06 – Ondas Estacionárias

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 6.1

Encontre as soluções estacionárias para uma corda presa a uma parede em $x = 0$ e livre para correr ao longo de um poste em $x = L$.

Resolução:

As condições de contorno são:

$$y(0,t) = 0 \qquad (6.01.1)$$

e

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \qquad (6.01.2)$$

As condições de contorno não afetam a solução temporal, que ainda é dada pelas equações $X(x) = \cos(kx)$ e $X(x) = sen(kx)$. A condição em $x = 0$ é consistente com a equação:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

mas a condição em $x = L$ exige que $X(x)$ tenha um anti-nó naquele ponto. Assim, os valores permitidos para k são:

$$k = k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (6.01.3)$$

e as frequências correspondentes são:

$$\omega_n = v\frac{(2n+1)\pi}{2L}.$$

Exercício Resolvido 6.2

Encontre as soluções estacionárias para uma corda livre para correr ao longo de postes em $x = 0$ e $x = L$.

Resolução:

As condições de contorno são:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (6.01.1)$$

e

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \qquad (6.01.2)$$

As condições de contorno não afetam a solução temporal, que ainda é dada pelas equações $X(x) = \cos(kx)$ e $X(x) = sen(kx)$, mas exigem que $X(x)$ possua anti-nós em $x = 0$ e $x = L$. Assim, a função espacial tem a forma:

$$X(x) = \cos(kx)$$

onde:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (6.01.3)$$

e as frequências correspondentes são:

$$\omega_n = v\frac{n\pi}{L}$$

Exercício Resolvido 6.3

Uma corda de violão tem comprimento $\Delta L = 0{,}65\,m$ e massa $\Delta m = 5.9\times 10^{-4}\,kg$. Se a cravelha for girada até a tensão ser $53.8\,N$, qual será a menor frequência (em Hz) emitida pela vibração da corda?

Resolução:

A corda está presa nas duas extremidades. Obedece, portanto, às condições de contorno $y(0,t) = y(L,t) = 0$. A menor frequência corresponde ao menor número de onda, $k_1 = \pi / L$ de acordo com a equação:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

O comprimento da corda é a separação entre as travas, igual a $0{,}65\,m$ segundo o enunciado. Podemos concluir que $k_1 = 4.83 m^{-1}$.

A velocidade da onda na corda é:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 243 m / s \qquad (6.03.1)$$

A frequência é, portanto, $f_1 = \omega_1 / (2\pi) = (vk_1)/(2\pi) = 187\,Hz$.

Exercício Resolvido 6.4

A segunda frequência, em ordem crescente, emitida por um instrumento musical é conhecida como primeiro harmônico. Calcule a frequência do primeiro harmônico no exercício 6.3.

Resolução:

Neste caso, estamos interessados no número de onda $k_2 = 2\pi / L = 9.66 m^{-1}$. A velocidade foi calculada no exercício 6.3. A frequência é o dobro de f_1 : $f_2 = (v * k_2)/(2\pi) = 374\,Hz$.

O ouvido humano percebe a frequência do primeiro harmônico como exatamente uma escala acima de f_1, que é conhecida como frequência *fundamental*.

Exercício Resolvido 6.5

As ondas numa membrana retangular correm com velocidade $v = 100\,m/s$. O lado maior da membrana mede $2\,m$, e o menor, $1\,m$. Encontre a frequência fundamental e as do primeiro e segundo harmônicos.

Resolução:

As frequências são dadas pela equação $\omega_{mn} = v\sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2}$, que pode ser escrita na seguinte forma, mais conveniente:

$$\omega_{mn} = \pi v\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \qquad (6.05.1)$$

ou, se substituirmos os valores no enunciado,

$$\omega_{mn} = 50\pi\sqrt{n^2 + 4m^2} \qquad (6.05.2)$$

As frequências crescem à medida que m e n crescem. A menor frequência é obtida com $m = n = 1$:

$$\omega_{11} = 50\pi\sqrt{5}rad/s \qquad (6.05.3)$$

Para obter a segunda frequência, precisamos incrementar n e manter m fixo, porque aumentar m faz a frequência crescer mais rapidamente do que aumentar n:

$$\omega_{12} = 100\pi\sqrt{2}rad/s.$$

Para obter a terceira frequência, precisamos comparar $n = 3$, $m = 1$, que dá:

$$\omega_{13} = 50\pi\sqrt{13}rad/s \qquad (6.05.4)$$

com $n = 1$, $m = 2$, que dá $\omega_{22} = 50\pi\sqrt{20}$ Claramente, a mais baixa é ω_{13}.

Exercício Resolvido 6.6

Mostre que, dada uma função f contínua qualquer, a função $\psi(x,y,z,t) = f\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$ é solução da equação de onda tridimensional, onde $\vec{r}$ é o vetor posição, $\vec{k}$ é um vetor qualquer com dimensão de inverso de distância e a frequência $\omega = vk$.

Resolução:

Começamos por definir a função:

$$u(x,y,z,t) \equiv \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t \qquad (6.06.1)$$

e chamar de k_x, k_y e k_z as componentes do vetor $\vec{k}$. Podemos então ver que:

$$\vec{\nabla}u = \vec{k} \qquad (6.06.2)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega \qquad (6.06.3)$$

A partir daí, é fácil verificar que:

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{k}\frac{df}{du} \qquad (6.06.4)$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega\frac{df}{du} \qquad (6.06.5)$$

e que:

$$\nabla^2 \psi = k^2 \frac{d^2 f}{du^2} \qquad (6.06.6)$$

e:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{d^2 f}{du^2} \qquad (6.06.7)$$

Os lados direitos das equações (6.06.6) e (6.06.7) podem agora ser substituídos na equação $\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$. Encontramos então que:

$$k^2 \frac{d^2 f}{du^2} = \frac{\omega^2}{v^2} \frac{d^2 f}{du^2} \qquad (6.06.8)$$

Desse resultado podemos concluir que $\psi = f\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$ será solução da equação $\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ sempre que ω for igual a vk.