03 – Oscilações Forçadas

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 3.1

Uma paraquedista, com massa $m = 50\,kg$, se lança de um avião com velocidade vertical nula. Durante a queda, ela fica sujeita à força de atrito:

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

onde $b = 100\,kg/s$. Encontre a velocidade vertical da paraquedista em função do tempo desde o salto.

Resolução:

Fisicamente, o movimento da paraquedista exemplo é bem distinto de um oscilador harmônico. A solução matemática é semelhante, entretanto. Adotado o sentido descendente como positivo, a segunda lei de Newton nos dá a igualdade:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -bv_y + mg \qquad (3.01.1)$$

Essa equação independe da posição y. Convém, portanto, escolher $s = 0$, de forma que:

$$z = v_y \qquad (3.01.2)$$

Com isso, a equação (3.01.1) se reduz à equação diferencial:

$$\frac{dz}{dt} + \gamma z = g \qquad (3.01.3)$$

onde $\gamma = b/m = 2s^{-1}$.

Como na equação $\dfrac{dz}{dt} + (\gamma - s)z = e^{(s-\gamma)t}\dfrac{dze^{(\gamma-s)t}}{dt}$, o lado esquerdo pode ser escrito como o produto de uma função do tempo por uma derivada:

$$\frac{dz}{dt} + \gamma z = e^{-\gamma t}\frac{d(ze^{\gamma t})}{dt} \qquad (3.01.4)$$

Assim, a equação (3.01.3) pode ser escrita na forma

$$\frac{d(ze^{\gamma t})}{dt} = ge^{\gamma t} \qquad (3.01.5)$$

Podemos agora integrar os dois lados em relação ao tempo para encontrar o resultado:

$$z(t)e^{\gamma t} = \frac{g}{\gamma}e^{\gamma t} + c \qquad (3.01.6)$$

Para encontrar a constante de integração c, basta lembrar que em $t = 0$ a velocidade v_y é nula. Em outras palavras, $z(0) = 0$. Da equação (3.01.6), vemos então que $c = -g/\gamma$. Substituído esse valor na mesma equação, concluímos que:

$$z(t) \equiv v_y(t) = \frac{g}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}) \qquad (3.01.7)$$

ou

$$v_y(t) = 5(1-e^{-2t}) \qquad (3.01.8)$$

Em $t = 0$, o lado direito é nulo, como esperado. Para $t \to \infty$, por outro lado, a velocidade v_y tende ao valor limite $v_y(\infty) = 5m/s$. Sem o atrito, a velocidade vertical aumentaria sem limite até a paraquedista colidir com o solo. O atrito do paraquedas com o ar faz com que a velocidade, mesmo depois de muito tempo, seja moderada.

Exercício Resolvido 3.2

Que condições iniciais deve satisfazer o oscilador, sujeito à força na equação $\frac{dz}{dt} + (\gamma - s)z = e^{(s-\gamma)t}\frac{dze^{(\gamma-s)t}}{dt}$, para que não haja transiente? Dito de outra forma, quais devem ser as condições iniciais para que o oscilador entre imediatamente no regime estacionário?

Resolução:

A parte transiente do movimento descrito pela equação:

$$z_\pm(t) = \left(z_0 - \frac{F_0}{m}\frac{s_\mp \cos\varphi_0 + \omega \text{sen}\varphi_0}{s_\mp^2 + \omega^2}\right)e^{-s_\mp t} + \frac{F_0}{2m}\left(\frac{e^{i(\omega t+\varphi_0)}}{s_\mp + i\omega} + \frac{e^{-i(\omega t+\varphi_0)}}{s_\mp - i\omega}\right)$$

é o primeiro termo à direita. Para que não haja transiente, o fator entre parênteses naquele termo deve anular--se, isto é,

$$z_0 = \frac{F_0}{m}\frac{s_\mp \cos\varphi_0 + \omega \sin\varphi_0}{s_\mp^2 + \omega^2} \qquad (3.02.01)$$

Como há dois valores para s, a equação (3.02.01) se desdobra em duas:

$$v(0) + s_+ x(0) = \frac{F_0}{m}\frac{s_+ \cos\varphi_0 + \omega \sin\varphi_0}{s_+^2 + \omega^2} \qquad (3.02.02)$$

e

$$v(0) + s_- x(0) = \frac{F_0}{m}\frac{s_- \cos\varphi_0 + \omega \sin\varphi_0}{s_-^2 + \omega^2} \qquad (3.02.03)$$

Para encontrar a posição inicial, basta subtrair as duas igualdades membro a membro. A velocidade inicial é cancelada e resulta que:

$$x(0) = \frac{F_0}{m(s_+ - s_-)}\left(\frac{s_+ \cos\varphi_0 + \omega \sin\varphi_0}{s_+^2 + \omega^2} - \frac{s_- \cos\varphi_0 + \omega \sin\varphi_0}{s_-^2 + \omega^2}\right) \qquad (3.02.04)$$

Para encontrar a velocidade inicial, multiplicamos a equação (3.02.02) por s_-, multiplicamos a equação (3.02.03) por s_+ e subtraímos as equações resultantes, membro a membro. Os termos proporcionais a x_0 se cancelam e encontramos que:

$$v(0)=\frac{F_0}{m(s_+-s_-)}\left(\frac{s_-s_+\cos\varphi_0+s_+\omega\sin\varphi_0}{s_-^2+\omega^2}-\frac{s_+s_-\cos\varphi_0+s_-\omega\sin\varphi_0}{s_+^2+\omega^2}\right)\qquad(3.02.05)$$

Exercício Resolvido 3.3

Para que frequência é máxima a amplitude do movimento descrito pela equação:

$$x(t)=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}}\Re e^{i\left(\omega t+\varphi_0-\theta_0\right)}$$

Resolução:

A amplitude x_m é o fator que multiplica a função cosseno no lado direito da igualdade. Para maximizá-la, precisamos minimizar o radicando no denominador, ou seja, minimizar a função:

$$r\left(\omega\right)=\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\gamma^2\omega^2\qquad(3.03.1)$$

A função passa por um mínimo quando sua derivada é nula, isto é, quando:

$$\frac{dr}{d\omega}=4\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\omega+2\gamma^2\omega=0\qquad(3.03.2)$$

Podemos ver, assim, que $dr/d\omega = 0$ quando $\omega = 0$ ou quando:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2}}\qquad(3.03.3)$$

Para saber se o zero da derivada é um máximo ou um mínimo da função, precisamos calcular a segunda derivada. Da equação (3.03.2), podemos ver que:

$$\frac{dr}{d\omega}=4\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\omega+2\gamma^2\omega=0\qquad(3.03.4)$$

No ponto $\omega = 0$, a derivada segunda é negativa para $\omega_0^2>\gamma^2/2$. Assim, quando a equação (3.03.3) tem solução real positiva, função $r(\omega)=0$ passa por um máximo em $\omega=0$. Na mesma condição, a segunda derivada é positiva quando ω satisfaz à equação (3.03.3), o que quer dizer que $r(\omega)$ é mínima, e a amplitude é máxima. A máxima amplitude é:

$$x_m^{\max}=\frac{F_0}{m\gamma}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\qquad(3.03.5)$$

Na frequência $\omega=\omega_0$, a amplitude é $F_0/\left(m\gamma\omega_0\right)$, menor do que o lado direito da equação (3.03.5).
Já quando $\omega_0^2\leq\gamma^2/2$, a amplitude é máxima em $\omega=0$, e vale $F_0/\left(m\omega_0^2\right)$.

Exercício Resolvido 3.4

Um oscilador é constituído por uma massa $m = 1\,kg$ presa a uma mola de constante $k = 100\,N/m$ e sujeita a atrito viscoso com coeficiente $b = 1\,kg/m$. Ele está sujeito a uma força externa $F(t) = cos(\omega t)\,N$. Encontre as potências dissipadas nas frequências $\omega = 1\,rad/s$, $10\,rad/s$ e $100\,rad/s$.

Resolução:

Dos dados, extraímos os seguintes parâmetros:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\,rad/s \qquad (3.04.1)$$

$$\gamma = \frac{b}{m} = 1s^{-1} \qquad (3.04.2)$$

$$\frac{F_0^2\gamma}{2m\omega_0^2} = 5\times10^{-3}W \qquad (3.04.3)$$

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = 0,1 \qquad (3.04.4)$$

Quando $\omega = 1\,rad/s$, a razão ω/ω_0 vale 0,1. Substituído esse valor no denominador da segunda fração à direita na equação:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\omega_0^2}\frac{\gamma}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$$

encontramos que:

$$\bar{P}(1rad/s) = 5,1\times10^{-5}W \qquad (3.04.5)$$

Quando $\omega = 10\,rad/s$, a razão ω/ω_0 vale 1. Da equação:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\omega_0^2}\frac{\gamma}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$$

encontramos então que:

$$\bar{P}(10rad/s) = 0,5W \qquad (3.04.6)$$

Finalmente, quando $\omega = 100\,rad/s$, a razão ω/ω_0 vale 10, e a equação:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\omega_0^2}\frac{\gamma}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$$

mostra que a potência é igual à encontrada na equação (3.04.5):

$$\bar{P}(100rad/s) = 5,1\times10^{-5}W \qquad (3.04.7)$$

A potência média na frequência $10\,rad/s$ é quase 10 mil vezes maior do que nas duas outras frequências. Isso porque, como $\omega_0 = 10\,rad/s$, a frequência na equação (3.04.06) está ressonância, o assunto da próxima seção.

Exercício Resolvido 3.5

Calcule o fator de qualidade do oscilador do exercício 3.4.

Resolução:

Da equação (3.04.4), podemos ver que:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = 10 \qquad (3.05.1)$$

Embora relativamente modesto, esse fator de qualidade é responsável pela enorme magnificação da potência média encontrada no exercício 3.4.

Exercício Resolvido 3.6

Compare a força externa na ressonância com a força de atrito.

Resolução:

A força de atrito é $F_v = -bv$. A velocidade é dada pela equação:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{F_0}{m}\frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0 - \theta_0)$$

Temos então que:

$$F_v(t) = \frac{bF_0}{m}\frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0 - \theta_0) \qquad (3.06.1)$$

Na ressonância, com $\omega = \omega_0$, o primeiro dentro da raiz quadrada à direita se anula, e resulta que:

$$F_v(t) = \frac{bF_0}{m\gamma}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0 - \theta_0) \qquad (3.06.2)$$

Lembramo-nos agora de que $\gamma = b/m$ e de que, na ressonância, $\theta_0 = \pi/2$. Resulta que:

$$F_v(t) = -F_0\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (3.06.3)$$

que é o negativo da força externa, dada pela equação:

$$F(t) = F_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

A força de atrito, portanto, neutraliza a força externa.

Exercício Resolvido 3.7

Um oscilador tem massa $m = 2\,kg$, presa a uma mola de constante $k = 128\,N/m$ e sujeita atrito viscoso com constante $b = 8\,kg/s$. No Sistema Internacional, o oscilador está sujeito a uma força $F = 100\cos(\omega t)$, com frequência $\omega = 1000\,rad/s$. Mostre que, dentro de boa aproximação, o movimento equivale ao da mesma massa m sujeita à mesma força externa.

Resolução:

Se a massa m estivesse sujeita apenas à força externa – sem mola e sem atrito –, o seu movimento seria descrito pela Segunda Lei:

$$100\cos(\omega t) = 2\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (3.07.1)$$

A equação (3.07.1) pode ser facilmente resolvida. Sabemos que a segunda derivada da função cosseno é o negativo do próprio cosseno. Assim, procuramos uma solução na forma:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) \qquad (3.07.2)$$

onde x_0 é uma constante a determinar. Substituída essa expressão no lado direito da equação (3.07.1), encontramos o resultado:

$$x_0 = -5\times10^{-5}\,m \qquad (3.07.3)$$

o que faz a equação (3.07.2) tomar a forma:

$$x(t) = -5\times10^{-5}\cos(\omega t) \qquad (3.07.4)$$

Precisamos agora comparar com a equação (3.36). Para isso calculamos as constantes no lado direito daquela igualdade. Do enunciado, temos imediatamente que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8\,rad/s \qquad (3.07.5)$$

$$\gamma = \frac{b}{m} = 4s^{-1} \qquad (3.07.6)$$

$$F_0 = 100\,N \qquad (3.07.7)$$

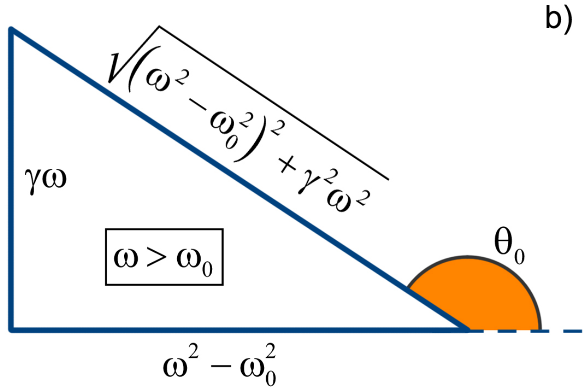
e

$$\varphi_0 = 0 \qquad (3.07.8)$$

A frequência ω_0 e a constante de amortecimento γ são muito menores do que a frequência ω. A Fig. 4(b) mostra que, nessas condições, o ângulo θ_0 é praticamente igual a πrad. Substituímos esses valores no lado direito da equação (3.36) e encontramos que:

$$x(t) = -5.0003\times10^{-5}\cos(\omega t) \qquad (3.07.9)$$

no Sistema Internacional.



A semelhança entre as equações (3.07.4) e (3.07.9) mostra que, para altas frequências, tudo se passa como se não existissem mola ou atrito viscoso. A força externa trabalha quase que exclusivamente para vencer a inércia da massa.

Exercício Resolvido 3.8

O oscilador do exercício 3.7 está agora sujeito à força $F = 100\cos(\omega' t)$, no Sistema Internacional, onde $\omega' = 8rad/s$. Mostre que o seu movimento equivale ao de um corpo sem inércia sujeito apenas ao atrito viscoso.

Resolução:

Se a massa m não tivesse inércia e estivesse apenas sujeita ao atrito viscoso, seu movimento seria descrito pela equação:

$$F(t) = bv(t) \qquad (3.08.1)$$

isto é,

$$100\cos(8t) = 8\frac{dx}{dt} \qquad (3.08.2)$$

Para encontrar a posição em função do tempo, devemos apenas integrar os dois lados da equação (3.08.2) em relação ao tempo. Isso feito, vemos que:

$$x(t) = 1.5625sen(8t) + c \qquad (3.08.3)$$

onde c é uma constante que pode ser desconsiderada porque queremos que a massa oscile em torno da origem. Assim, a equação (3.08.3) pode ser escrita na forma:

$$x(t) = 1.5625sen(8t) \qquad (3.08.4)$$

No entanto, o oscilador tem inércia e está sujeito a uma terceira força: a da mola. A análise mais rigorosa conduz, como já vimos, à equação (3.36) com as constantes ω_0, γ, F_0 e m encontradas no exercício 3.7. Como $\omega' = 8 = \omega_0$, estamos na ressonância. O ângulo θ_0 é, portanto, $\pi/2rad$, e a equação:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\gamma\omega\right)^2}}\Re e^{i\left(\omega t + \varphi_0 - \theta_0\right)}$$

assume a forma:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma\omega'}sen(\omega' t)$$

e a substituição dos valores encontrados no exercício 3.7 conduz a resultado idêntico à equação (3.08.4). Na ressonância, a força da mola é exatamente suficiente para neutralizar a inércia da massa, e a força externa precisa apenas neutralizar o atrito viscoso – a mesma conclusão a que chegamos no exercício 3.6. Na ressonância, tudo se passa como se Aristóteles tivesse tomado o lugar de Newton. Em lugar de a força externa ser proporcional à aceleração, a força externa é proporcional à velocidade. É como argumentava a filosofia grega.