04 – O que são Ondas?

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 4.1

Quais dos cinco sentidos humanos são capazes de discriminar a frequência de algum tipo de onda?

Resolução:

O olho humano é sensível a ondas eletromagnéticas com frequência entre 400 THz (4×10^{14} Hz) e 700 THz (7×10^{14} Hz). Cada frequência é interpretada pela retina como uma cor: $400THz$, $450THz$, $500THz$, $550THz$, $600THz$, $650THz$, $700THz$. A visão consegue, portanto, discriminar a frequência da luz.

O ouvido humano é sensível a ondas sonoras com frequência entre $20Hz$ e $20kHz$. Baixas frequências correspondem a sons graves (tuba, por exemplo), enquanto altas frequências definem sons agudos (apito, por exemplo). A audição consegue, portanto, discriminar a frequência do som.

A pele é sensível a forças. Quando em contato com um corpo que vibra com baixa frequência, a pele é capaz de acompanhar as oscilações e distinguir frequências mais altas de frequências mais baixas. Dedos apoiados em uma bexiga inflada que vibra nas proximidade de um alto-falante conseguem detectar as oscilações, por exemplo. O tato tem, portanto, capacidade (limitada) de discriminar a frequência de ondas sonoras.

O nariz consegue distinguir aromas diferentes característicos de moléculas presentes no ar, e a língua consegue avaliar a concentração de moléculas características do que é salgado, doce, amargo e ácido, mas nem o nariz, nem a língua conseguem detectar ondas. O gosto e o olfato, portanto, são incapazes de discriminar frequências.

Exercício Resolvido 4.2

Se uma estrela nas proximidades do Sol (a $\alpha -$Centauri, por exemplo, que está a menos de 5 anos-luz de nós) entrasse em colapso para formar uma supernova, seríamos capazes de ouvir a explosão?

Resolução:

Não. Mesmo que a radiação gama emitida pela supernova não acabasse com a vida na Terra, não conseguiríamos ouvir a explosão, porque inexiste meio material para transportar o som da estrela até nós. A luz não precisa de um meio para se propagar e por isso somos capazes de ver a Lua, os planetas, o Sol e as outras estrelas próximas de nós, mas nenhum som chega do espaço.

Exercício Resolvido 4.3

Que distância percorre a luz em um ano?

Resolução:

Um ano equivale a 365,25 dias, um dia a 24 horas e uma hora, a $3600\,s$. A distância que a luz avança em um ano é, portanto,

$$d = c \times 1 \text{ ano} \times \frac{365,25 \text{ dias}}{1 \text{ ano}} \times \frac{24h}{1 \text{ dia}} \times \frac{3600s}{1 \text{ hora}}$$

Efetuado o produto do lado direito, encontramos que:

$$d = 9,46 \times 10^{15} m$$

comprimento que é conhecido como ano-luz. É uma distância enorme: o diâmetro da órbita de Netuno em torno do Sol não chega a um milésimo de ano-luz.

Exercício Resolvido 4.4

Duas ondas percorrem, simultaneamente, um fio de comprimento tão grande que pode ser considerado infinito. Uma delas, que se propaga para a direita é dada pela equação:

$$y > (x,t) = \cos(kx - \omega t) \qquad (4.04.1)$$

Onde k e ω são duas constantes, com dimensões de m^{-1} e de s^{-1}, respectivamente.
A outra onda, que se propaga para a esquerda é dada pela equação:

$$y < (x,t) = \cos(kx + \omega t) \qquad (4.04.2)$$

Em que sentido se movimenta a soma das duas ondas?

Resolução:

A soma é dada pela igualdade:

$$y(x,t) = \cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t) \qquad (4.04.3)$$

que, com ajuda da fórmula de prostaférese:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad (4.04.4)$$

se reduz à expressão:

$$y(x,t) = 2\cos(kx)\cos(\omega t) \qquad (4.04.5)$$

Podemos ver que a solução não caminha nem para a direita, nem para a esquerda. No ponto $x = \frac{\pi}{2k}$, por exemplo, o lado direito da Eq. (4.04.5) é nulo em qualquer instante, o que significa que a corda permanece em repouso, constantemente. Nos outros pontos, o movimento pode ser visto como uma oscilação simples, com frequência ω e amplitude A que depende da posição: $A = 2\cos(kx)$. Esse movimento recebe o nome de onda estacionária.

Exercício Resolvido 4.5

Calcule os comprimentos de onda máximo e mínimo no espectro da luz visível.

Resolução:

A frequência mais baixa do espectro visível é $f_{\min} = 4\times10^{14}\,Hz$, da luz vermelha. O comprimento de onda do vermelho é, portanto

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{f_{\min}} \qquad (4.05.1)$$

ou seja:

$$\lambda_{\max} = 7\times10^{-7}\,m \qquad (4.05.2)$$

De forma análoga encontramos o comprimento de onda da luz violeta, que tem frequência $f_{\min} = 7\times10^{14}\,Hz$:

$$\lambda_{\min} = 4\times10^{-7}\,m.$$

Exercício Resolvido 4.6

A distância de Netuno ao Sol é $R_N = 4,5\times10^{12}\,m$. Calcule a potência por unidade de área recebida pelo planeta.

Resolução:

A superfície solar emite $P_S = 64\,MW/m^2$. O raio do Sol é $R_S = 7\times10^{8}\,m$. A irradiação da energia, como na Fig. 4.12, faz com que a potência por unidade de área decaia em proporção inversa ao quadrado da distância. A potência por unidade de área recebida por Netuno é:

$$P_N = \left(R_S / R_N\right)^2 P_S \qquad (4.06.1)$$

isto é,

$$P_N = 1,5W \qquad (4.06.2)$$

A energia solar recebida em Netuno é pouco mais do que um milésimo da recebida aqui na Terra. Visto de Netuno, o Sol tem brilho comparável ao de um LED indicador em painel de automóvel.

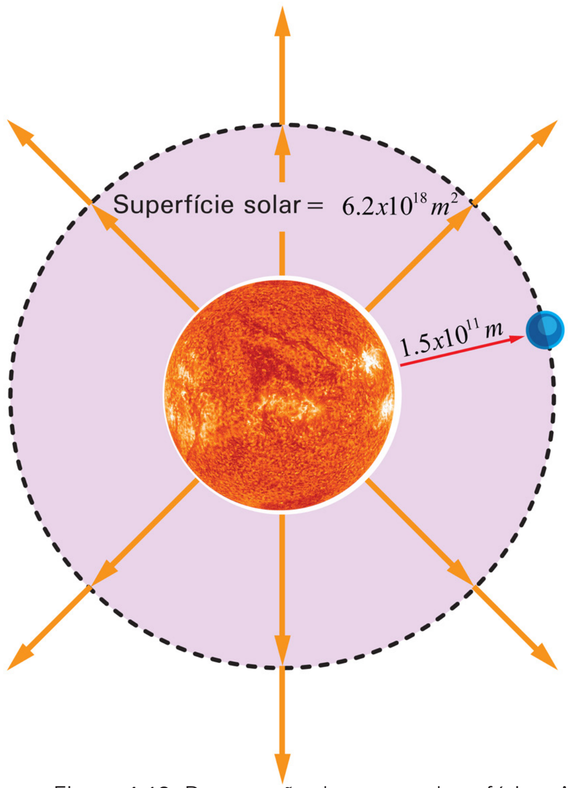

Figura 4.12: Propagação de uma onda esférica. Ao avançar, a onda ocupa superfícies esféricas progressivamente maiores. A conservação da energia exige que a potência transmitida decaia com o inverso do quadrado da distância r. A onda formada na superfície do Sol chega à Terra com intensidade 2, 2 × 10^{-5} menor.

Exercício Resolvido 4.7

Duas massas m que se movem sem atrito sobre um trilho horizontal estão ligadas entre si por uma mola de constante k. Cada mola também está presa por uma mola de constante k a uma parede, conforme mostra a Fig. 4.14. Estamos interessados nos movimentos em que as duas massas vibram com a frequência. Determine as frequências em que isso pode acontecer.

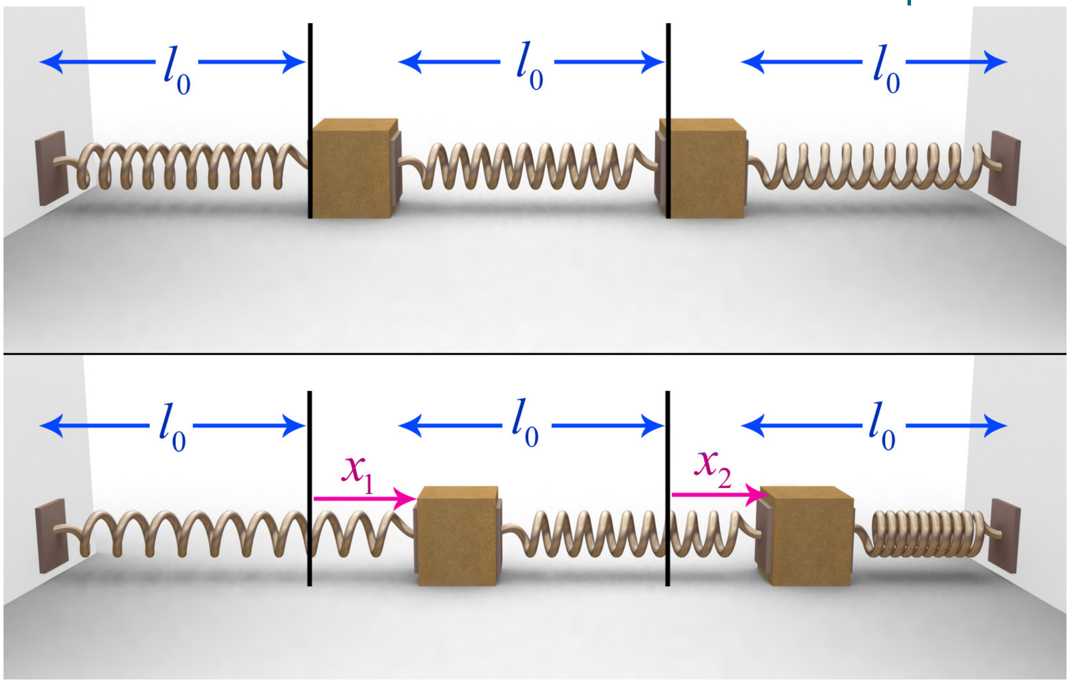

Figura 4.14: Duas massas m ligadas entre si e a paredes por molas de constante k e comprimento livre. Em (a), o sistema está equilíbrio. O traço fino vertical que toca o lado esquerdo de cada massa define o ponto de referência, a partir do qual será medido o deslocamento da massa. Em (b) o sistema está fora do equilíbrio e os deslocamentos e medem as posições das duas massas.

Resolução:

Conforme mostra a Fig. 4.14(b), convém medir a posição de cada massa a partir do seu ponto de equilíbrio, indicado na Fig. 4.14(a). A Segunda Lei de Newton então gera as seguintes equações diferenciais:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - k\left(x_1 - x_2\right) \qquad (4.07.1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k\left(x_2 - x_1\right) \qquad (4.07.2)$$

que podem ser simplificadas para adquirir as formas:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \omega_0^2\left(x_2 - 2x_1\right) \qquad (4.07.3)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega_0^2\left(x_1 - 2x_2\right) \qquad (4.07.4)$$

onde $\omega_0^2 = k/m$.

Para resolver o sistema das Eqs. (4.07.3) e (4.07.4), procedemos como no Cap. 2: definimos as variáveis $z_1 = v_1 + sx_1$ e $z_2 = v_2 + sx_2$. Em seguida, calculamos as derivadas dz_1/dt e dz_2/dt com ajuda das Eqs. (4.07.3) e (4.07.4). Resulta que:

$$\frac{dz_1}{dt} = \omega_0^2\left(x_2 - 2x_1\right) + sv_1 \qquad (4.07.5)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \omega_0^2\left(x_1 - 2x_2\right) + sv_2 \qquad (4.07.6)$$

No lado direito da Eq. (4.07.5), substituímos $z_1 = sx_1$ no lugar de v_1. Tratamos a Eq. (4.07.6) de forma análoga e obtemos os resultados:

$$\frac{dz_1}{dt} = sz_1 - s^2 x_1 + \omega_0^2 (x_2 - 2x_1) \qquad (4.07.7)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = sz_2 - s^2 x_2 + \omega_0^2 (x_1 - 2x_2) \qquad (4.07.8)$$

Queremos agora fazer com que a Eq. (4.07.7) dependa apenas de z_1 e que a Eq.(4.07.8) dependa apenas de z_2. Para isso, escolhemos s de forma que os demais termos nas duas equações sejam identicamente nulos, isto é, de forma que:

$$\left(s^2 + 2\omega_0^2\right) x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \qquad (4.07.9)$$

e

$$\omega_0^2 x_1 - \left(s^2 + 2\omega_0^2\right) x_2 = 0 \qquad (4.07.10)$$

Essas equações têm de valer em qualquer instante, para qualquer valor que as posições $x_1(t)$ e $x_2(t)$ possam tomar. Isso exclui a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$. Para que o sistema de Eqs. (4.07.9) e (4.07.10) tenha outra solução, é necessário que o determinante característico do sistema se anule, isto é, que:

$$\left(s^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4 = 0 \qquad (4.07.11)$$

ou, o que é equivalente,

$$\left(s^2 + \omega_0^2\right)\left(s^2 + 3\omega_0^2\right) = 0 \qquad (4.07.12)$$

A constante s pode portanto tomar dois valores,

$$s = \pm i\omega_0 \qquad (4.07.13)$$

caso o primeiro fator à direita na Eq. (4.07.12) seja zero, ou outros dois,

$$s = \pm i\sqrt{3}\omega_0 \qquad (4.07.14)$$

caso o segundo fator seja nulo.

Qualquer um desses valores de s converte a Eq.(4.07.5) à forma

$$\frac{dz_1}{dt} = sz_1 \qquad (4.07.15)$$

e a Eq.(4.07.6) à forma análoga:

$$\frac{dz_2}{dt} = sz_2 \qquad (4.07.16)$$

Esses resultados são análogos aos obtidos para o oscilador harmônico no Cap. 2 e mostram que o sistema da Fig.4.14 oscila com duas frequências:

$$\omega_1 = \omega_0 \qquad (4.07.17)$$

e

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0 \qquad (4.07.18)$$

Se substituirmos a Eq.(4.07.13) na Eq. (4.07.9), veremos que $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. Assim, se as duas massas da figura oscilarem em paralelo, ambas com a mesma deformação, a frequência será $\omega_1 = \omega_0$.

Se substituirmos a Eq.(4.07.14) na Eq.(4.07.9), veremos que $x_1 = -x_2$. Se as massas oscilam uma contra a outra, simetricamente, a frequência será $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$.

Mesmo neste exemplo simples, com duas massas, vemos o comportamento oscilatório emergir do comportamento de dois osciladores harmônicos. O comportamento ondulatório se caracteriza por uma variedade de frequências, cada qual com seu comprimento de onda. Com duas massas, encontramos duas frequências distintas, cada uma das quais corresponde a uma relação simples entre os deslocamentos das massas (iguais ou simétricos). Com três massas, encontramos três frequências, com quatro são quatro frequências e com N massas há N frequências e, aos poucos, o comportamento ondulatório vai desenvolver-se.