02 – Oscilações Amortecidas

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 2.1

Um oscilador é constituído por uma massa $m = 1\,kg$ que está presa a uma mola de constante $k = 100\,N/m$ e sofre atrito viscoso com coeficiente $b = 1\,Ns/m$. Encontre a equação diferencial que descreve seu movimento. Essa equação é suficiente para determinar a posição do oscilador em função do tempo?

Resolução:

Das constantes no enunciado, encontramos a frequência:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 rad / s$$

e a constante de amortecimento:

$$\gamma = \frac{b}{m} = 1 s^{-1}$$

A equação diferencial é dada pela equação (2.4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

Essa equação é insuficiente para determinar a posição do oscilador em função do tempo, porque sua solução depende das condições iniciais, que não foram dadas.

Exercício Resolvido 2.2

Obtenha a igualdade equivalente à equação $z(t) = z_0 e^{-(\gamma - s)t}$ para o oscilador harmônico simples.

Resolução:

A equação diferencial do oscilador harmônico simples é:

$$a = -\omega_0^2 x$$

Nesse caso, a equação $\dfrac{dz}{dt} = -\gamma v - \omega_0^2 x + sv$ toma a forma:

$$\frac{dz}{dt} = -\omega_0^2 x + sv$$

A partir da equação $z(t) = v(t) + sx(t)$, escrevemos agora que $v = z - sx$ e inserimos essa expressão no lugar de no lado direito da expressão para dz/dt. O resultado é:

$$\frac{dz}{dt} = sz - \left(s^2 + \omega_0^2\right)x$$

Para simplificar, escolhemos s de forma a anular o termo proporcional a x no lado direito, isto é, escolhemos:

$$s = \pm i\omega_0 \, .$$

Com isso a equação diferencial para z se reduz a:

$$\frac{dz}{dt} = \pm i\omega_0 z$$

que tem solução simples:

$$z(t) = z_0 e^{\pm i\omega_0 t}$$

onde z_0 é $z(t = 0)$.

Exercício Resolvido 2.3

Encontre a posição $x(t)$ no regime sobreamortecido para condições inicias $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$, isto é, para um oscilador que está inicialmente parado no ponto x_0.

Resolução:

Das condições iniciais, podemos ver que $z(0) \equiv v(0) + sx(0) = sx_0$. A equação $z(t) = z_0 e^{-(\gamma - s)t}$, portanto, assume a forma:

$$v(t) + s^{+} x(t) = s^{+} x_0 e^{-(r+\gamma/2)t}$$

para $s = s^{+}$, e:

$$v(t) + s^{-} x(t) = s^{-} x_0 e^{(r-\gamma/2)t}$$

para $s = s^{-}$. Subtraímos agora uma equação da outra para eliminar $v(t)$ e obter uma equação para a posição:

$$x(t) = x_0 \frac{\left(r + \gamma/2\right) e^{-(r-\gamma/2)t} + \left(r - \gamma/2\right) e^{(r-\gamma/2)t}}{2r}$$

onde r é dado pela equação $r = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2},.$

Lembradas as definições das funções hiperbólicas, podemos reescrever o mesmo resultado na forma mais compacta:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left(\cosh(rt) - \frac{\gamma}{2r} \sinh(rt) \right)$$

Exercício Resolvido 2.4

A que regime pertence o oscilador do Exemplo 2.01?

Resolução:

Vimos ao resolver o exercício 2.1 que $\omega_0 = 10\,rad/s$, enquanto $\gamma = 1\,s^{-1}$. Vemos portanto que $2\omega_0 > \gamma$. O oscilador é subamortecido. Posto em movimento, ele oscilará continuamente até ficar praticamente parado, como ilustrado pela figura abaixo:

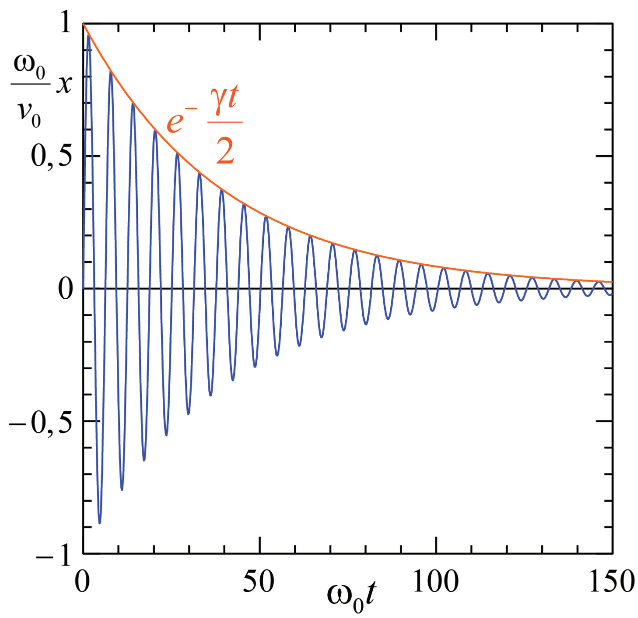

Figura 5: Oscilações fracamente amortecidas. Com $\gamma \ll \omega_0$, a massa oscila numerosas vezes antes de parar. A vibração equivale a um MHS com amplitude exponencialmente decrescente

Exercício Resolvido 2.5

Suponha que o oscilador do exercício 2.1 passe pela origem com velocidade de $1\,m/s$. Tomando esse instante como origem dos tempos, encontre a posição do oscilador para um instante $t > 0$, qualquer.

Resolução:

Se a posição inicial for nula, $x(t \geq 0)$ será o produto de uma exponencial por uma senoide. Especificamente, segundo a equação $x(t) = v_0 e^{-\gamma t/2} \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}$,

$$x(t) = v(t=0)e^{-\gamma t/2}\frac{sen(\omega_1 t)}{\omega_1}$$

onde ω_1 é a frequência da equação $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2/4}$. Substituídos a velocidade inicial e os valores encontrados no exercício 2.1, somos conduzidos ao resultado

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{399}}e^{-t/2}sen\left(\sqrt{399/4}t\right)$$

Exercício Resolvido 2.6

Suponha agora que o oscilador tenha massa $m = 1\,kg$ e a mola tenha constante $k = 100\,N/m$, como no exercício 2.1, mas que o coeficiente de atrito viscoso seja tal que o sistema seja criticamente amortecido. A massa passa pelo origem, no instante $t = 0$, com velocidade $2\,m/s$. Encontre a sua posição em função do tempo.

Resolução:

Para o oscilador ser criticamente amortecido, o coeficiente de amortecimento γ deve ser o dobro da frequência ω_0. Como esta última é igual a $\sqrt{k/m} = 10$, o coeficiente de amortecimento deve ser:

$$\gamma = 20 rad/s$$

De acordo com a equação $x(t) = v_0 t e^{-\omega_0 t}$, a posição em função do tempo é dada pela relação:

$$x(t) = 2te^{-10t} \;.$$