05 – Ondas e Pulsos

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 5.1

Você compra uma corda de violão. Ao medir o comprimento, descobre que ela tem $80\,cm$. Uma balança mostra que ela tem $7{,}7\,g$. Qual é a densidade linear? Compare uma tensão típica, de $60\,N$, com o peso da corda.

Resolução:

A densidade linear é a razão entre a massa e o comprimento:

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} = \frac{7{,}7\times 10^{-3}\,kg}{0{,}8m} = 9{,}6\times 10^{-3}\,kg\,/\,m$$

O peso da corda é $P = \Delta m = 7{,}5\times 10^{-2}\,N$, pouco mais do que um milésimo da tensão.

Exercício Resolvido 5.2

Um violão está deitado sobre uma superfície horizontal. Uma corda do instrumento é puxada por seu ponto médio até deslocar-se $1\,mm$ acima do ponto de equilíbrio. Que ângulo forma cada metade da corda com a reta horizontal que une os pontos de apoio da corda?

Resolução:

A Fig. 5.02.1 mostra a geometria. O triângulo formado pela trava de apoio à esquerda, o ponto médio da corda e o ponto médio entre as travas é retângulo. O ângulo θ, que queremos calcular, pode ser obtido da relação trigonométrica:

$$tg(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{0{,}001}{0{,}325} \qquad (5.02.1)$$

Como a fração à direita é muito pequena, constitui excelente aproximação substituir a tangente pelo seu argumento. Resulta então que $\theta = 0{,}003rad$.

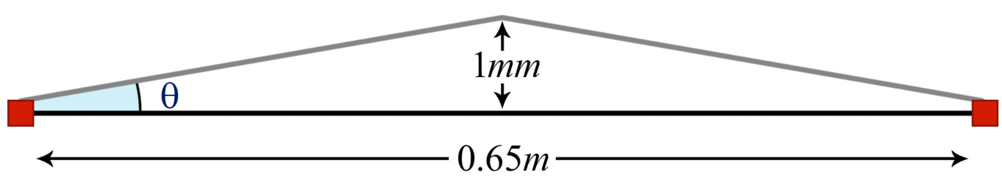

Figura 5.02.1: Corda de violão deslocada $1\,mm$ de sua posição de repouso. Para facilitar a visualização, a dimensão vertical foi amplificada. A separação entre as travas de apoio da corda é 0.65 cm.

Exercício Resolvido 5.3

Calcule a aceleração horizontal do segmento de corda entre os pontos D e E na Fig. 5.3.

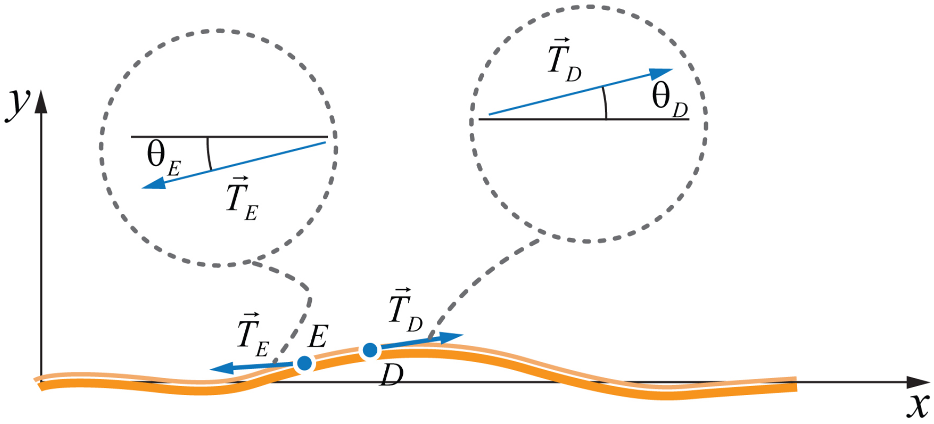

Figura 5.3: Pequena deformação. Um pulso de pequena amplitude perturba acorda, de forma que a altura máxima da deformação seja pequena em comparação com a sua largura.

Resolução:

A projeção da Eq. (5.01) no eixo horizontal mostra que

$$-T\cos\left(\theta_E\right)+T\cos\left(\theta_D\right)=\Delta m a_x \qquad (5.03.1)$$

Como os dois ângulos são muito pequenos, os seus cossenos são aproximadamente iguais à unidade, com erro da ordem do quadrado de cada ângulo, isto é, da ordem de 10^{-6} na situação do exercício 5.2. Assim, o lado esquerdo da Eq. (5.03.1) se anula. Podemos concluir que, em contraste com a vertical, a aceleração horizontal é nula.

Exercício Resolvido 5.4

Verifique que qualquer função $y(x,t) = f(x - vt)$, onde f é uma função contínua arbitrária e v é dada pela equação:

$$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

satisfaz à equação de onda.

Resolução:

Da igualdade $y(x,t)=f(x-vt)$ podemos facilmente computar as derivadas que aparecem na Eq. $\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left.\frac{d^2 f}{du^2}\right|_{u=x-vt} \qquad (5.04.1)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\left.\frac{d^2 f}{du^2}\right|_{u=x-vt}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \qquad (5.04.2)$$

A derivada entre parênteses no lado direito da Eq.(5.0.3) é igual a $-v$. Podemos agora substituir o lado esquerdo da Eq.(5.04.1) no lugar de d^2f/du^2 no lado direito da Eq.(5.04.2), para ver que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (5.04.3)$$

Da Eq. (5.14), temos que $v^2 = T/\mu$ Isso mostra que a Eq. (5.04.3) equivale à Eq. $\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

A mesma análise vale para funções do tipo $y(x,t) = f(x - vt)$, visto que o resultado depende apenas de v^2, não do sinal de v.

Exercício Resolvido 5.5

Uma corda de densidade linear $0{,}1\,kg/m$ está sujeita à tensão $T = 10N$. No instante $t = 0$, a corda está na posição de equilíbrio, mas tem velocidade vertical dada pela equação:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2'}} \qquad (5.05.1)$$

onde $a = 0{,}01m$. Encontre a deformação $y(x,t)$ da corda para $t > 0$.

Resolução:

Segundo a equação:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}\right)$$

a velocidade das ondas na corda é $v = \sqrt{10/0{,}1} = 10m/s$. O enunciado também nos diz que:

$$y(x,0) = 0 \qquad (5.05.2)$$

e

$$h(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \qquad (5.05.3)$$

Para explorar as equações:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(y(x,0) + \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{x} h(x')\,dx'\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(y(x,0) - \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{x} h(x')\,dx'\right)$$

precisamos integrar a função $h(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x} h(x')\,dx' = a\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \qquad (5.05.4)$$

A equação $f(x)=\frac{1}{2}\left(y(x,0)+\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{x}h(x')dx'\right)$ então mostra que:

$$f(x)=\frac{a}{20}\arctan(x)+\frac{a\pi}{20} \qquad (5.05.5)$$

e a equação $g(x)=\frac{1}{2}\left(y(x,0)-\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{x}h(x')dx'\right)$, que:

$$g(x)=-\frac{a}{20}\arctan(x)-\frac{a\pi}{20} \qquad (5.05.6)$$

A equação $y(x,t)=f(x+vt)+g(x-vt)$ pode finalmente ser combinada com as Eqs. (5.05.5) e (5.05.6) para determinar a deformação da corda em função do tempo:

$$y(x,t)=\frac{a}{20}\left(\arctan(x+vt)-\arctan(x-vt)\right) \qquad (5.05.7)$$

Exercício Resolvido 5.6

Uma corda está presa numa parede, que é escolhida como origem da coordenada x. Nesse sistema de coordenadas, um pulso é inicialmente descrito pela equação:

$$y(x,t)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-a+vt}{b}\right)^2} \qquad (5.06.1)$$

onde a e b são constantes com dimensão de comprimento e v é a velocidade com que o pulso caminha sobre a corda. A distância a é muito maior do que a largura b do pulso. Descreva a evolução do pulso em função do tempo.

Resolução:

No instante $t = 0$, o pulso da Eq. (5.06.1) está centrado no ponto $x = a$ e tem largura b. Como o lado direito é da forma $f(x + vt)$, o pulso caminha para a esquerda. No início, a amplitude $y(0,t)$ do pulso na origem é muito pequena:

$$y(0,0)=\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\ll 1 \qquad (5.06.1)$$

Com o correr do tempo, a amplitude na origem tende a crescer. No instante t tal que $vt = a$, o lado direito da Eq.(5.06.1) mostra que a amplitude na origem se torna unitária. Isso indica que a Eq. (5.06.1) deixa de ser correta, pois a parede exige que $y(0,t) = 0$.

Dito de outra forma, no início a Eq. (5.06.1) descreve bem a evolução do pulso. À medida que o tempo passa, ela se torna menos precisa porque a parede começa a empurrar verticalmente a corda quando a amplitude do pulso começa a crescer. Para impor que a amplitude na origem seja nula, devemos recorrer à equação $y_P(x,t) = \varphi(x + vt) - \varphi(-x + vt)$. Obtemos assim o resultado procurado:

$$y(x,t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-a+vt}{b}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\dfrac{-x-a+vt}{b}\right)^2} \qquad (5.06.2)$$

Para tempos pequenos, o segundo termo à direita é muito pequeno para qualquer $x \geq 0$. A qualquer instante, entretanto, ele garante que $y(0,t) = 0$.

Exercício Resolvido 5.7

Considere o problema enunciado no exercício 5.6. Se a extremidade da corda em $x = 0$ puder mover-se livremente na vertical, em lugar de estar presa a uma parede, a amplitude do pulso na origem não precisará ser nula, mas a corda deverá sempre ter inclinação zero na origem. Encontre a expressão que descreve a evolução do pulso em função do tempo.

Resolução:

No exercício 5.6, recorremos à equação $y_P(x,t) = \varphi(x + vt) - \varphi(-x + vt)$ para impor a condição $y(0,t) = 0$. Aqui, precisamos recorrer à equação $y_L(x,t) = \varphi(x + vt) + \varphi(-x + vt)$ para impor que $\left(\partial y / \partial x\right)_{x=0} = 0$. Resulta que:

$$y(x,t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-a+vt}{b}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\dfrac{-x-a+vt}{b}\right)^2}$$