01 – O Oscilador Harmônico Simples

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 1.1

Uma mola helicoidal tem constante elástica k. Ela funciona igualmente bem, sob forças de tração ou compressão. Uma de suas extremidades é fixa numa parede e a outra no ponto A, onde ela é presa a um carrinho de massa m que pode mover-se livremente sobre uma plataforma horizontal. Uma força horizontal dada por $\vec{F}_1 = -80.\vec{i}$ (newtons) mantém o carrinho em repouso, produzindo uma elongação de $x = -4\ cm$ na mola (ela fica, assim, comprimida).

Quando solto (livre da força $\vec{F}_1$ que o segura), o carrinho é empurrado pela força elástica da mola no sentido positivo do eixo $0x$.

a) Determine a constante elástica da mola.

b) Determine a força da mola quando ela é alongada até um ponto no qual $x = 2{,}5\ m$.

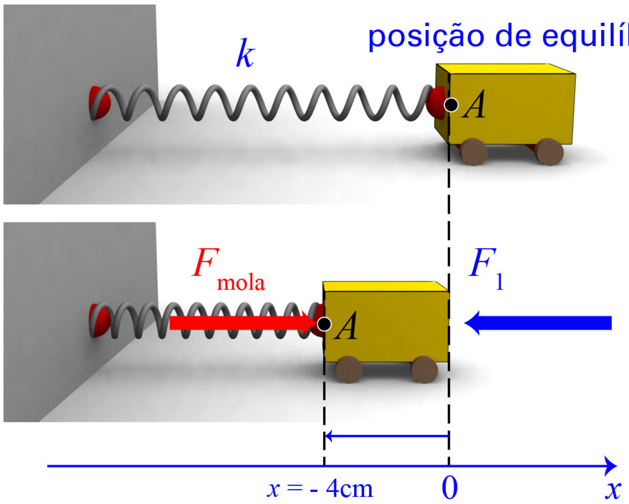

Figura 1.4: O movimento de um corpo preso a uma mola resulta quando a mesma está sujeita a forças de compressão (como no caso da figura) ou quando sujeita a forças de tração.

Resolução:

a) Sobre o carrinho atuam quatro forças:

• Na direção vertical, identificada com a direção do eixo y, atuam a força peso $\vec{p}$ e a força normal $\vec{N}$. Escrevemos, utilizando vetores:

$$\vec{p} = -mg\vec{j} \qquad \vec{N} = N\vec{j}\ .$$

Tais forças são representadas na Figura 1.3.

• Na direção horizontal, atuam outras duas forças: a da mola $\vec{F}_{mola}$ e a força horizontal já aludida, $\vec{F}_1$. Escrevemos na notação vetorial:

$$\vec{F}_{mola} = F_{mola}\vec{i} \qquad \vec{F}_1 = -80\vec{i}\ .$$

De acordo com a 2ª Lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{p} + \vec{N} + \vec{F}_{mola} + \vec{F}_1 = m\vec{a}.$$

Como a situação é de equilíbrio, então, $\vec{a} = 0$. Conclui-se, portanto, que:

$$\vec{P} + \vec{N} = [-mg + N]\vec{j} = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = mg$$
$$\vec{F}_{\text{mola}} + \vec{F}_1 = [F_{\text{mola}} - F_1]\vec{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_{\text{mola}}$$

De acordo com a equação 1.4, tem-se que $F_{mola} = -kx$. E isso nos permite escrever: $F_1 = -kx$. Donde se conclui que $k = -F_1/x$. Substituindo os valores conhecidos, $F_1 = 80N$ e $x = -4cm = -0,04m$, resulta que a constante elástica da mola é dada por:

$$k = \frac{-80 \text{ N}}{-0,04 \text{ m}} = 2000 \,\text{N/m}$$

b) A Figura 1.4 mostra a mola comprimida; nessa situação, sua coordenada é negativa ($x < 0$).
Na posição ilustrada na Figura 1.5, a coordenada da mola é positiva ($x > 0$), pois ela se encontra distendida.

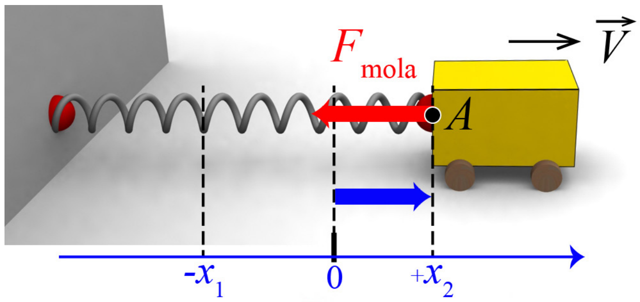

Figura 1.5: Exemplo de elongação da mola.

Em ambas as situações ($x < 0$ ou $x > 0$), o sentido do vetor força experimentada pela partícula, é oposto ao sentido do seu vetor posição. Assim, quando $x = 2,5\,cm = 0,025\,m$, a força aplicada pela mola tem uma componente negativa:

$$F_{mola} = -(2.000N/m)(0,025m) = -50N$$

Exercício Resolvido 1.2

Uma mola helicoidal tem constante elástica $k = 2000\,N/m$. Uma de suas extremidades é fixa numa parede e a outra no ponto A, onde ela é presa a um carrinho de massa $m = 5\,kg$ que pode mover-se livremente sobre uma plataforma horizontal. Quando puxado para a esquerda do ponto de equilíbrio e depois solto, o sistema se comporta como um oscilador harmônico simples.

a) Qual é o período T deste oscilador?

b) Determine a frequência deste oscilador?

c) Qual deve ser a massa do carrinho para que o período seja $T = 1\,s$?

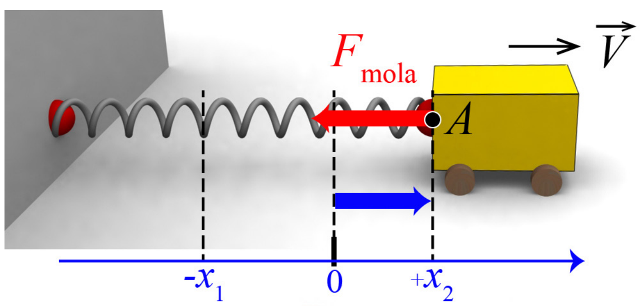

Figura 1.9: Exemplo de um sistema que se comporta como um oscilador harmônico simples.

Resolução:

a) Período do oscilador.

Conforme a equação 1.23, o período é inversamente proporcional à constante ω, ou seja, $T = 2\pi/\omega$. Por outro lado, conforme a equação 1.19, temos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000\ \mathrm{N/m}}{5\ \mathrm{kg}}} = 20(1/\mathrm{s})$$

Portanto,

$$T = \frac{6,28}{20/s} = 0,314\ s$$

O que isto significa? Deduzimos que cada vai e vem completo do carrinho tem duração de T = 0,314 s. Em outras palavras, o oscilador executa 100 vibrações completas em 31,4 s.

b) Frequência do oscilador.

A frequência é o número de vibrações que o oscilador executa na unidade de tempo. Conforme a equação:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{2\pi}$$

temos:

$$f = 1/T = 1/0,314\ \mathrm{s} \cong 3,18/\mathrm{s} = 3,18\ \mathrm{hertz}$$

c) Massa do carrinho para que o período seja T = 1 s.

Da relação $T = (2\pi)/\omega$, segue que, para T = 1 s, tem-se $\omega = 2\pi$; como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ concluímos que $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi$. Elevando-se ao quadrado, temos: $k/m = (2\pi)^2$, donde obtemos:

$$m = \frac{k}{(2\pi)^2} = 2000/39,438 = 50,71\ \mathrm{kg}$$

Portanto, para que o período do oscilador seja T = 1 s, a massa total do carrinho deve ser $m = 50{,}71kg$. Como $f = 1/T$, nessas condições, a frequência do oscilador será $f = 1\mathrm{Hz}$.

Exercício Resolvido 1.3

Uma mola cuja constante elástica é $k = 400\ N/m$, tem uma de suas extremidades fixa no teto do laboratório. Na sua extremidade livre é preso um objeto de massa $m = 4\,kg$. A mola alonga-se num montante y_0 até encontrar a nova posição de equilíbrio.

Em seguida, o objeto é levado até um ponto caracterizado pela coordenada $y = -0{,}10\,m$ (em relação ao ponto de equilíbrio) de onde, após solto, se move como um oscilador harmônico simples (MHS). Adotar $g = 10\ N/kg$.

a) Determinar a coordenada y_0, onde se encontra o novo ponto de equilíbrio da partícula.
b) Escrever a equação do MHS deste sistema massa-mola.
c) Determinar o período do movimento.
d) Escrever as equações da velocidade e da aceleração.

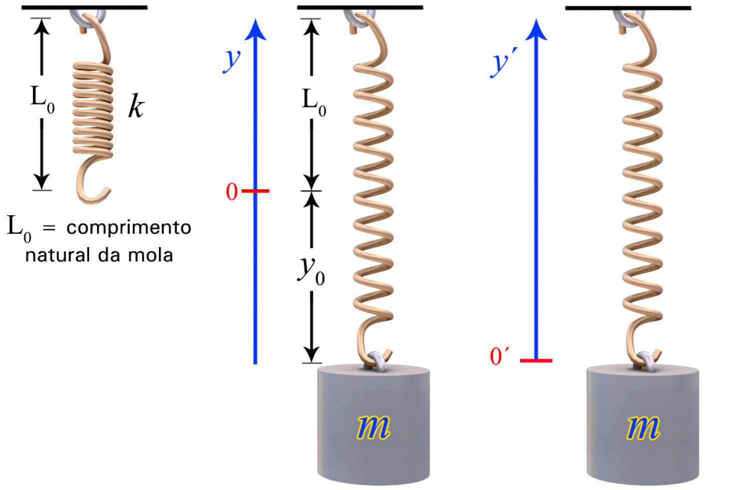

Figura 1.11: Como o movimento acontece na vertical, adotaremos o eixo y_0 ao invés do eixo x_0. O eixo y será orientado para cima. O eixo y' tem a mesma orientação, mas sua origem se situa no novo ponto de equilíbrio da partícula.

Resolução:

a) Coordenada y_0 do ponto de equilíbrio.

Na situação de equilíbrio, o peso do objeto é equilibrado pela força elástica da mola, ou seja, $mg = -ky_0$, donde obtemos:

$$-y_0 = \frac{mg}{k} = \frac{4\times 10\ kg.N/kg}{400\,N/m} = 10^{-1}m = 0{,}1m$$

Portanto, como resultado do peso do objeto pendurado, a mola distende-se $10\,cm$ para baixo.

b) Equação do MHS

A equação geral do MHS é dada pela equação 1.28, a qual, nesse caso considerando-se a origem no novo ponto de equilíbrio, é dada por:

$$y'(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

Resta determinar, para este caso, os valores das constantes A, ω e θ_0. A seguir adotaremos o SI.

• A amplitude A do movimento.

No instante $t = 0$, a velocidade é $v(t = 0) = 0$; e a coordenada nesse instante é: $y'(t=0) = -0{,}10m$. Assim, a amplitude do movimento é:

$$A = 0{,}10\,m.$$

Observação: se o eixo $0y$ fosse orientado para baixo, teríamos nesse caso $y'(t=0) = 0{,}10m$.

• A constante ω.

A frequência angular é determinada pela massa e pela constante elástica da mola:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\,N/m}{4\,kg}} = \sqrt{100}\sqrt{\frac{(kg\cdot m/s^2)/m}{kg}} = 10\left(\frac{1}{s}\right).$$

Podemos, então, escrever a equação horária do movimento, em termos da fase θ_0, como:

$$y'(t) = -0{,}10\cos(10t + \theta_0)$$

A fase θ_0, por outro lado, pode ser determinada a partir das informações sobre as condições iniciais. Temos $v(t = 0) = 0$; logo devemos ter $0 = sen\left[0+\theta_0\right]$, que resulta $0 = sen\left(\theta_0\right)$; donde, $\theta_0 = 0$ ou $(n\pi)\,rad$. A solução mais simples e compatível com a condição inicial para y' é $\theta_0 = 0$.

Portanto, a equação do movimento pode ser assim expressa:

$$y'\left(t\right) = -0{,}10\cos\left(10t\right)$$

c) O período do movimento.

Conforme a equação 1.23, o período do movimento é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{10\left(\frac{1}{\text{s}}\right)} = 0{,}628 \text{ s}$$

d) As equações da velocidade e da aceleração a qualquer tempo.

A velocidade é obtida a partir da derivada de 1ª ordem da equação horária da coordenada y (no caso, da equação do MHS). Assim,

$$v = \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-0{,}1\cos\left(10t\right)\right) = 10\left(0{,}10sen\left(10t\right)\right) = sen\left(10t\right)$$

A aceleração é obtida a partir da derivada de 1ª ordem da velocidade, ou seja,

$$a\left(t\right) = \frac{d\left(\text{sen}\left(10t\right)\right)}{dt} = 10\cos\left(10t\right)$$

Exercício Resolvido 1.4

Uma mola de constante elástica $k = 2.00N/m$ tem uma extremidade fixada numa parede e a outra, num carrinho de massa $m = 5\,kg$, que pode se movimentar numa superfície horizontal sem atrito.

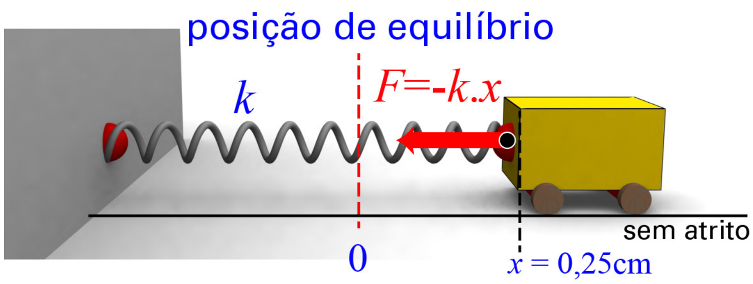

Figura 1.13: Ilustração alusiva ao exemplo 4.

A partir da posição de equilíbrio, o carrinho é puxado para a direita até que a elongação da mola corresponda ao valor: $x = 0{,}25\,m$. Esse é o valor da amplitude $x_M = A = 0{,}25\,m$. Depois de solto, o sistema se comporta como um oscilador harmônico, realizando um Movimento Harmônico Simples.

- Determinar o período T e a frequência f deste oscilador harmônico.
- A partir da equação horária, (1.15), determine as constantes A, ω e θ_0.

Resolução:

a) A frequência angular é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000\text{ N/m}}{5\text{ kg}}} = 20\left(\frac{1}{\text{s}}\right).$$

Conforme definido na equação 1.20, o período e a frequência são dados, respectivamente, por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20/\text{s}} = \frac{\pi}{10}\text{s} = 0{,}1\pi\ \text{s}$$

$$f = 1/T = \frac{10}{\pi}\ \text{Hz}$$

b) Adotando o eixo $0x$, horizontal, e orientado para a direita, as condições iniciais do movimento para $t = 0$ são:

$$v_0 = 0 \ \text{ e } \ x_0 = 0{,}25\,m$$

A amplitude do movimento é $A = 0{,}25\,m$ (que é elongação máxima). Nesse caso, ela corresponde à coordenada do ponto onde o carrinho foi solto). Substituindo-se A e ω na equação geral, temos:

$$x(t) = 0{,}25\cos(20t + \theta_0)$$

A velocidade é dada, portanto, pela equação horária:

$$v(t) = -5\,\text{sen}(20t + \theta_0)$$

Assim, para completar a solução, resta determinarmos a fase θ_0. Para isso usamos a condição: $v(t = 0) = 0$; portanto, devemos impor a condição $\text{sen}\theta_0 = 0$. Ou seja, $\theta_0 = 0°, 360°, 720°, \ldots$. Vamos escolher a opção mais simples: $\theta_0 = 0$. Assim, a equação horária levando em conta as condições iniciais, será:

$$x(t) = 0{,}25\cos(20t)$$

Exercício Resolvido 1.5

Um pêndulo cuja partícula tem massa $m = 100\,g$ e comprimento L é posto a oscilar com pequenas amplitudes. O período mensurado foi $T = 1\,s$. Considere $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Determinar:

a) O comprimento L deste pêndulo.

b) Qual seria o período deste pêndulo quando colocado a oscilar na superfície da Lua, onde a aceleração da gravidade é 1,63 N/kg (m/s^2)?

Resolução:

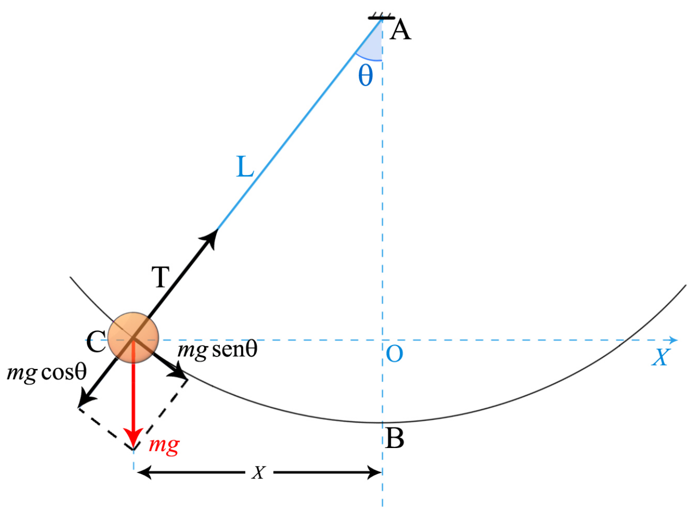

Figura 1.16: decomposição das forças agindo sobre o corpo que oscila. A força tem duas componentes, denominadas tangenciais e normais à circunferência em cada ponto. A aceleração tem, igualmente duas componentes. No entanto as componentes essenciais, da força e da aceleração, no estudo do movimento, são as componentes tangenciais.

a) O comprimento do pêndulo pode ser determinado em função do período, a partir da equação 1.41 do texto. De fato, elevando ao quadrado essa expressão, obtemos:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = (1\ s)^2 \left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right) \Big/ 4(3{,}14)^2 = 0{,}2485\ m \cong 25\ cm.$$

Portanto, o período de um pêndulo, de comprimento $L = 25\,cm$, é $T = 1\,s$.

b) Diferentemente do sistema massa-mola, onde o período não depende da gravidade, no caso do pêndulo simples ele é fundamental. No caso da Lua, o período é dado por:

$$\mathrm{T}_{Lua} = 2\pi\sqrt{L/g} = 6{,}28\sqrt{0{,}25/1{,}63}$$

Donde inferimos que o mesmo pêndulo, quando colocado a oscilar na Lua, teria um período de $T_{Lua} = 2{,}46\,s$. Ou seja, ele oscila mais lentamente na Lua.