significa que o número que mede o produto $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$ é o mesmo número que mede a energia potencial da unidade de carga. Por causa disso, a expressão A é chamada potencial do ponto $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$. Podemos então dar a seguinte definição: dada uma carga elétrica puntiforme Q em um meio de constante dielétrica ε, chama-se potencial de um ponto situado à distância d da carga, ao produto

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$$

Em Física, dizemos que uma grandeza é infinitamente grande quando ela é muito grande em relação ao problema considerado. Assim, dizer que d_n tende para o infinito significa que é uma distância muito grande em relação à extensão do campo elétrico da carga Q. Por exemplo, suponhamos que o campo elétrico da carga Q termine a 5 centímetros dessa carga. Então todos os pontos que distam de aproximadamente 5 centímetros da carga Q são pontos infinitamente afastados da carga, se os considerarmos como pontos do campo elétrico dessa carga. Embora em outros problemas a distância de 5 centímetros possa ser muito pequena, no caso do campo elétrico citado ela não é pequena. Em resumo, pontos infinitamente afastados de uma carga elétrica são pontos que estão nos fins do campo dessa carga.

Fazendo um resumo do que dissemos acima sobre potencial, podemos dizer o seguinte: o potencial de um ponto de um campo elétrico é a energia potencial da unidade de carga colocada nesse ponto. Ou, em outras palavras: é o trabalho realizado pela força eletrostática quando desloca a unidade de carga desse ponto ao fim do campo.

Em geral representamos o potencial pela letra v.

Na fórmula $\tau_{AB} = q\left(\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d_n}\right)$ que dá τ_{AB}, temos:

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$$

é o potencial do ponto A, que chamaremos V_A;

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d_n}$$

é o potencial do ponto B, que chamaremos V_B.

A fórmula $\tau_{AB} = q\left(\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d_n}\right)$ pode então ser escrita:

$$\tau_{AB} = q\left(V_A - V_B\right)$$

Essa fórmula exprime o seguinte teorema: "o trabalho realizado pela força eletrostática quando desloca uma carga elétrica puntiforme entre dois pontos de um campo elétrico é igual ao produto da carga pela diferença de potencial entre os dois pontos".

Observações

1a) O potencial definido pela expressão $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$ é uma grandeza algébrica: pode ser positivo ou negativo. Sempre tem o sinal da carga Q.

2a) A expressão $V = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$ mostra que, para o mesmo ambiente (mesmo ε) e mesma carga Q, o potencial do ponto depende unicamente de d, isto é, da posição do ponto. Por isso dizemos que o potencial é uma função de ponto, ou função de posição.

3a) Observemos que o potencial é inversamente proporcional à constante dielétrica do meio.

4a) O potencial do ponto vale $V = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$. O valor absoluto do potencial será: $V = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d}$. O módulo do campo no ponto vale: $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{d^2}$. Comparando as duas expressões concluímos que:

$$V = \left|\vec{E}\right| d$$

Campo criado por várias cargas elétricas puntiformes

Suponhamos o campo elétrico criado pelas cargas puntiformes $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ (fig. 70) e um ponto A situado às distâncias $d_1, d_2, ..., d_n$ dessas cargas. Chama-se potencial do ponto A, por definição, à soma algébrica dos potenciais que as cargas produzem separadamente em A. Isto é, por definição:

$$V = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q_1}{d_1} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q_2}{d_2} + ... + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q_2}{d_n} (\text{soma algébrica})$$

Ou

$$V = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2} + ... + \frac{Q_n}{d_n}\right)(\text{soma algébrica})$$

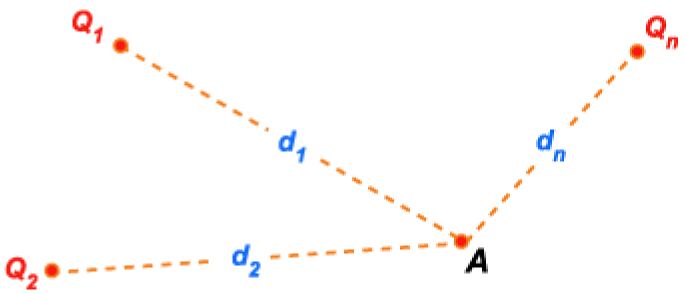


Figura 70

22: Unidades de diferença de potencial

a. Sistema CGSES

Neste sistema, a unidade de diferença de potencial é obtida a partir da expressão $V_A - V_B = \frac{\tau}{q}$. A unidade de trabalho adotada neste sistema é o erg.

Portanto, devemos fazer:

$$\tau = 1erg \text{ e } q = 1statcoulomb$$

Resulta:

$$V_A - V_B = \frac{1 erg}{1 statcoulomb} = 1 \text{ ues CGsv ou statvolt}$$

“A unidade de diferença de potencial no sistema CGSES é a diferença de potencial existente entre dois pontos tais que a força eletrostática, deslocando a carga de um statcoulomb de um ponto a outro, realiza o trabalho de um erg”. Chama-se statvolt (símbolo, statv), ou unidade CGSES de diferença de potencial (CGS V, ou u CGSES V).

b. Sistema MKS

Pela estruturação que o sistema MKS possui atualmente, a sua unidade de diferença de potencial também é derivada a partir da fórmula $V_A - V_B = \frac{\tau}{q}$ (veja tópico ***"A Formação do Sistema MKS em Eletricidade"***).

Considerando-se:

$$\tau = 1 joule \text{ e } q = 1 coulomb$$

,

resulta:

$$V_A - V_B = \frac{1 joule}{1 coulomb} = 1 volt$$

(símbolo V, ou v)

“Um volt é a diferença de potencial existente entre dois pontos quando o trabalho realizado pelo campo eletrostático para deslocar um coulomb de um ponto a outro é de um joule.”

Prove o leitor que (veja ***"A Formação do Sistema MKS em Eletricidade"***):

$$1 statvolt = 300 volts$$

23: Superfície equipotencial

Superfície equipotencial é uma superfície cujos pontos têm todos o mesmo potencial.

Uma carga elétrica , abandonada em um campo elétrico, nunca é deslocada ao longo de uma superfície equipotencial. Porque, quando a carga é deslocada de um ponto A a um ponto B, o trabalho realizado vale:

$$\tau_{AB} = q\left(V_A - V_B\right).$$

Numa superfície $V_A = V_B$ equipotencial resulta, $\tau_{AB} = 0$, isto é, não há trabalho sobre a superfície equipotencial.

Quando um condutor está eletrizado e a carga elétrica está em equilíbrio na superfície de um condutor, essa superfície é equipotencial. Pois, se não o fosse, a carga não estaria em equilíbrio, mas, em deslocamento.

24: Teorema

"As linhas de força de um campo elétrico são normais às superfícies equipotenciais desse campo."

Suponhamos que uma linha de força qualquer ℓ não fosse perpendicular a uma superfície equipotencial S (fig. 71). Nesse caso, como o vetor campo $\vec{E}$ é tangente à linha de força, ele também não seria perpendicular à superfície, e no ponto A ele poderia ser decomposto em dois: um tangente à superfície, $\vec{E}_t$, outro normal à superfície $\vec{E}_n$. Uma carga elétrica puntiforme q colocada no ponto A ficaria então sujeita a duas forças: uma tangente à superfície, valendo

$$\vec{F}_t = q\vec{E}_t$$

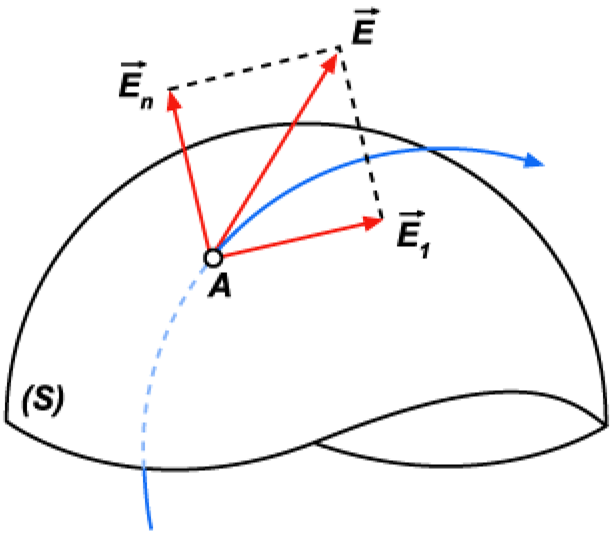


Figura 71

outra normal à superfície, valendo

$$\vec{F}_n = q\vec{E}_n$$

A força tangente produziria um deslocamento da carga ao longo da tangente, isto é, ao longo da superfície S. Mas, como a superfície é equipotencial, isso não é possível. Logo também não é possível a decomposição do vetor $\vec{E}$ em $\vec{E}_n$ e $\vec{E}_t$. Isto é, não há componente tangencial desse vetor, ele é normal à superfície. E, como a linha de força é tangente a $\vec{E}$, ela também é normal à superfície.

25: Observações

Relativamente ao campo elétrico existem duas proposições que somente enunciaremos, sem demonstrar, porque a demonstração não pode ser feita por álgebra elementar.

1ª) "O trabalho realizado no deslocamento de uma carga elétrica entre dois pontos de um campo elétrico só depende da posição dos dois pontos, e não depende da trajetória." Assim, o trabalho para transportar uma carga de A a B pela trajetória a é o mesmo que para transportar pela trajetória b (fig. 72).

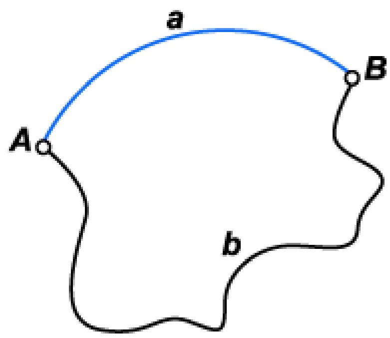


Figura 72

2ª) "O potencial dos pontos internos de um condutor eletrizado é o mesmo dos pontos da superfície." Por exemplo, vimos no tópico **"_Campo Elétrico Criado por Condutor Esférico_"**, que o campo produzido por uma esfera, pode ser calculado admitindo-se a carga colocada no centro da esfera. O potencial de um ponto da esfera será de acordo com a definição de potencial (tópico **"_Conceito de Potencial_"**)

$$V = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{R}$$

Esse é também o potencial dos pontos internos da esfera.

26: Anteparos eletrostáticos, ou blindagens eletrostácas - gaiola de Faraday

Autor: Roberto A. Salmeron

Vimos no tópico ***"Experiências"***, que a carga elétrica de um condutor se distribui pela superfície externa. No tópico ***"Campo no Interior de um Condutor"***provamos que o campo elétrico no interior de um condutor é nulo. Esses fatos indicam que um campo elétrico nunca penetra num espaço completamente envolvido por condutor. Qualquer corpo A colocado no interior de um condutor ôco B (fig. 73) não sofre ação de campos elétricos externos. O condutor ôco faz uma blindagem ao campo eletrostático.

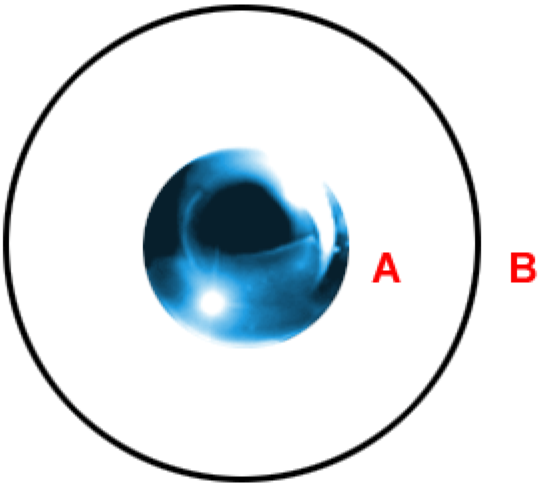


Figura 73

Esse fato é usado na prática para a proteção de instrumentos elétricos sensíveis contra a influência de campos elétricos externos. Encerra-se o instrumento em uma caixa metálica ligada à terra.

Uma experiência ilustrativa e simples pode ser feita com a gaiola de Faraday. Um pêndulo elétrico neutro é colocado sobre um prato metálico ligado à terra. Aproximando-se do pêndulo um corpo carregado A, o pêndulo é eletrizado por indução e é atraído (fig. 74-a). Depois se cobre o pêndulo com uma gaiola. Aproximando-se o corpo eletrizado, agora o pêndulo não se eletriza e não se move, por mais finos que sejam os arames da gaiola (fig. 74-b). Vemos que o campo elétrico não penetra no espaço envolvido por um condutor, mesmo quando a superfície desse condutor é descontínua.

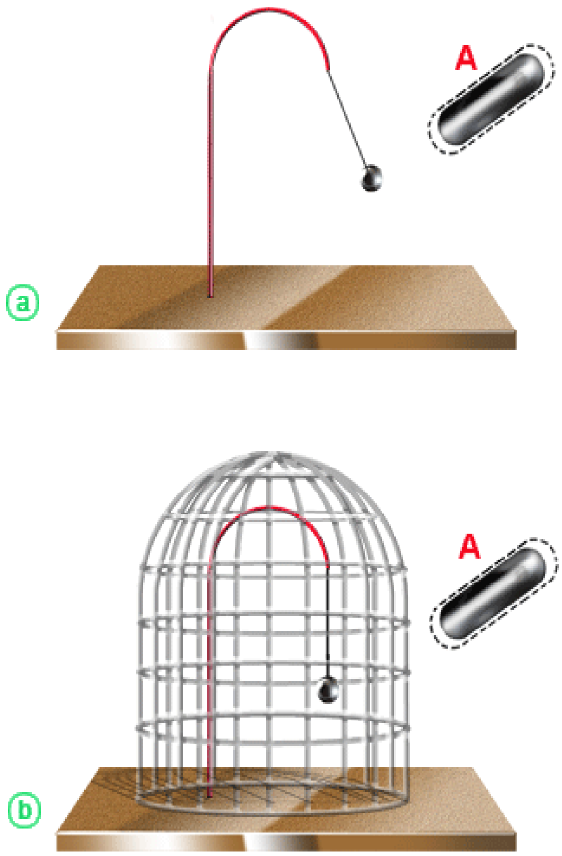


Figura 74

Se o condutor estiver isolado, podemos carregá-lo tão intensamente quanto quisermos, mas o campo não penetrará na região que ele envolve.

Faraday realizou essas experiências no ano de 1836. Para demonstrar indubitavelmente o fato, fez o seguinte: construiu uma caixa de dimensões tais que ele coubesse dentro dela. Revestiu-a de material condutor, e isolou-a da terra. Entrou na caixa com um eletroscópio. Mandou carregar a caixa com descargas elétricas intensas. O eletroscópio, no interior da caixa, não acusou a presença de nenhum campo elétrico, e o próprio Faraday nada sentiu.

Nota: Depois de ter estudado todo este Capítulo III, o leitor pode concluir como é importante em Eletrostática a noção de densidade elétrica superficial.

27: Nota histórica

Michael Faraday (1791 – 1867), inglês, foi um dos maiores físicos que já existiram. Iniciou seus trabalhos científicos em Química, onde fez muitas descobertas. Dedicou-se depois à Física, interessando-se por Ótica, Acústica e Eletricidade. As idéias fundamentais que temos hoje em Eletricidade e Magnetismo foram introduzidas por Faraday. Assim, foi ele quem fez a importantíssima descoberta da existência do campo elétrico. Descoberta essa

Figura de Michael Faraday

fundamental, porque todas as ações de uma carga elétrica se fazem através de seu campo, desde um simples caso de atração de outra carga, até as ondas de rádio e de radar. Antes de Faraday os físicos pensavam que as forças eletrostáticas se exercessem diretamente entre as cargas, "à distância", sem considerarem o meio interposto. Fez descobertas em dielétricos, condensadores, indução eletrostática, condução de eletricidade pelos líquidos e em eletromagnetismo. Inventou o primeiro motor elétrico.

Faraday era filho de um ferrador de cavalos. Quando menino, trabalhou inicialmente vendendo jornais, e depois como encadernador de livros. Lia sempre as obras que lhe davam para encadernar. Dois livros tiveram muita influência em sua vida: um de Química, e a Enciclopédia Britânica. Passou a repetir em sua casa, com os mais rudimentares recursos, as experiências que lia. Quando teve oportunidade de trabalhar num laboratório, ali permaneceu mais de 50 anos, dos quais 46 anos vivendo no mesmo prédio. É um dos grandes exemplos de que a produção científica resulta de um trabalho metódico, e constante, e não de inspirações instantâneas.